

УДК 539.3

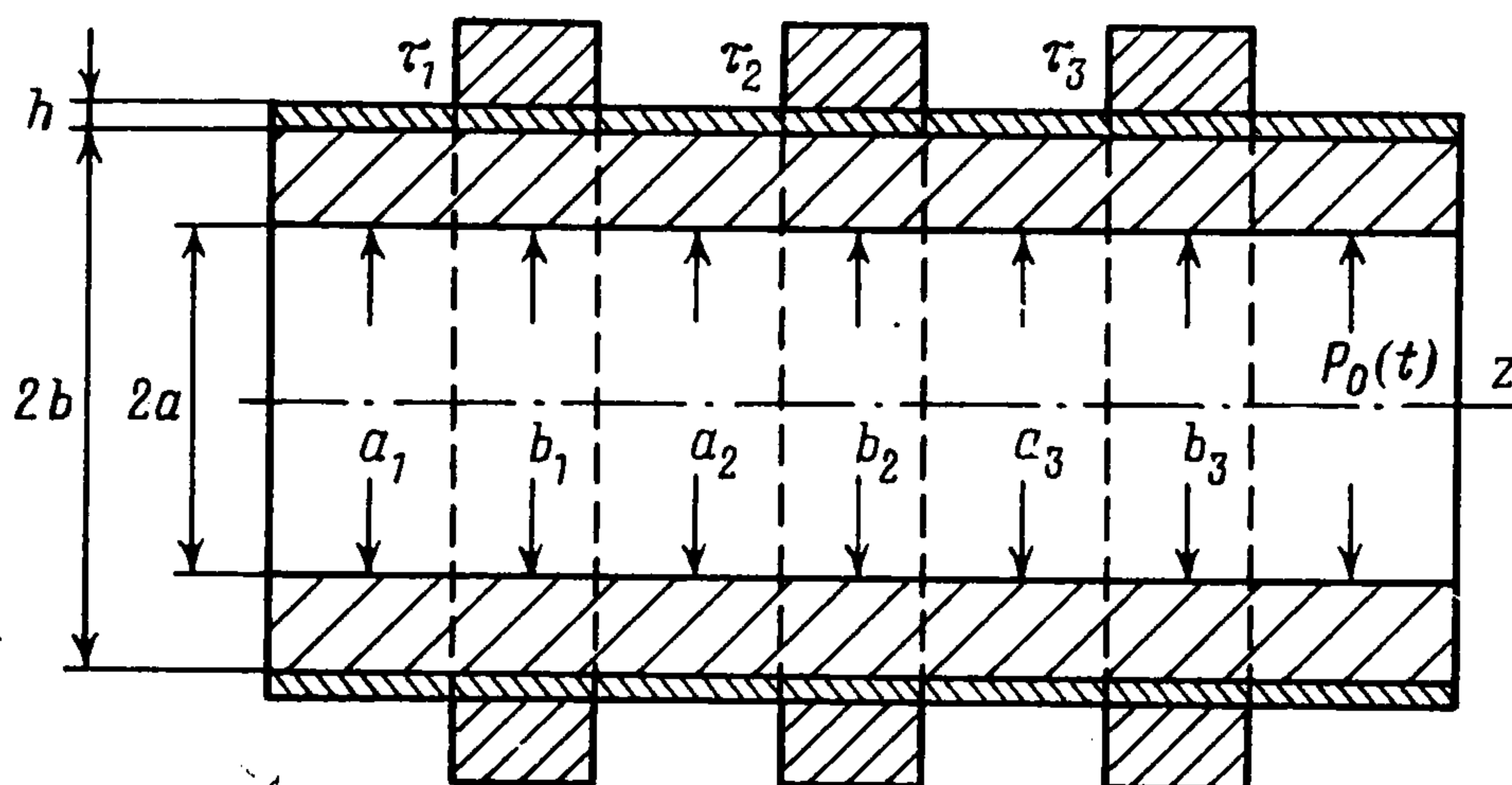
© 1991 г.

А. В. Манжиров, В. А. Черныш

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДИСКРЕТНОГО НАРАЩИВАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТАРЕЮЩЕГО ЦИЛИНДРА СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ВТУЛОК

Рассматривается осесимметричная контактная задача взаимодействия неоднородного стареющего вязкоупругого цилиндрического тела с произвольной конечной системой наращиваемых жестких элементов. Учитывается неодновременность установки или снятия втулок, диктуемая, например, особенностями монтажа инженерных конструкций, а также свойства возрастной и конструкционной неоднородностей самого деформируемого тела, обусловленные процессами изготовления или возведения реальных объектов. Дается постановка задачи и система ее разрешающих двумерных интегральных уравнений. Строится решение системы. Проводится численный анализ ряда конкретных процессов, причем исследуются закономерности как индивидуального, так и совместного влияния основных факторов на характеристики контактного взаимодействия.

1. Постановка и разрешающие уравнения контактной задачи. Исследуем процесс последовательной установки жестких втулок на двухслойный полый цилиндр, слой которого изготовлены из разных вязкоупругих стареющих материалов в разные моменты времени [1, 2]. Будем также учитывать возможность снятия некоторых втулок. Пусть каждая i -я втулка насаживается без трения на участок цилиндра $a_i \leq z \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Натяг i -й втулки δ_i^0 , профиль ее внутренней поверхности $g_i [z - (a_i + b_i)/2]$, момент установки τ_i , момент снятия τ_i^0 . Внешний слой цилиндра, непосредственно контактирующий с втулками, изготовлен в момент времени τ_1^* и имеет толщину h . Внутренний слой изготовлен в момент времени τ_2^* , его геометрические размеры характеризуются величинами радиусов a и b ($a < b$). Предполагается, что $b_i - a_i \gg h$, $b \gg h$ и, кроме того, податливости элементов внешнего, относительно тонкого слоя и элементов внутреннего слоя произвольной толщины имеют один порядок или внешний слой более податлив [3, 4]. Между слоями



Фиг. 1

осуществляется гладкий контакт. Внутренняя поверхность двухслойного цилиндра подвергается воздействию равномерного давления $P_0(t)$ [5], подаваемого в момент времени $\tau_0 \geq \max[\tau_1^*, \tau_2^*]$ (фиг. 1) либо в цилиндре

с самого начала устанавливается жесткая вставка, создающая условия гладкого или идеального контакта. Считается, что расстояние между втулками и торцами цилиндра достаточно велико, а сами торцы закрыты жесткими заглушками, устраняющими их осевое перемещение.

