УДК 539.3

Ю. А. Антипов, Н. Х. Арутюнян

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Предлагается построение точного замкнутого решения плоской контактной задачи для полубесконечного штампа, когда загружается свободная граница полуплоскости (задача 1), или аналитического решения с любой наперед заданной точностью задачи для конечного штампа, вдавливаемого в упругую полуплоскость под действием центрально приложенной вертикальной силы P (задача 2), или под действием указанной силы P, горизонтальной T и пары сил с моментом M (задача 3). Во всех трех случаях область контакта разбивается на зоны сцепления и трения, а профиль штампа считается плоским. Введение зон кулоновского трения для формулировки задачи о вдавливании штампа, не сцепленного полностью со средой, предложено в [1]. Для плоской задачи о составной упругой плоскости изучены [2] условия устранения особенности напряжений в окрестности точки перехода от зоны проскальзывания (учитывается кинетическое трение) к расслоению, от участка сцепления к проскальзыванию. Для того чтобы применение критерия Ирвина стало возможным для задачи о расслоении разнородных материалов, в зоне проскальзывания выделялся участок, на котором задавались касательные напряжения [3].

Было построено [1] приближенное решение задачи 2 при помощи конформного отображения. Этот метод распространен [4] на решение задачи о вдавливании штампа под действием эксцентрично приложенной силы. Ниже предлагается другой подход, основанный на сведении указанных задач к векторной задаче Римана для одной, двух или трех пар функций (соответственно для задач 1, 2 или 3), для решения которой развивается метод [5]. Найдены неизвестные заранее границы зон сцепления и трения. Построены формулы для контактных напряжений с явно выделенными степенными особенностями.

1. Задача о полубесконечном штампе. Рассмотрим упругую полуплоскость ($0 < r < \infty$, $-\pi < \theta < 0$), коэффициент Пуассона которой ν, а модуль упругости E. К части границы полуплоскости ($0 < r < \infty$, $\theta = -\pi$) приложены напряжения $\sigma_\theta = f_1(r)$, $\tau_{r\theta} = f_2(r)$. При $\theta = 0$ полуплоскость контактирует с полубесконечным штампом. Область контакта разбивается на зону сцепления ($b < r < \infty$): $u_\theta = \delta_n$, $u_r = \delta_t$ (δ_n, δ_t — нормальные и касательные смещения штампа) и зону кулоновского трения ($0 < r < b$): $\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta = 0$, $u_\theta = \delta_n$ (μ — коэффициент трения). На участке сцепления касательные напряжения недостаточны для того, чтобы вызвать проскальзывание: $\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta < 0$ ($b < r < \infty$, $\theta = 0$). Нормальное контактное давление под штампом должно быть всюду положительным: $\sigma_\theta > 0$ ($0 < r < \infty$, $\theta = 0$).

Введем пару неизвестных функций

$$\chi(r) = (\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta)_{\theta=0}, \quad \psi(r) = (1+\nu)^{-1} E\partial u_r / \partial r\,|_{\theta=0}, \quad 0 < r < \infty$$

причем $\operatorname{supp}\chi(r) \subset [b, \infty)$, $\operatorname{supp}\psi(r) \subset [0, b]$, и применим преобразование Меллина

$$\|\sigma_{\theta s}, \tau_{r\theta s}, \eta_{rs}, \eta_{\theta s}\| = \int_0^\infty \left\| \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\| r^s\, dr \qquad (1.1)$$

к уравнениям статики, условиям сплошности и физическим уравнениям. Тогда (случай плоской деформации)

$$\sigma_{\theta s}^{IV} + 2(s^2+1)\sigma_{\theta s}'' + (s^2-1)^2\sigma_{\theta s} = 0, \quad -\pi < \theta < 0, \tag{1.2}$$

$$(s-1)\tau_{r\theta s} = \sigma_{\theta s}', \quad s(s-1)\eta_{rs} = \nu_*[(1-\nu)\sigma_{\theta s}'' +$$
$$+ (\nu s + 1 - \nu)(s-1)\sigma_{\theta s}]$$
$$s(s^2-1)\eta_{\theta s} = \nu_*[(1-\nu)\sigma_{\theta s}''' + (2s^2 - \nu s^2 + 2\nu s - s + 1 - \nu)\sigma_{\theta s}']$$
$$(\nu_* = (1+\nu)E^{-1}).$$

Потребовав от решения уравнения (1.2) удовлетворения граничным условиям

$$[(s-1)^{-1}\sigma_{\theta s}' - \mu\sigma_{\theta s}]_{\theta=0} = b^{s+1}\Phi^+(s)$$
$$[(1-\nu)\sigma_{\theta s}'' - (\nu s + 1 - \nu)(s-1)\sigma_{\theta s}]_{\theta=0} = s(s-1)b^{s+1}\Phi^-(s)$$
$$[(1-\nu)\sigma_{\theta s}''' + (2s^2 - \nu s^2 + 2\nu s - s + 1 - \nu)\sigma_{\theta s}']_{\theta=0} = 0$$
$$\sigma_{\theta s}|_{\theta=-\pi} = f_{1s}, \quad \sigma_{\theta s}'|_{\theta=-\pi} = (s-1)f_{2s}$$
$$\Phi^+(s) = \int_1^\infty \chi(br)r^s\,dr, \quad \Phi^-(s) = \int_0^1 \psi(br)r^s\,dr, \quad f_{js} = \int_0^\infty f_j(r)r^s\,dr$$

приходим к задаче Римана

$$\Phi^+(s) = G(s)\Phi^-(s) + g(s), \quad s \in \Gamma:\ \mathrm{Re}(s) = \gamma_0 \tag{1.3}$$

$$G(s) = 4\delta_0^{-1}(s)\sin\pi s(\varkappa_+\cos\pi s - \mu\varkappa_-\sin\pi s), \quad \varkappa_\pm = {}^1/_2(\varkappa \pm 1) \tag{1.4}$$
$$g(s) = 4\varkappa_+ b^{-s-1}\delta_0^{-1}(s)\sin\pi s[(\varkappa_- + \mu\varkappa_+\operatorname{ctg}\pi s)f_{1s} + (\mu\varkappa_- - \varkappa_+\operatorname{ctg}\pi s)f_{2s}]$$
$$\varkappa = 3 - 4\nu, \quad \delta_0(s) = 1 + 2\varkappa\cos 2\pi s + \varkappa^2$$