Рассмотрим первый из вариантов постановки задачи, когда в процессе наращивания цилиндра жесткими втулками в него подается некоторое изменяющееся с течением времени давление $P_0(t)$. На основании [5] получим систему двумерных интегральных уравнений, описывающую процесс последовательной установки (снятия) жестких элементов, в следующей форме (см. также [2]):

$$\begin{aligned} & (1 - \nu_1^2) h (I - L_1(\tau_i, t)) q_i(z, t) / E_1^0(t) + \\ & + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (I - L_2(\tau_1, t)) \sum_{j=1}^n \sum_{a_j}^b \frac{q_j(\xi, t)}{E_2^0(t)} k^0(z, \xi) d\xi = \\ & = \delta_i^0 - g_i [z - (a_i + b_i)/2] + H(t - \tau_0) (I - L_1(\tau_0, t)) \times \\ & \times (I + N_3(\tau_0, t)) \theta_1^i(t) (I - L_2(\tau_0, t)) P_0(t) / E_2^0(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\tau_i^0 < t < \tau_i: q_i(z, t) = 0, \delta_i^0 = 0, \theta_1^i(t) = 0, g_i [z - (a_i + b_i)/2] = 0$$

$$E_k^0(t) = E_k(t - \tau_k^*), \quad C_k^0(t, \tau) = C_k(t - \tau_k^*, \tau - \tau_k^*),$$

$$K_0^{(k)}(t, \tau) = K^{(k)}(t - \tau_k^*, \tau - \tau_k^*)$$

$$L_k(s, t) \varphi(t) = \int_s^t \varphi(\tau) K_0^{(k)}(t, \tau) d\tau, \quad N_3(\tau_0, t) \varphi(t) = \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau) R_3(t, \tau) d\tau$$

$$K^{(k)}(t, \tau) = E_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C_k(t, \tau) \right]$$

$$\theta_1(t) = d_1 \theta(t), \quad \theta(t) = [d_2 E_1^0(t) / E_2^0(t) - d_3]^{-1}$$

$$d_1 = 2(1 - \nu_1)(h + b)^{-1}(1 + \nu_2)[(1 - 2\nu_2)b - a^2 b^2 (b^2 - a^2)^{-1} d_4]$$

$$d_2 = (1 + \nu_1)^{-1} [(b + h)^{-2} - b^{-2}] (1 + \nu_2) a^2 b^2 (b^2 - a^2)^{-1} d_4$$

$$d_3 = (1 - 2\nu_1)(b + h)^{-2} b + b^{-1}, \quad d_4 = (1 - 2\nu_2) b a^{-2} + b^{-1}$$

$$K_3(t, \tau) = [d_2 K_0^{(2)}(t, \tau) E_1^0(\tau) / E_2^0(\tau) - d_3 K_0^{(1)}(t, \tau)] \theta(t)$$

$$k^0(z, \xi) = \int_0^\infty \frac{L[(b-a)\alpha]}{\alpha} \cos \alpha (z - \xi) d\alpha \quad (1.2)$$

$$L[(b-a)\alpha] = \alpha [\alpha^2 a A_{01}^2 - a^0 A_{11}^2 - a^{-1}] S_1^{-1} \quad (1.3)$$

$$S_1 = a^0 b^{-1} + b^0 a^{-1} + a^0 b^0 A_{11}^2 - b^0 \alpha^2 a A_{01}^2 + \\ + \alpha^4 a b A_{00}^2 - a^0 b \alpha^2 A_{10}^2$$

$$A_{ij} = I_i(\alpha a) K_j(\alpha b) - (-1)^{i+j} I_j(\alpha b) K_i(\alpha a)$$

где $q_i(z, t)$ — контактные напряжения под i -й втулкой, $K^{(k)}(t, \tau)$, $C_k(t, \tau)$, $E_k(t)$ и ν_k — ядра ползучести, меры ползучести, модули упругомгновенной деформации и постоянные коэффициенты Пуассона соответственно материалов внешнего ($k=1$) и внутреннего ($k=2$) слоев; $R_3(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_3(t, \tau)$, $H(t)$ — функция Хевисайда; $I_m(\alpha)$, $K_m(\alpha)$ ($m=0, 1$) — функции Бесселя мнимого аргумента. Наличие внутреннего давления в цилиндре учитывается последним слагаемым в правой части системы уравнений (1.1).

Системы интегральных уравнений еще двух вариантов постановки задачи (с жесткой вставкой) можно получить, положив в (1.1) $P_0(t) = 0$ и взяв соответствующие выражения для ядра контактной задачи $k^0(z, \xi)$.

При этом общий вид формулы (1.2) сохраняется, а соотношение (1.3) изменяется. Так, для жесткой вставки¹ при условиях гладкого контакта

$$L[(b-a)\alpha] = \alpha A_{11}^2 S_2^{-1}, \quad S_2 = \alpha^2 b A_{10}^2 - b^\circ A_{11}^2 - b^{-1}$$

а при условиях сцепления

$$\begin{aligned} L[(b-a)\alpha] &= [a^{-1} + 4(1-\nu_2)\alpha A_{01}A_{11} - a\alpha^2(A_{01}^2 - A_{11}^2)]S_3^{-1} \\ S_3 &= 8(1-\nu_2^2)\alpha(A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10}) + ab^\circ\alpha(A_{01}^2 - A_{11}^2) + \\ &+ ab\alpha^3(A_{10}^2 - A_{00}^2) - 4(1-\nu_2)(b\alpha^2 A_{00}A_{10} + b^\circ A_{01}A_{11}) + \\ &+ 2(1-\nu_2)(1-2\nu_2)\alpha^{-1}a^{-1}b^{-1} - (ab^{-1} + ba^{-1})\alpha \end{aligned}$$

Заметим, что свойства ядер рассматриваемых контактных задач и ядер плоских контактных задач [3, 6] сходны. В частности, $L(\alpha)\alpha^{-1} > 0$ ($|\alpha| < \infty$). В отношении ядер ползучести $K^{(k)}(t, \tau)$ предполагается, что они непрерывны либо слабо сингулярны.

2. Решение основной системы уравнений. Сделаем в системе уравнений (1.1) замену переменных по формулам

$$z^* = (2z - a_i - b_i)/(b_i - a_i) \quad (a_i \leq z \leq b_i)$$

$$\xi^* = (2\xi - a_i - b_i)/(b_i - a_i) \quad (a_i \leq \xi \leq b_i)$$

$$t^* = t\tau_1^{-1}, \quad \tau^* = \tau\tau_1^{-1}, \quad \tau_i^* = \tau_i\tau_1^{-1}, \quad [\tau_i^\circ]^* = \tau_i^\circ\tau_1^{-1}$$

$$[\tau_k^*]^* = \tau_k^*\tau_1^{-1} \quad (k = 1, 2), \quad \tau_0^* = \tau_0\tau_1^{-1}, \quad u = (b-a)\alpha$$

$$\frac{2(b-a)}{b_1-a_1} = \lambda, \quad \frac{a_j+b_j}{b_1-a_1} = \eta_j, \quad \frac{b_j-a_j}{b_1-a_1} = \zeta_j$$

$$k^{ij}(z^*, \xi^*) = \frac{\sqrt{\zeta_i\zeta_j}}{\pi} k\left(\frac{\zeta_i z^* + \eta_i - \zeta_j \xi^* - \eta_j}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\zeta_i\zeta_j}}{\pi} k\left(\frac{z-\xi}{b-a}\right)$$

$$k\left(\frac{z-\xi}{b-a}\right) = k^\circ(z, \xi), \quad k(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos su \, du, \quad \mathbf{I}^* = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} q^i(z^*, t^*) &= 2q_i(z, t)(1-\nu_2^2)\sqrt{\zeta_i/E_2^\circ(t)}, \quad g^i(z^*) = 2g_i[z - \\ &- (a_i + b_i)/2]\sqrt{\zeta_i}(b_1 - a_1)^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$P_0^i(t^*) = 2P_0(t)(1-\nu_2^2)\sqrt{\zeta_i/E_2^\circ(t)}, \quad \theta_0^i(t^*) = \theta_1^i(t)(1 - \nu_2^2)^{-1}(b_1 - a_1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} c(t^*) &= (1-\nu_1^2)E_2^\circ(t)h[(1-\nu_2^2)E_1^\circ(b_1 - a_1)]^{-1}, \quad R_3^*(t^*, \tau^*) = \\ &= R_3(t, \tau)\tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0(t^*, \tau^*) &= K_0^{(1)}(t, \tau)\tau_1, \quad K_1(t^*, \tau^*) = [E_1^\circ(t)/E_1^\circ(\tau)] \times \\ &\times K_0^{(1)}(t, \tau)\tau_1 [E_2^\circ(\tau)/E_2^\circ(t)] \end{aligned}$$

$$K_2(t^*, \tau^*) = K_0^{(2)}(t, \tau)\tau_1, \quad \delta^i = 2\delta_i^\circ\sqrt{\zeta_i}(b_1 - a_1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} L_m^*(s, t)f(t) &= \int_s^t f(\tau)K_m(t, \tau)d\tau \quad (m = 0, 1, 2) \quad N^*(s, t)f(t) = \\ &= \int_s^t f(\tau)R_3^*(t, \tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^i(z^*, t^*) &= \delta^i - g^i(z^*) + H(t^* - \tau_0^*)(\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_0^*(\tau_0^*, t^*)) \times \\ &\times (\mathbf{I}^* + \mathbf{N}^*(\tau_0^*, t^*))\theta_0^i(t^*)(\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*(\tau_0^*, t^*))P_0^i(t^*), \quad |z^*| \leq 1, \\ &|\xi^*| \leq 1 \end{aligned}$$

¹ Черныш В. А. О действии нормальных и касательных нагрузок на одно- и многослойные полые круговые цилиндры // Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1988. 40 с.— Деп. в ВИНТИ 31.08.88, № 6784-В88.

и, опуская звездочки в обозначениях для всех величин за исключением операторов, будем иметь следующую систему уравнений:

$$c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^* (\tau_1, t)) q^i(z, t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^* (1, t)) \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^* q^j(z, t) = f^i(z, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{A}_{ij}^* v(z) = \int_{-1}^1 k^i(z, \xi) v(\xi) d\xi$$

$$\tau_i^0 < t < \tau_i: q^i(z, t) = 0, f^i(z, t) = 0$$

Соотношения (2.2) задают пошаговый процесс решения контактных задач для цилиндрических тел и могут быть на каждом шаге приведены к одному операторному уравнению в функциональном векторном пространстве (по верхним повторяющимся индексам проводится суммирование, причем они пробегают все целочисленные значения от 1 до n) [2, 7]:

$$c(t) (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*) \mathbf{q}(z, t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*) \mathbf{A}^* \mathbf{q}(z, t) = \boldsymbol{\kappa}(z, t) \\ (|z| \leq 1, t \in [\tau_r, \tau_{r+1}])$$

$$\mathbf{L}_k^* = \mathbf{L}_k^* (\tau_r, t) \quad (k = 1, 2), \quad \mathbf{q}(z, t) = q^i(z, t) \mathbf{i}^i \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(z, t) = \kappa^i(z, t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{A}^* \mathbf{a}(z) = (\mathbf{K}(z, \xi), \mathbf{a}(\xi)) =$$

$$= \int_{-1}^1 \mathbf{K}(z, \xi) \cdot \mathbf{a}(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 k^{ij}(z, \xi) a^j(\xi) \mathbf{i}^i d\xi$$

$$\mathbf{K}(z, \xi) = k^{ij}(z, \xi) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{K}(z, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, z), \quad \mathbf{a}(\xi) = a^i(\xi) \mathbf{i}^i$$