относительно пары функций $\Phi^\pm(s)$, аналитических в $D^\pm$: $\mathrm{Re}(s) \lessgtr \gamma_0 \in (-\varepsilon, 0)$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Представим функцию $G(s)$ в виде

$$G(s) = \varkappa_\alpha \sin\pi s \sin\pi(\alpha - s)\sec\pi(s + i\beta)\sec\pi(s - i\beta) = K^+(s)K^-(s)$$
$$\varkappa_\alpha = \varkappa_+(\varkappa\sin\pi\alpha)^{-1}, \quad \alpha = \pi^{-1}\operatorname{arcctg}(\mu\varkappa_-\varkappa_+^{-1}), \quad \beta = (2\pi)^{-1}\ln\varkappa \tag{1.5}$$
$$K^+(s) = \frac{\Gamma(^1/_2 - s - i\beta)\Gamma(^1/_2 - s + i\beta)}{\Gamma(-s)\Gamma(\alpha - s)}$$
$$K^-(s) = -\frac{\varkappa_\alpha\Gamma(^1/_2 + s + i\beta)\Gamma(^1/_2 + s - i\beta)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-\alpha+s)}$$

Функции $K^\pm(s)$ аналитичны и не обращаются в нуль в $D^\pm$.
Решение задачи (1.3) имеет вид

$$\Phi^+(s) = K^+(s)\Psi^+(s), \quad \Phi^-(s) = [K^-(s)]^{-1}\Psi^-(s)$$
$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)}{K^+(t)}\frac{dt}{t-s}$$

При помощи обратного преобразования Меллина находим

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [K^+(s)\Psi^+(s) - g(s)]\frac{1}{G(s)}\left(\frac{r}{b}\right)^{-s-1}ds, \quad 0 < r < b$$
$$\chi(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K^+(s)\Psi^+(s)\left(\frac{r}{b}\right)^{-s-1}ds, \quad r > b \tag{1.6}$$
$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\varkappa_-\sin^2\pi s b^{s+1}\Phi^-(s) - \varkappa_+^2\cos\pi s f_{1s} - \varkappa_+\varkappa_-\sin\pi s f_{2s})\frac{4r^{-s-1}}{\delta_0(s)}ds$$
$$(0 < r < \infty)$$

Применяя к соотношениям (1.6) теорию вычетов и теорему тауберова типа, получаем

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{\theta=0} = O(r^{-\alpha}), \quad \sigma_\theta|_{\theta=0} = O(r^{-\alpha}), \quad r\to 0$$

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{\theta=0} = \frac{\nu_* \Psi_0(b)}{\varkappa_\alpha \Gamma(\alpha)}\left(1-\frac{r}{b}\right)^{\alpha-1}, \quad r\to b-0; \qquad \Psi_0(b) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(s)\,ds}{K^+(s)} \tag{1.7}$$

$$\chi(r) \sim \Psi_0(b)\,[\Gamma(\alpha)]^{-1}\,(r/b-1)^{\alpha-1}, \quad r\to b+0$$

Для полного решения задачи необходимо определить неизвестное a priori положение точки b. Введем в рассмотрение коэффициент интенсивности напряжений

$$K(b) = \lim_{r\to b+0}(r-b)^{1-\alpha}(\tau_{r\theta}-\mu\sigma_\theta)_{\theta=0}$$

и потребуем, чтобы $K(b) = 0$, т. е. $\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta = 0$, $r = b$, $\theta = 0$. Тогда вследствие (1.7) положение точки b определяется из условия

$$\Psi_0(b) = 0 \tag{1.8}$$

При этом контактные напряжения $\tau_{r\theta}$ и σ_θ в окрестности точки $r = b$, $\theta = 0$ становятся ограниченными. Заметим, что (1.8) эквивалентно условию [1] определения длины зоны сцепления. В [2] ограниченность напряжения в точке перехода от зоны кулоновского трения к сцеплению получена иначе для случая контактной задачи для полуплоскости с одной точкой смены граничных условий.

Вычислим интеграл (1.7) и получим расчетные формулы для контактного напряжения σ_θ в случае задачи Фламана (фиг. 1). Пусть $f_1(r) = -P\delta(r-c)$, $f_2(r) = 0$ ($P = \text{const}$). Тогда

$$f_{1s} = -Pc^s, \; f_{2s} = 0, \; g(s) = -4\varkappa_+\delta_0^{-1}(s)\,Pb^{-1}\lambda^{-s}\zeta(s), \; \lambda = b/c$$

$$\zeta(s) = \mu\varkappa_+\cos\pi s + \varkappa_-\sin\pi s, \quad \Psi_0(b) = -\varkappa_+(\pi\varkappa b)^{-1}P\omega(\lambda)$$

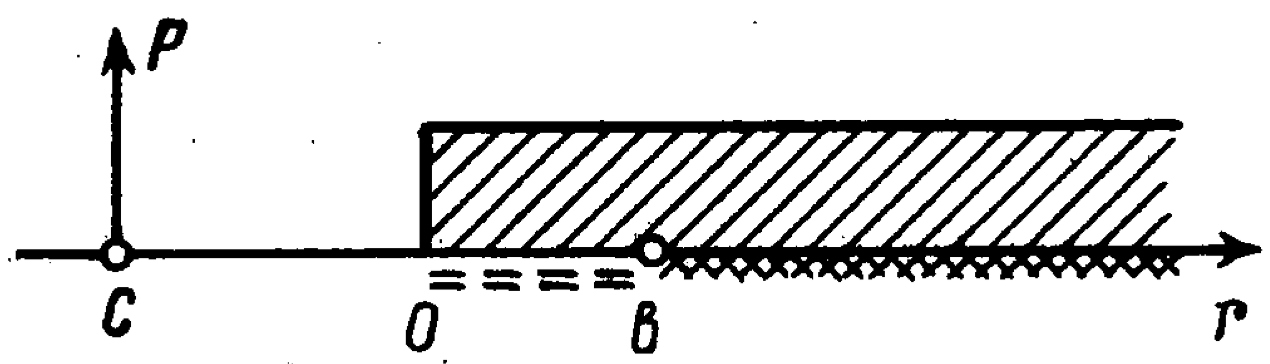
$$\pi\omega(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \Gamma(-s)\,\Gamma(\alpha-s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+i\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s-i\beta\right)\zeta(s)\,\lambda^{-s}ds.$$