где $\mathbf{q}(z, t)$ — непрерывная по t вектор-функция контактных давлений со значениями из $L_2([-1, 1], V)$ ($L_2([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых интегрируемы с квадратом на отрезке $[-1, 1]$), $\mathbf{K}(z, \xi) \in L_2([-1, 1], V)$ ($L_2([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство тензор-функций двух переменных, компоненты которых интегрируемы со своей второй степенью в квадрате $\{|z| \leq 1, |\xi| \leq 1\}$), \mathbf{i}^k — ортонормированный алгебраический векторный базис n -мерного евклидова пространства V , $\boldsymbol{\kappa}(z, t)$ — непрерывная по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функция, учитывающая натяг втулок, профиль их внутренней поверхности, влияние подаваемого давления, а также искажение поверхности цилиндра за счет ползучести материала (более подробно структура $\boldsymbol{\kappa}(z, t)$ будет рассмотрена далее на конкретном примере).

На основании [2] можно утверждать, что оператор \mathbf{A}^* вполне непрерывный и самосопряженный из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$. Положительная определенность \mathbf{A}^* может быть установлена на основании определения положительной определенности оператора с учетом того, что $L(u) u^{-1} > 0$ ($|u| < \infty$) и равенства нулю почти всюду функции, преобразование Фурье которой тождественно равно нулю [8].

Для построения решения уравнения (2.3) воспользуемся следующими разложениями:

$$\mathbf{q}(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(z), \quad \boldsymbol{\kappa}(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(z) \quad (2.4)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_i(z)$ — ортонормированные собственные вектор-функции оператора \mathbf{A}^* , соответствующие его собственным числам α_i^0 , т. е.

$$\mathbf{A}^* \boldsymbol{\varphi}_i(z) = \alpha_i^0 \boldsymbol{\varphi}_i(z) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

Подставляя ряды (2.4) в уравнение (2.3), при учете спектрального соотношения (2.5) после ряда преобразований будем иметь:

$$\omega_i(t) = (\mathbf{I}^* + \mathbf{N}_i^*) \Omega_i(t), \quad \Omega_i(t) = \kappa_i(t) [\alpha_i^\circ + c(t)]^{-1},$$

$$\mathbf{N}_k^* f(t) = \int_{\tau_r}^t f(\tau) R_k^\circ(t, \tau) d\tau \quad (t \in [\tau_r, \tau_{r+1}])$$
(2.6)

где $R_k^\circ(t, \tau)$ — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau) = [c(t) K_1(t, \tau) + \alpha_k^\circ K_2(t, \tau)] [c(t) + \alpha_k^\circ]^{-1}$$

Остановимся теперь на алгоритме построения собственных чисел и вектор-функций оператора \mathbf{A}^* . Представим ядро оператора \mathbf{A}^* и собственные вектор-функции в виде [2]

$$\mathbf{K}(z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} \mathbf{p}_m^i(z) \mathbf{p}_n^j(\xi)$$

$$\varphi_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k(p)}^l \mathbf{p}_k^l(z) \quad (p = 0, 1, \dots)$$
(2.7)

$$(\mathbf{p}_k^i(z), \mathbf{p}_n^j(z)) = \delta_{ij} \delta_{kn}, \quad \mathbf{p}_k^i(z) = P_k^*(z) \mathbf{i}^i$$

где $\mathbf{p}_k^i(z)$ ($k = 0, 1, \dots$) — базис $L_2([-1, 1], V)$, δ_{mn} — символ Кронекера, $P_k^*(z)$ — некоторый базис $L_2[-1, 1]$.

Подставляя (2.7) в (2.5), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения собственных чисел оператора \mathbf{A}^* и коэффициентов разложения его собственных функций в ряд по базису $L_2([-1, 1], V)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^{ij} a_n^j(p) = \alpha_p^\circ a_m^i(p) \quad (m = 0, \dots, i = 1, \dots, n)$$
(2.8)

Здесь отметим только, что матрица системы (2.8) симметрична, поскольку из $\mathbf{K}(z, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, z)$ следует $r_{mn}^{ij} = r_{nm}^{ji}$, а для самих r_{mn}^{ij} справедлива формула (базисом $L_2[-1, 1]$ выбрана система ортонормированных полиномов Лежандра):

$$r_{mn}^{ij} = \begin{cases} (-1)^{(m+n-l)/2} R_{mn}^{ij} & (m \text{ и } n \text{ — четные : } l = 0; \\ & m \text{ и } n \text{ — нечетные : } l = 2) \\ (-1)^{(m+n-k)/2} \rho_{mn}^{ij} & (m \text{ — четное, } n \text{ — нечетное : } k = 1; \\ & m \text{ — нечетное, } n \text{ — четное : } k = -1) \end{cases}$$

$$R_{mn}^{ij} = \int_0^\infty f_{mn}^{ij}(u) \cos[(\eta_i - \eta_j) u \lambda^{-1}] du, \quad \rho_{mn}^{ij} = \int_0^\infty f_{mn}^{ij}(u) \times \\ \times \sin[(\eta_i - \eta_j) u \lambda^{-1}] du$$

$$f_{mn}^{ij} = [(2m+1)(2n+1)]^{1/2} \lambda L(u) u^{-2} J_{m+1/2}(\zeta_i u \lambda^{-1}) \times \\ \times J_{n+1/2}(\zeta_j u \lambda^{-1})$$