Последний интеграл вычислим при помощи теории вычетов и получим

$$\omega(\lambda) = (\pi\lambda\varkappa)^{1/2}\,\mathrm{Re}\,\{(\mu-i)(\lambda/4)^{i\beta}\Gamma(z)\,[\Gamma(1+i\beta)]^{-1}\times$$
$$\times F(z_0, z; 2z_0; -\lambda), \; 0<\lambda<1$$

$$\omega(\lambda) = \mu\varkappa^{1/2}\Gamma(\alpha)\,F(z_0, \bar z_0; 1-\alpha; -\lambda^{-1}) - \varkappa_-(\mu^2+1)\times$$
$$\times[\lambda^\alpha\Gamma(1+\alpha)]^{-1}\,|\Gamma(z)|^2 F(z, \bar z; 1+\alpha; -\lambda^{-1}), \; \lambda>1$$

$$z = \alpha + {}^1/_2 + i\beta, \quad z_0 = {}^1/_2 + i\beta$$



Фиг. 1

Величина λ находится из уравнения $\omega(\lambda) = 0$. Вычисляя интеграл (1.6), рассматривая случаи $0<r<b$ и $r>b$, $0<\lambda<1$ и $\lambda>1$, приходим к следующим расчетным формулам для контактного напряжения:

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \frac{\varkappa_-\sin^2\pi\alpha}{b\pi^2\varkappa^{1/2}}\,P\sum_{j=0}^\infty h_j^{(1)}(r)\sum_{m=0}^\infty g_m^{(1)}\,\mathrm{Re}\left(\frac{d_m^{(0)}}{-m+j+1-z}\right), \quad r<b, \quad \lambda<1$$

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} P \left\{ \frac{(r/c)^{-\alpha}}{r+c} + \frac{\varkappa_-}{b\pi\varkappa} \sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(1)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d_m^{(1)}}{m-\alpha+j+1} - \frac{d_m^{(2)}}{m+j+1} \right) \right\}, \quad r<b, \quad \lambda>1 \tag{1.9}$$

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \frac{\varkappa_+ P}{\pi\varkappa^{1/2}} \left\{ \frac{\cos(\beta\ln(r/c))}{r+c} \left(\frac{c}{r}\right)^{1/2} + \frac{\sin\pi\alpha}{2\pi b} \operatorname{Im} \left[\sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(2)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(1)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{d_m^{(0)}}{m+j+2z_0} + \frac{\overline{d_m^{(0)}}}{m+j+1} \right) \right] \right\}, \quad r>b, \quad \lambda<1$$

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = -\frac{\varkappa_+ P}{\pi^2 b\varkappa} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(2)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(2)} \left(\frac{d_m^{(1)}}{m-j-z_0} - \frac{d_m^{(2)}}{m-j+\bar z-1} \right) \right\}$$

$$r>b, \ \lambda>1$$

$$h_j^{(1)}(r) = \frac{|\Gamma(2-\bar z+j)|^2}{\Gamma(1-\alpha+j)\,j!} \left(\frac{r}{b}\right)^{j-\alpha}, \quad h_j^{(2)}(r) = \frac{\Gamma(1+z_0+j)\,\Gamma(2-\bar z+j)}{\Gamma(j+2z_0)\,j!} \left(\frac{r}{b}\right)^{-3/2-j-i\beta}$$

$$d_m^{(0)} = (\mu-i)\,\lambda^{i\beta} \frac{\Gamma(m+z_0)\,\Gamma(m+z)}{\Gamma(m+2z_0)}, \quad d_m^{(1)} = \mu\varkappa_+ \frac{|\Gamma(m+z_0)|^2}{\Gamma(1-\alpha+m)}$$

$$d_m^{(2)} = \frac{\mu^2+1}{\lambda^\alpha} \varkappa_- \sin\pi\alpha \frac{|\Gamma(m+z)|^2}{\Gamma(1+\alpha+m)}; \quad g_m^{(1)} = \frac{(-1)^m \lambda^{m+1/2}}{m!}, \quad g_m^{(2)} = \frac{(-1)^m}{\lambda^m m!}$$

Из формул (1.9) находим коэффициент интенсивности контактных напряжений

$$K_0\lambda = \lim_{r\to 0} r^\alpha \sigma_\theta(r, 0)$$

$$K_0(\lambda) = \frac{\varkappa_-\lambda^{1/2} P \sin^2\pi\alpha b^{\alpha-1}}{(\pi\varkappa)^{1/2}\,\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Re} \left\{ (\mu-i) \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{i\beta} \frac{\Gamma(2-\bar z)}{\Gamma(1+i\beta)\sin\pi z} \times \right.$$

$$\left. \times F(z_0, z-1; 2z_0; -\lambda) \right\}, \quad \lambda<1$$

$$K_0(\lambda) = \frac{P}{\pi} \sin\pi\alpha c^{\alpha-1} \left\{ \frac{\varkappa_-\lambda^{\alpha-1}\mu\,|\Gamma(2-\bar z)|^2}{\varkappa^{1/2}\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(2-\alpha)} F\left(z_0, \bar z_0; 2-\alpha; -\frac{1}{\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + F(z-1, \bar z-1; \alpha; -\lambda^{-1}) \right\}, \quad \lambda>1$$

2. Задача Л. А. Галина (задача 2). Пусть в упругую полуплоскость $(0<r<\infty, \ -\pi<\theta<0)$ вдавливается штамп $(0<r<a, \ \theta=-\pi; \ 0<r<a, \ \theta=0)$ под действием вертикальной силы P с точкой приложения $r=0$. Область контакта разбивается на зоны сцепления: $u_\theta = \delta_n$, $u_r = \delta_t$ $(0<r<b, \ \theta=-\pi; \ 0<r<b, \ \theta=0)$ и кулоновского трения: $u_\theta=\delta_n$, $\tau_{r\theta}-\mu\sigma_\theta=0$ $(b<r<a, \ \theta=-\pi)$; $u_\theta=\delta_n$, $\tau_{r\theta}+\mu\sigma_\theta=0$ $(b<r<a, \ \theta=0)$. Вне зоны контакта граница полуплоскости свободна от нагрузки. Как и в разд. 1, нормальные напряжения в области контакта должны быть положительны, а касательные напряжения в зоне сцепления удовлетворяют неравенству $|\tau_{r\theta}|<\mu|\sigma_\theta|$.

Учитывая симметрию, сформулированную задачу приведем к задаче для четверть-плоскости

$$u_r|_{\theta=0} = \delta_t, \quad 0<r<b; \quad (\tau_{r\theta}+\mu\sigma_\theta)_{\theta=0}=0, \quad b<r<a$$

$$u_\theta|_{\theta=0} = \delta_n, \quad 0<r<a; \quad \sigma_\theta|_{\theta=0} = \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad r>a$$

$$u_\theta|_{\theta=-\pi/2} = \tau_{r\theta}|_{\theta=-\pi/2} = 0, \quad 0<r<\infty \tag{2.1}$$

при дополнительном условии равновесия штампа

$$\int_0^a \sigma_\theta|_{\theta=0}\,dr = \frac{P}{2} \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение неизвестные функции

$$\chi_1(r) = \sigma_\theta(r, 0), \quad \chi_2(r) = \tau_{r\theta}(r, 0) + \mu\sigma_\theta(r, 0) \tag{2.3}$$
$$\psi_1(r) = \nu_*^{-1}\partial u_r/\partial r(r, 0), \quad \psi_2(r) = \nu_*^{-1}\partial u_\theta/\partial r(r, 0)$$

Тогда на основании граничных условий (2.1) имеем $\operatorname{supp}\chi_1 \subset [0, a]$, $\operatorname{supp}\chi_2 \subset [0, b]$, $\operatorname{supp}\psi_1 \subset [b, \infty)$, $\operatorname{supp}\psi_2 \subset [a, \infty)$, причем вследствие (2.2) функция $\chi_1(r)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^a \chi_1(r)\,dr = \frac{P}{2} \tag{2.4}$$

При помощи преобразования Меллина (1.1) сформулированную задачу приводим к следующей краевой задаче для уравнения (1.2):

$$\sigma_{\theta s}|_{\theta=0} = a^{s+1}\Phi_1^-(s), \quad [\mu\sigma_{\theta s} + (s-1)^{-1}\sigma_{\theta s}']_{\theta=0} = b^{s+1}\Phi_2^-(s)$$
$$[(1-\nu)\sigma_{\theta s}'' - (\nu s + 1 - \nu)(s-1)\sigma_{\theta s}]_{\theta=0} = s(s-1)b^{s+1}\Phi_1^+(s)$$
$$[(1-\nu)\sigma_{\theta s}''' + (2s^2 - \nu s^2 + 2\nu s - s + 1 - \nu)\sigma_{\theta s}']_{\theta=0} =$$
$$= s(s^2-1)a^{s+1}\Phi_2^+(s)$$
$$\sigma_{\theta s}'|_{\theta=-\pi/2} = \sigma_{\theta s}'''|_{\theta=-\pi/2} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Phi_1^-(s) = \int_0^1 \chi_1(ar)r^s\,dr, \quad \Phi_2^-(s) = \int_0^1 \chi_2(br)r^s\,dr \\ &\Phi_1^+(s) = \int_1^\infty \psi_1(br)r^s\,dr, \quad \Phi_2^+(s) = \int_1^\infty \psi_2(ar)r^s\,dr \end{aligned} \tag{2.5}$$

решая которую, приходим к однородной задаче Римана

$$\lambda^{s+1}\Phi_1^+(s) = K_1(s)\Phi_1^-(s) - \varkappa_+\lambda^{s+1}\operatorname{tg}{}^1/_2\pi s\Phi_2^-(s)$$
$$\Phi_2^+(s) = K_0(s)\Phi_1^-(s) - \varkappa_-\lambda^{s+1}\Phi_2^-(s), \quad s \in \Gamma \tag{2.6}$$
$$K_0(s) = \varkappa_+\operatorname{ctg}{}^1/_2\pi s + \mu\varkappa_-, \quad K_1(s) = \varkappa_- + \mu\varkappa_+\operatorname{tg}{}^1/_2\pi s,$$
$$\lambda = b/a \in (0, 1)$$

(величины $\varkappa_\pm$ определены в (1.4)). Выражая из второго уравнения (2.6) $\Phi_1^-(s)$ и подставляя эту функцию в первое уравнение, получаем

$$\Phi_1^+(s) = [K_0(s)]^{-1}K_1(s)\lambda^{-s-1}\Phi_2^+(s) + \varkappa_*[K_0(s)]^{-1}\Phi_2^-(s),$$
$$\varkappa_* = \varkappa_-^2 - \varkappa_+^2$$

Факторизуем функцию $K_0(s) = K_0^+(s)K_0^-(s)$

$$K_0^+(s) = -\frac{\varkappa_0\Gamma(-s/2)}{\Gamma(1-\alpha-s/2)}, \quad K_0^-(s) = \frac{\Gamma(1+s/2)}{\Gamma(\alpha+s/2)}, \quad \varkappa_0 = \frac{\varkappa_+}{\sin\pi\alpha} \tag{2.7}$$

(α определено в (1.5)) и перепишем систему (2.6) в виде, удобном для применения метода [5]

$$\varkappa_*[K_0^-(s)]^{-1}\Phi_2^-(s) = K_0^+(s)\Phi_1^+(s) - \lambda^{-s-1}[K_0^-(s)]^{-1}K_1(s)\Phi_2^+(s) \tag{2.8}$$
$$[K_0^+(s)]^{-1}\Phi_2^+(s) = K_0^-(s)\Phi_1^-(s) - \varkappa_-\lambda^{s+1}[K_0^+(s)]^{-1}\Phi_2^-(s)$$

Функция $[K_0^-(s)]^{-1}K_1(s)$ в области D^+ мероморфна и имеет полюсы в точках $s = -2\alpha - 2j$ и $s = -1 - 2j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, а функция $[K_0^+(s)]^{-1}$ не имеет других особых точек в области D^-, кроме полюсов в точках $s = -2\alpha + 2 + 2j$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Введем в рассмотрение функции

$$\Psi_0^\pm(s) = \sum_{j=0}^\infty \frac{A_j^\pm}{s + 2\alpha \mp 2j \mp 1 - 1}, \quad \Psi_1^-(s) = \sum_{j=0}^\infty \frac{B_j}{s+1+2j} \tag{2.9}$$

$$A_j^+ = \operatorname*{Res}_{s=-2\alpha+2+2j} \{-\varkappa_- \lambda^{s+1} [K_0^+ (s)]^{-1} \Phi_2^- (s)\}$$
$$A_j^- = \operatorname*{Res}_{s=-2\alpha-2j} \{-\lambda^{-s-1} [K_0^- (s)]^{-1} K_1 (s) \Phi_2^+ (s)\}$$
$$B_j = \operatorname*{Res}_{s=-1-2j} \{-\lambda^{-s-1} [K_0^- (s)]^{-1} K_1 (s) \Phi_2^+ (s)\} \tag{2.10}$$