Рассмотрим конкретный процесс последовательного усиления двухслойного цилиндра системой жестких втулок. Будем считать, что моменты установки любых двух втулок системы различны, т. е. устанавливается первая втулка, затем вторая и т. д. На интервале времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$ будем иметь уравнение (2.3), где $i = j = 1$, $r = 1$, $\kappa(z, t) = f^1(z, t) \mathbf{i}^1$. Фактически, получим одно интегральное уравнение с известной правой частью. После установки второй втулки операторное уравнение (2.3) будет эквивалентно уже системе двух уравнений ($i = j = 1, 2$; $r = 2$), при-

чем его правая часть будет содержать информацию о напряженно-деформированном состоянии тела, полученную на предыдущем шаге

$$\begin{aligned} \kappa^1(z, t) &= f^1(z, t) + c(t) L_1^{*t}(\tau_1, \tau_2) q^1(z, t) + \\ &\quad + L_2^{*t}(\tau_1, \tau_2) A_{11}^{*t} q^1(z, t) \\ \kappa^2(z, t) &= f^2(z, t) + L_2^{*t}(\tau_1, \tau_2) A_{21}^{*t} q^1(z, t) \\ L_l^{*t}(\tau_1, \tau_2) w(t) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} w(\tau) K_l(t, \tau) d\tau \quad (l = 1, 2) \end{aligned}$$

где следующие за $f^i(z, t)$ ($i = 1, 2$) слагаемые определяют искажение поверхности цилиндра за счет ползучести его материала. Установка третьей втулки приведет к необходимости исследования операторного уравнения, эквивалентного системе трех двумерных интегральных уравнений и т. д.

В случае, когда все элементы деформируемого цилиндра изготовлены из одного материала ($L_1 = L_2 = L$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $E_1 = E_2 = E$) в один и тот же момент времени ($\tau_1^* = \tau_2^*$), а все втулки устанавливаются одновременно (см. (1.1)), можно сформулировать следующие утверждения:

1) в задаче о воздействии на внутреннюю поверхность цилиндра равномерного давления при условии, что натяг всех втулок равен нулю, и профили их внутренней поверхности описываются функциями, тождественно равными нулю, ползучесть не оказывает влияния на напряженное состояние тела, и оно совпадает с упругим;

2) в контактных задачах с жесткой вставкой решение может быть получено при помощи решения упругомгновенной задачи, на которое следует подействовать оператором $E(t)(I + N)E^{-1}(t)$, где $(I + N) = (I - L)^{-1}$.

3. Примеры. Рассмотрим двухслойную трубу высокого давления, слои которой изготовлены в разные моменты времени из бетона с постоянными упругими характеристиками E , ν и мерой ползучести в виде [9]

$$C(t, \tau) = (C_0 + Ae^{-\beta\tau})(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad (3.1)$$

Положим $C_0E = 0,552$, $AE = 4$, $\nu = 0,1$, $\beta = 0,031$ сут⁻¹, $\gamma = 0,06$ сут⁻¹ [5], и в соответствии с заменой переменных (2.1) зададимся следующими значениями параметров:

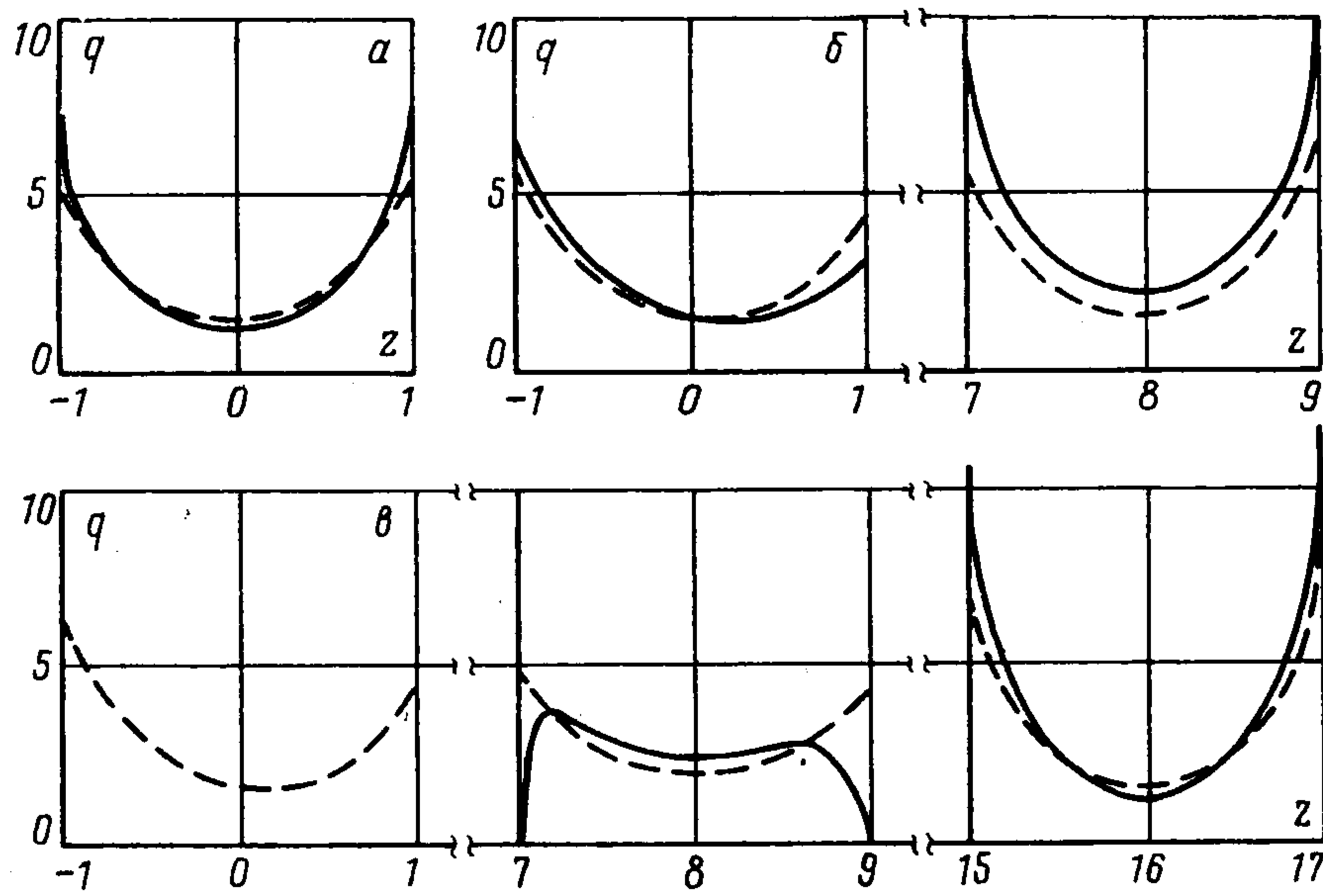
$$\begin{aligned} h/(b_i - a_i) &= 0,15, \quad b/(b_i - a_i) = 5, \quad a/b = 0,8, \quad c(t) = 0,15 \\ \theta_0^i(t) &= 15,66, \quad P_0^i(t) = \sqrt{\zeta_i}, \quad g^i(z) = 0, \quad \delta^i = 0 \\ \zeta_i &= 1, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 8, \quad \eta_3 = 16 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