Учитывая формулы (2.5), по теоремам абелева типа имеем $\Phi_2^- (s) = O (s^{-\alpha})$, $\Phi_2^+ (s) = O (s^{-1+\alpha})$, $s \to \infty$ при $s \in D^-$, D^+ соответственно, а тогда вследствие (2.10) находим $A_j^+ = O (\lambda^{2j} j^{1-2\alpha})$, $A_j^- = O (\lambda^{2j} j^{-2+2\alpha})$, $B_j = O (\lambda^{2j} j^{-2+2\alpha})$, $j \to \infty$. Следовательно, ряды (2.9) сходятся равномерно в областях соответственно $D_0^\pm = \mathbf{C} \setminus UM_j^\mp$ $(j = 0, 1, \ldots)$, $D_1^- = \mathbf{C} \setminus UL_j^+$ $(j = 0, 1, \ldots)$, где $\mathbf{C}$ — плоскость комплексного переменного, $M_j^\mp = \{s \in \mathbf{C}\colon \mid s + 2\alpha \mp 2j \mp 1 - 1 \mid < \varepsilon\}$, $L_j^+ = \{s \in \mathbf{C}\colon \mid s + 1 + 2j \mid < \varepsilon\}$, ε — сколь угодно малое положительное число. Таким образом, функция $\Psi_0^+ (s)$ аналитична в D_0^+, а функции $\Psi_0^- (s)$, $\Psi_1^- (s)$ — в D_0^-, D_1^- (заметим, что $D_0^\pm \supset D^\pm$, $D_1^- \supset D^-$).

Вычитаем из левой и правой части первого равенства (2.8) сумму $\Psi_0^- (s) + \Psi_1^- (s)$, а второго равенства — функцию $\Psi_0^+ (s)$, и тем самым устраняем полюсы и делаем возможным применение принципа непрерывности и теоремы Лиувилля. Формулы, определяющие решение задачи Римана (2.6), имеют вид

$$\Phi_1^- (s) = \frac{C + \Psi_0^+ (s)}{K_0^- (s)} + \varkappa_- \lambda^{s+1} \frac{\Psi_0^- (s) + \Psi_1^- (s)}{\varkappa_* K_0^+ (s)},$$
$$\Phi_1^+ (s) = \frac{\Psi_0^- (s) + \Psi_1^- (s)}{K_0^+ (s)} + \frac{K_1 (s) [C + \Psi_0^+ (s)]}{\lambda^{s+1} K_0^- (s)}$$
$$\Phi_2^- (s) = \varkappa_*^{-1} K_0^- (s) [\Psi_0^- (s) + \Psi_1^- (s)], \quad \Phi_2^+ (s) = K_0^+ (s) [C + \Psi_0^+ (s)] \tag{2.11}$$

где C — произвольная постоянная. Неизвестные коэффициенты $A_j^\pm$, B_j найдем из условий (2.10). Подставляем формулы (2.11), (2.7) и (2.9) в (2.10) и приходим к бесконечной алгебраической системе нормального типа

$$A_{n*}^- = \lambda^{2\alpha-1+2n} \delta_{0n}^+ \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j*}^+}{2(n+j+1)}\right) \tag{2.12}$$
$$B_{n*} = \lambda^{2n} \delta_{1n}^+ \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j*}^+}{2(n+j-\alpha)+3}\right)$$
$$A_{n*}^+ = \lambda^{2n+3-2\alpha} \delta_{0n}^- \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j*}^-}{2(n+j+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{j*}}{2(n+j-\alpha)+3}\right)$$
$$\delta_{0n}^+ = 2\varkappa_* \varkappa_+ \Gamma^2 (n + \alpha) (\pi \varkappa_- n!^2)^{-1}$$
$$\delta_{1n}^+ = 2\varkappa_+ \varkappa_0^2 \Gamma^2 (n + 1/2) [\pi \varkappa_- \Gamma^2 (n + 3/2 - \alpha)]^{-1}$$
$$\delta_{0n}^- = 2\varkappa_+ \varkappa_- \Gamma^2 (n + 2 - \alpha) (\pi \varkappa_* \varkappa_0^2 n!^2)^{-1}$$

относительно новых неизвестных $A_{n*}^\pm$, B_{n*}, связанных со старыми следующим образом: $A_n^\pm = CA_{n*}^\pm$, $B_n = CB_{n*}$.

Систему (2.12) решаем асимптотическим методом. Ищем коэффициенты $A_{n*}^\pm$, B_{n*} в виде разложений

$$A_{n*}^- = \lambda^{2n-1+2\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}^- \lambda^{2j}, \quad A_{n*}^+ = \lambda^{2n+2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}^+ \lambda^{2j}$$
$$B_{n*} = \lambda^{2n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{nj} \lambda^{2j} \tag{2.13}$$

Подставляя разложения (2.13) в систему (2.12), получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$a_{n0}^{-}=\delta_{0n}^{+},\quad b_{n0}=\delta_{1n}^{+}$$

$$a_{nk}^{-}=-\delta_{0n}^{+}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{j-1,k-j}^{+}}{2(n+j)},\quad b_{nk}=-\delta_{1n}^{+}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{j-1,k-j}^{+}}{2(n+j-\alpha)+1}$$

$$a_{n,k-1}^{+}=\delta_{0n}^{-}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{j-1,k-j}^{-}}{2(n+j)}+\lambda^{1-2\alpha}\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{j-1,k-j}}{2(n+j-\alpha)+1}\right)\qquad(2.14)$$

$$(n=0,1,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$$

Аналогично [5] можно свернуть рекуррентные соотношения (2.14) — получить явные формулы для коэффициентов $a_{nk}^{\pm}$, b_{nk}. Однако для численных расчетов формулы (2.14) удобнее.

Найдем теперь постоянную C и положение точки b. Учитывая условие равновесия штампа (2.4), а также (2.5), имеем $\Phi_1^-(0)=(2a)^{-1}P$, откуда вследствие (2.11) окончательно получаем

$$C=\frac{P}{2a\,\Gamma(\alpha)}\left(1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_{j*}^{+}}{2(\alpha-1-j)}\right)^{-1}$$

Аналогично указанному в разд. 1 введем в рассмотрение величину

$$K(b)=\lim_{r\to b-0}(b-r)^{1-\alpha}\chi_2(r)$$

Принимая во внимание (2.5) и учитывая, что вследствие (2.11)

$$\Phi_2^-(s)\sim\frac{s^{-\alpha}}{\varkappa_* 2^{1-\alpha}}C\Sigma,\quad s\to\infty,\quad s\in D^-;\ \Sigma=\sum_{j=0}^{\infty}(A_{j*}^{-}+B_{j*})$$

получаем $K(b)=C(\varkappa_*\Gamma(\alpha))^{-1}(b/2)^{1-\alpha}\Sigma$. Следовательно, значение b определяется из уравнения $\Sigma=0$.

Построим расчетные формулы для контактных напряжений. Учитывая соотношения (2.3), (2.5) и (2.11), при помощи обратного преобразования Меллина находим

$$\sigma_\theta(r,0)=L_1(r)+\varkappa_-\varkappa_*^{-1}L_2(r)\qquad(2.15)$$

$$L_1(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{C+\Psi_0^+(s)}{K_0^-(s)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-s-1}ds,$$

$$L_2(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Psi_0^-(s)+\Psi_1^-(s)}{K_0^+(s)}\left(\frac{r}{b}\right)^{-s-1}ds$$

Используя теорию вычетов, а также первое равенство (2.12), получаем

$$\sigma_\theta(r,0)=-\frac{\varkappa_-}{\varkappa_*\varkappa_0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j\Gamma(^3/_2+j-\alpha)}{\Gamma(j+{}^1/_2)}\left(\frac{r}{b}\right)^{2j}\quad(0<r<b)$$

Рассмотрим случай $b<r<a$. Имеем

$$L_1(r)=\frac{(r/a)^{2\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[2C\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\alpha}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^+}{m+1}F\left(\alpha,m+1;m+2;\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

Если $\max\{b,2^{-1/2}a\}\leqslant r<a$, то для вычисления функции Гаусса, содержащейся в последнем равенстве, следует воспользоваться формулой преобразования [6]

$$(m+1)^{-1}F(\alpha,m+1;m+2;r^2/a^2)=m!\,[(1-\alpha)_{m+1}]^{-1}(a/r)^{2m+2}+$$
$$+(\alpha-1)^{-1}(1-r^2/a^2)^{1-\alpha}F(m+2-\alpha,1;2-\alpha;1-r^2/a^2)$$

Функция $L_2(r)$ определяется соотношением

$$L_2(r)=\frac{1}{\varkappa_0}\left(\frac{r}{b}\right)^{2\alpha-3}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{A_m^-\left[\Gamma_1\left(\frac{1}{2},\alpha;r\right)+\Gamma_2(\alpha;r)\right]+\right.$$

$$\left.+B_m[\Gamma_1(\alpha,{}^1/_2;r)+\Gamma_2({}^1/_2;r)]\right\}\quad(b<r<\min\{2^{1/2}b,\ a\})$$

$$\Gamma_1(\alpha_1,\alpha_2;r)=-\frac{\Gamma(m+{}^3/_2-\alpha_1)}{\Gamma(m+\alpha_2)}\left(\frac{r}{b}\right)^{2m+3-2\alpha_1}$$

$$\Gamma_2(\alpha_1;r)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m+\alpha_1)_j}{(\alpha)_j}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)^{j-1+\alpha}$$

При $2^{1/2}b\leqslant r<a$ имеем

$$L_2(r)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\varkappa_0}\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{r}{b}\right)^{2\alpha-3}\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m^-\Gamma_0\left(\frac{1}{2};r\right)+B_m\Gamma_0(\alpha;r)\right]$$

$$\Gamma_0(\alpha_1;r)=(m+{}^3/_2-\alpha_1)^{-1}F(2-\alpha,m+{}^3/_2-\alpha_1;m+{}^5/_2-$$
$$-\alpha_1;b^2/r^2)$$

Вследствие (2.1) при $b<r<a$ касательные напряжения $\tau_{r\theta}(r,0)$ выражаются через нормальные $\sigma_\theta(r,0)$: $\tau_{r\theta}(r,0)=-\mu\sigma_\theta(r,0)$.

Остается рассмотреть случай $0<r<b$. Имеем

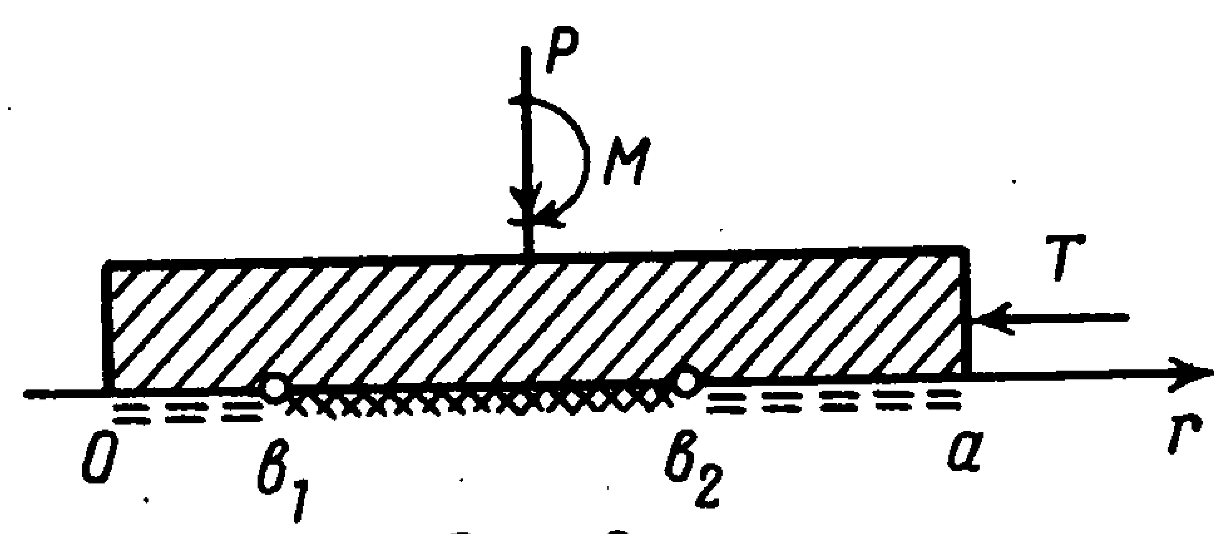
$$\tau_{r\theta}(r,0)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\varkappa_*}\Gamma(2-\alpha)\frac{r}{b}\sum_{m=0}^{\infty}[A_m^-\Gamma_3(\alpha;r)+B_m\Gamma_3({}^1/_2;r)]$$

$$(0<r<2^{-1/2}b),\quad\Gamma_3(\alpha_1;r)=(1-m-\alpha_1)^{-1}F(2-\alpha,1-m-$$
$$-\alpha_1;2-m-\alpha_1;r^2/b^2)$$

$$\tau_{r\theta}(r,0)=\frac{r}{\varkappa_*b}\sum_{m=0}^{\infty}[A_m^-\Gamma_4({}^1/_2;r)+B_m\Gamma_4(\alpha;r)]-\mu\sigma_\theta(r,0)$$

$$(2^{-1/2}b\leqslant r<b),\quad\Gamma_4(\alpha_1;r)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-m+\alpha_1-{}^1/_2)_j}{(\alpha)_j}\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)^{j-1+\alpha}\qquad(2.16)$$