т. е. втулки одинаковой ширины с плоскими профилями внутренней поверхности устанавливаются на трубу без натяга на одном и том же расстоянии друг от друга, равном трем размерам ширины втулок.

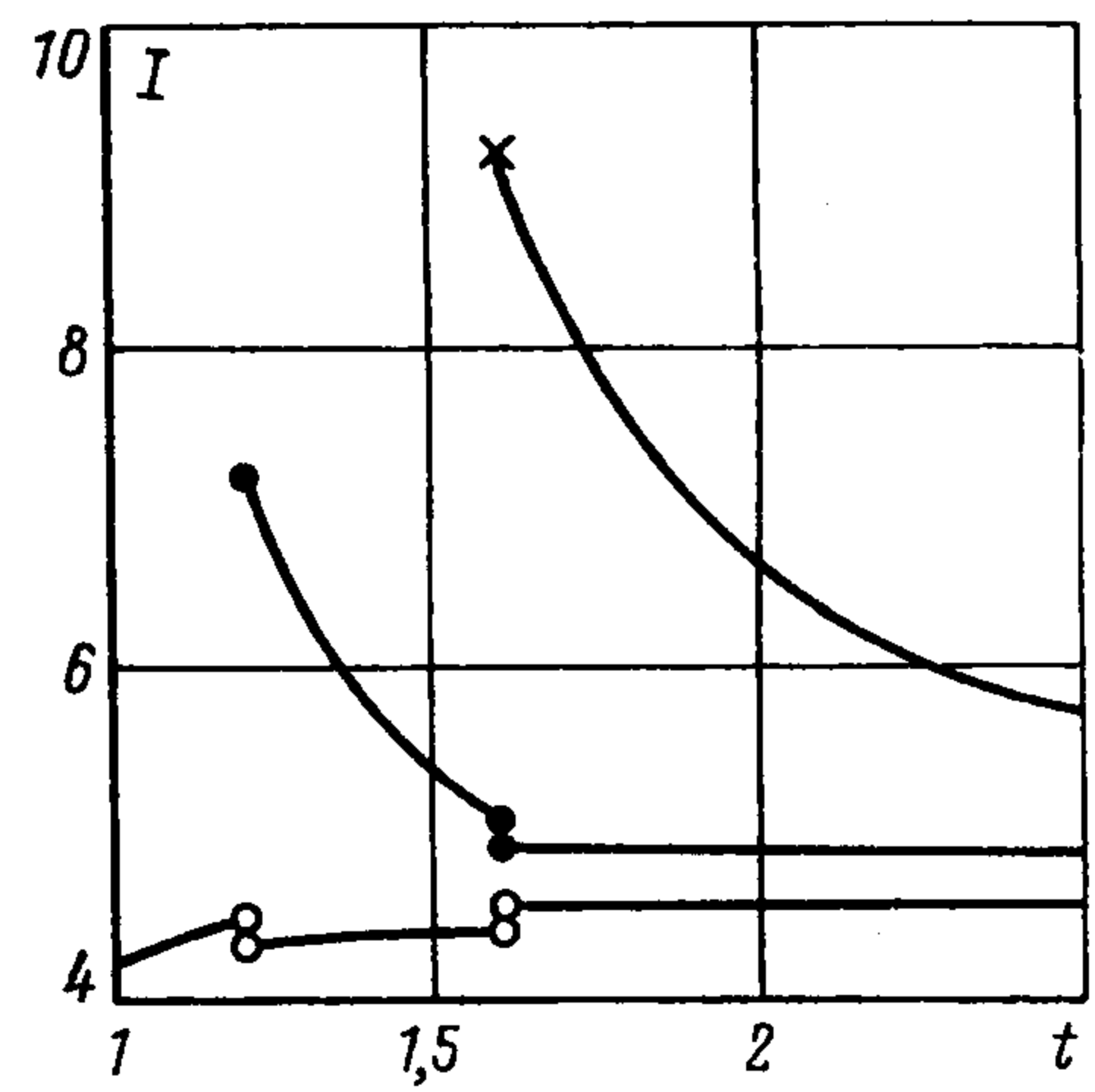
Будем считать, что внутренний слой цилиндра изготовлен в нулевой момент времени, а внешний — через 50 суток. Давление подается еще через 15 суток и одновременно устанавливается первая втулка. Вторая и третья усиливающие втулки устанавливаются через 13 и 39 суток соответственно после первой. Для заданного процесса наращивания цилиндра втулками безразмерные характеристики определяющих временных параметров принимают значения $\tau_0 = \tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1,2$, $\tau_3 = 1,6$, $\tau_1^* = 0,77$, $\tau_2^* = 0$.