3. Несимметричная контактная задача при наличии трения и сцепления. Рассмотрим взаимодействие упругой полуплоскости ($0<r<\infty$,



Фиг. 2

$-\pi<\theta<0$) со штампом ($0<r<a$, $\theta=0$), к которому приложены вертикальная сила P, момент M и горизонтальная сила T (фиг. 2). Область контакта разбивается на зоны сцепления и трения. Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{gathered}\theta=-\pi:\ \sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0,\quad 0<r<\infty\\ \theta=0:\ u_\theta=\delta_n+\gamma r,\ 0<r<a;\ u_r=\delta_t,\ b_1<r<b_2\\ \tau_{r\theta}-\mu\sigma_\theta=0,\ 0<r<b_1;\ \tau_{r\theta}+\mu\sigma_\theta=0,\ b_2<r<a\\ \tau_{r\theta}=\sigma_\theta=0,\quad a<r<\infty\\ |\tau_{r\theta}|<\mu|\sigma_\theta|,\quad b_1<r<b_2;\ \sigma_\theta>0,\quad 0<r<a\end{gathered}\qquad(3.1)$$

где γ — угол поворота штампа. Равновесие штампа обеспечивают условия

$$\int_0^a \sigma_\theta(r,0)\,dr = P,\quad \int_0^a \tau_{r\theta}(r,0)\,dr = T,\quad \int_0^a \sigma_\theta(r,0)\,r\,dr = M \tag{3.2}$$

В качестве неизвестных выбираем функции

$$\chi_1(r) = (\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta)_{\theta=0},\quad \chi_2(r) = (\tau_{r\theta} + \mu\sigma_\theta)_{\theta=0}$$
$$\psi_1(r) = \nu_*^{-1}\partial u_r/\partial r\,(r,0),\quad \psi_2(r) = \nu_*^{-1}\partial u_\theta/\partial r\,(r,0) \tag{3.3}$$

причем в силу (3.1) $\operatorname{supp}\chi_1 \subset [b_1, a]$, $\operatorname{supp}\chi_2 \subset [0, b_2]$, $\operatorname{supp}\psi_1 \subset [0, b_1] \cup [b_2, \infty)$, $\operatorname{supp}\psi_2 \subset [0, \infty)$ (при $0 \leqslant r \leqslant a$ $\psi_2(r) = \nu_*^{-1}\gamma$). Обозначим

$$\|\chi_{js}, \psi_{js}\| = \int_0^\infty \|\chi_j(r), \psi_j(r)\|\, r^s dr$$

и аналогично изложенному в разд. 1, 2 приходим к соотношениям

$$2\mu\psi_{1s} = l_{21}(s)\,\chi_{1s} + l_{22}(s)\,\chi_{2s},\quad 2\mu\psi_{2s} = l_{11}(s)\,\chi_{1s} + l_{12}(s)\,\chi_{2s} \tag{3.4}$$
$$l_{1j}(s) = -\mu\varkappa_- + (-1)^j\varkappa_+ \operatorname{ctg}\pi s,\quad l_{2j}(s) = (-1)^j\varkappa_- + \mu\varkappa_+ \operatorname{ctg}\pi s \quad (j = 1, 2)$$

Введем параметры

$$\lambda_1 = b_1/a,\quad \lambda_2 = b_2/a,\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$$

и функции

$$\Phi_1^-(s) = \int_{\lambda_1}^1 \chi_1(ar)\, r^s\, dr,\quad \Phi_1^+(s) = \int_1^{\lambda_1^{-1}} \chi_1(b_1 r)\, r^s\, dr$$
$$\Phi_2^-(s) = \int_0^1 \chi_2(b_2 r)\, r^s\, dr,\quad \Phi_2^+(s) = 2\mu\int_1^\infty \psi_2(ar)\, r^s\, dr$$
$$\Phi_3^-(s) = 2\mu\int_0^1 \psi_1(b_1 r)\, r^s\, dr,\quad \Phi_3^+(s) = 2\mu\int_1^\infty \psi_1(b_2 r)\, r^s\, dr \tag{3.5}$$

Тогда, учитывая, что $\Phi_1^-(s) = \lambda_1^{s+1}\Phi_1^+(s)$, на основании (3.4) приходим к векторной задаче Римана

$$\Phi_1^+(s) = \lambda_1^{-s-1}\Phi_1^-(s)$$
$$\Phi_2^+(s) = l_{11}(s)\Phi_1^-(s) + \lambda_2^{s+1} l_{12}(s)\,\Phi_2^-(s) - (s+1)^{-1}C_0$$
$$\Phi_3^+(s) = \lambda_2^{-s-1}\, l_{21}(s)\,\Phi_1^-(s) + l_{22}(s)\Phi_2^-(s) - (\lambda_1/\lambda_2)^{s+1}\Phi_3^-(s)$$
$$s \in \Gamma,\quad C_0 = 2\mu\,(1+\nu)^{-1}E\gamma \tag{3.6}$$

Выразим из третьего равенства (3.6) сначала функцию $\Phi_1^-(s)$, а затем $\Phi_2^-(s)$ и с учетом первого соотношения подставим во второе равенство. В результате получаем вместо (3.6) следующую систему функциональных уравнений:

$$C_0(s+1)^{-1} + \Phi_2^+(s) = l_{11}(s)\,\Phi_1^-(s) + \lambda_2^{s+1} l_{12}(s)\,\Phi_2^-(s)$$
$$\Phi_3^+(s) - \lambda_2^{-s-1} l_{11}^{-1}(s)\, l_{21}(s)\,[\Phi_2^+(s) + C_0(s+1)^{-1}] =$$
$$= l(s)\, l_{11}^{-1}(s)\,\Phi_2^-(s) - (\lambda_1/\lambda_2)^{s+1}\Phi_3^-(s)$$
$$-\Phi_3^-(s) = l(s)\, l_{12}^{-1}(s)\Phi_1^+(s) + (\lambda_2/\lambda_1)^{s+1}\Phi_3^+(s) - \lambda_1^{-s-1} l_{12}^{-1}(s) \times$$
$$\times\, l_{22}(s)\,[\Phi_2^+(s) + C_0(s+1)^{-1}],\quad l(s) = -2\mu\,(\varkappa_-^2 + \varkappa_+^2 \operatorname{ctg}^2 \pi s) \tag{3.7}$$