На графиках, приводимых ниже, обозначим распределение контактных напряжений в момент установки очередной втулки сплошными линиями и те же распределения непосредственно перед установкой следующей втулки штриховыми линиями. Приведем также изменения интегральных характеристик

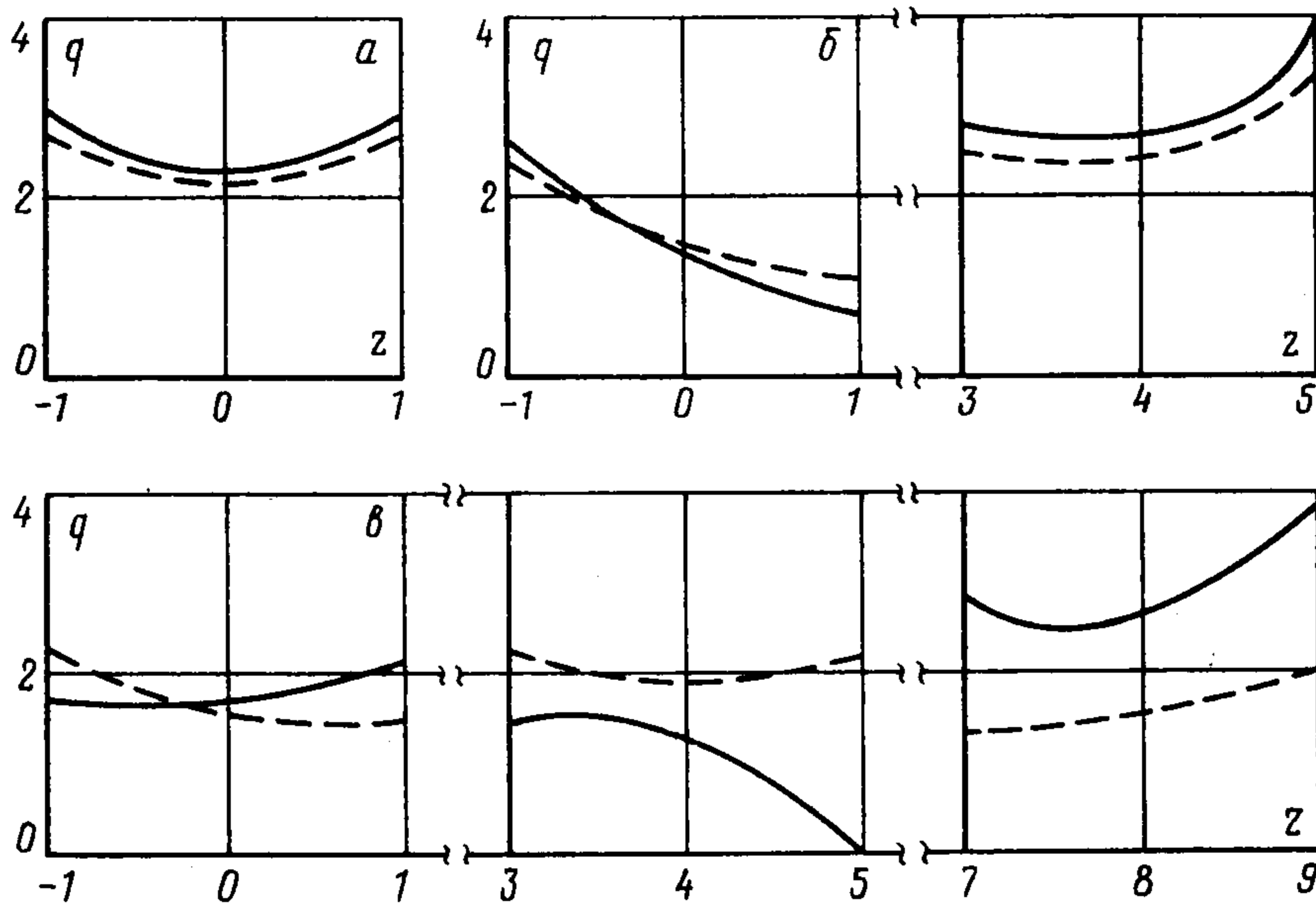
$$I_i(t) = \int_{-1}^1 q^i(z, t) dz$$



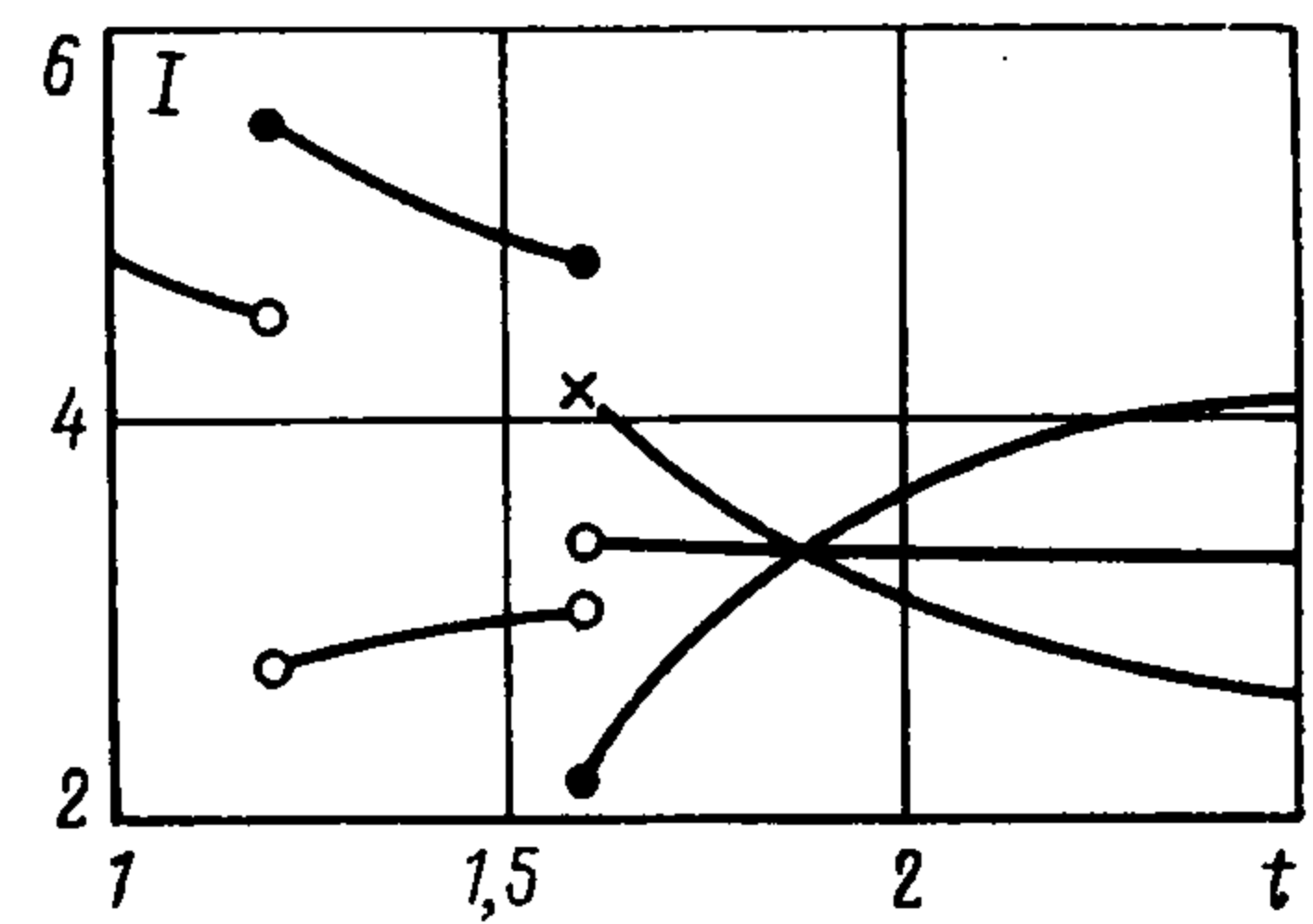
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

причем кривые на графиках для первой, второй и третьей втулок пометим соответственно светлыми точками, темными точками и крестиками.

На фиг. 2 даны указанные распределения контактных напряжений под одной (а), двумя (б) и тремя втулками (в). Штриховые кривые на фиг. 2, в соответствуют предельным распределениям при $t \rightarrow \infty$. Здесь отметим только принципиальное отличие данных распределений контактных напряжений от распределений, возникающих при одновременной установке всех втулок (последние не приводятся из-за ограничений на объем графического материала), в особенности под центральной втулкой.

Кривые изменения интегральных характеристик контактных напряжений по времени (фиг. 3) позволяют судить об интенсивности релаксационных процессов.

Рассмотрим еще один пример. Предположим, что внутренний слой трубы изготовлен из стали с модулем Юнга E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 . Он покрыт слоем вязкоупругого стареющего поливинилхлорида [10] с упругими характеристиками E_1 , ν_1 и мерой ползучести в форме (3.1). На основании экспериментальных данных для поливинилхлорида [10] и стандартных характеристик для стали будем иметь

$$C_0 E_1 = 0,181, A E_1 = 0,488, \nu_1 = 0,354, \nu_2 = 0,3$$

$$\beta = 0,012 \text{ сут}^{-1}, \gamma = 0,315 \text{ сут}^{-1}, E_1 E_2^{-1} = 0,016$$

Возьмем следующие значения безразмерных величин:

$$h/(b_i - a_i) = 0,05, b/(b_i - a_i) = 5, a/b = 0,8$$

$$c(t) = 2,81, \theta_0^i = 24,48, P_0^i(t) = \sqrt{\zeta_i}, g^i(z) = 0$$

$$\zeta_i = 1, \eta_1 = 0, \eta_2 = 4, \eta_3 = 8 \quad (i = 1, 2, 3)$$

т. е. в отличие от ранее рассмотренного примера расстояние между втулками сокращается втрое, а их натяг пока не определен.

Будем считать, что внешний слой изготовлен в нулевой момент времени. Через 15 суток после начала отсчета времени на стальной цилиндр, покрытый полимером, надевается первая втулка и подается давление. Еще через 3 и 9 суток устанавливаются вторая и третья втулки. Таким образом, безразмерные характеристики определяющих временных параметров принимают прежние значения (τ_2^* не определяется, поскольку внутренний слой упругий). Для идентификации кривых на графиках воспользуемся обозначениями из первого примера.!

На фиг. 4, а показаны распределения напряжений под первой втулкой, установленной без натяга ($\delta^1 = 0$) в момент времени $\tau_1 = \tau_0 = 1$. Видно, что процесс релаксации напряжений для выбранной конструктивно неоднородной трубы существенно проявляется сразу после установки первой втулки. Расчеты показали, что в случае установки всех втулок без натяга в выбранные моменты времени при заданном расстоянии между ними в момент установки третьей втулки происходит отслаивание под второй. Поэтому второй втулке был дан натяг.

На фиг. 4, б приведены распределения напряжений под двумя втулками, причем $\tau_2 = 1, 2$, $\delta^2 = 7,1$.

При установке третьей втулки в момент $\tau_3 = 1,6$ ее натяг выбирался так, чтобы интегральные характеристики напряжений под всеми втулками были близки. Такой натяг оказался отрицательным, т. е. $\delta^3 = -3,8$. Комментарии к фиг. 4, в и фиг. 5 достаточно очевидны.!

В заключение следует отметить, что процесс последовательной установки втулок на вязкоупругом цилиндре приводит к качественно новым явлениям в поведении характеристик контактного взаимодействия, не проявляющимся при одновременном присоединении к телу системы усиливающих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. Манжиров А. В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670—685.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
4. Авилякин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В. О выводе уточненных уравнений тонких покрытий и приложении их к контактным задачам теории упругости // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: ДГУ, 1983, С. 81—93.
5. Манжиров А. В., Черныш В. А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 112—118.
6. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. Манжиров А. В. О некоторых постановках и решениях контактных задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139—151.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
9. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
10. Struik L. C. E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.