Факторизуем функции l_{11}, $l_{11}^{-1}l$, $l_{12}^{-1}l$:

$$l_{11}(s) = L_0^+(s)\, L_0^-(s),\quad l_{1j}^{-1}(s)\, l(s) = L_j^+(s)\, L_j^-(s)\quad (j = 1, 2)$$

$$L_0^+(s)=\frac{\varkappa_0\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\alpha-s)},\quad L_0^-(s)=\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(\alpha+s)}$$

$$L_1^+(s)=-\frac{\varkappa_1\Gamma(-s)\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1/2-i\beta-s)\Gamma(1/2+i\beta-s)},\quad L_1^-(s)=\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1/2+i\beta+s)\Gamma(1/2-i\beta+s)}$$

$$L_2^+(s)=\frac{\varkappa_1\Gamma(-s)\Gamma(\alpha-s)}{\Gamma(1/2-i\beta-s)\Gamma(1/2+i\beta-s)},\quad L_2^-(s)=\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-\alpha+s)}{\Gamma(1/2+i\beta+s)\Gamma(1/2-i\beta+s)}$$

$$\varkappa_1=2\mu\varkappa\varkappa_0^{-1},\ \varkappa_0=\varkappa_+\operatorname{cosec}\pi\alpha$$

Величины α, β определены в (1.5). Аналогично изложенному в разд. 2 введем функции

$$\Psi_1^+(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j^+}{s-1+\alpha-j},\quad \Psi_1^-(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j^-}{s+\alpha+j}$$

$$\Psi_2^+(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j^+}{s-s_j},\quad \Psi_2^-(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j^-}{s+s_j}$$

$$s_{2m}=m+i\beta+1/2,\ s_{2m+1}=m-i\beta+1/2\ (m=0,1,\ldots)\tag{3.8}$$

Коэффициенты $A_j^\pm$, $B_j^\pm$ подлежат определению. Перепишем систему (3.7) в виде

$$\begin{gathered}[L_0^+(s)]^{-1}[\Phi_2^+(s)+C_0(s+1)^{-1}]-\nu_0C_0(s+1)^{-1}-\Psi_1^+(s)=\\ =L_0^-(s)\Phi_1^-(s)+\lambda_2^{s+1}[L_0^+(s)]^{-1}l_{12}(s)\Phi_2^-(s)-\nu_0C_0(s+1)^{-1}-\\ -\Psi_1^+(s)\ (=C_1)\\ [L_1^+(s)]^{-1}\Phi_3^+(s)-\lambda_2^{-s-1}l_{21}(s)[l_{11}(s)L_1^+(s)]^{-1}[\Phi_2^+(s)+\\ +C_0(s+1)^{-1}]+\nu_1C_0(s+1)^{-1}-\Psi_1^-(s)-\Psi_2^+(s)=L_1^-(s)\Phi_2^-(s)-\\ -(\lambda_1/\lambda_2)^{s+1}[L_1^+(s)]^{-1}\Phi_3^-(s)+\nu_1C_0(s+1)^{-1}-\Psi_1^-(s)-\Psi_2^+(s)\ (=C_2)\\ -[L_2^-(s)]^{-1}\Phi_3^-(s)-\Psi_2^-(s)=L_2^+(s)\Phi_1^+(s)+\\ +(\lambda_1/\lambda_2)^{-s-1}[L_2^-(s)]^{-1}\Phi_3^+(s)-\\ -\lambda_1^{-s-1}l_{22}(s)[l_{12}(s)L_2^-(s)]^{-1}[\Phi_2^+(s)+C_0(s+1)^{-1}]-\\ -\Psi_2^-(s)\ (=0)\end{gathered}\tag{3.9}$$

$$\nu_0=\varkappa_0^{-1}\Gamma(2-\alpha),\ \nu_1=\Gamma(\alpha)(\beta^2+1/4)[2(1-\alpha)\varkappa^{1/2}]^{-1}$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные). Для того чтобы примененная здесь теорема Лиувилля имела место, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты

$$A_n^\pm=\sum_{k=0}^{2}C_kA_{nk}^\pm,\quad B_n^\pm=\sum_{k=0}^{2}C_kB_{nk}^\pm\tag{3.10}$$

являлись решением следующей бесконечной алгебраической системы нормального типа:

$$A_{nk}^-=\lambda_2^{\alpha+n-1}r_n^{(1)}\left(\frac{\nu_0\delta_{k0}}{n+\alpha-1}-\delta_{k1}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_{jk}^+}{n+j+1}\right)$$

$$B_{nk}^+=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s_n+1}r_n^{(3)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_{jk}^-}{s_n+s_j}$$

$$A_{nk}^+=\lambda_2^{2-\alpha+n}r_n^{(2)}\left[-\frac{\nu_1\delta_{k0}}{2-\alpha+n}+\delta_{k2}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A_{jk}^-}{n+j+1}+\frac{B_{jk}^+}{n+1-\alpha-s_j}\right)\right]$$

$$B_{nk}^-=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s_n-1}r_n^{(4)}\left[\frac{\nu_1\delta_{k0}}{s_n-1}+\delta_{k2}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A_{jk}^-}{-s_n+\alpha+j}-\frac{B_{jk}^+}{s_n+s_j}\right)\right]\tag{3.11}$$

$$n=0,1,\ldots;\ k=0,1,2$$

$$r_n^{(1)} = \varkappa_- \sin \pi\alpha\, (\mu^2 + 1)\, (\pi \varkappa_1 n!\,^2)^{-1} \Gamma\, (^1/_2 + \bar z + n)\, \Gamma\, (^1/_2 + z + n)$$
$$r_n^{(2)} = -\sin 2\pi\alpha\, (\pi n!^2)^{-1}\, \Gamma\, (^3/_2 - \bar z + n)\, \Gamma\, (^3/_2 - z + n),\ z = \alpha + i\beta$$
$$r_{2m}^{(3)} = \varkappa_1^{-1} R_m L_2^-\, (s_{2m}),\ r_{2m}^{(4)} = -(s_{2m})^{-1} R_m L_1^+\, (-s_{2m})$$
$$R_m = (-1)^m\, \Gamma\, (-m - 2i\beta)\, [m!\, \Gamma\, (-s_{2m})\, \Gamma\, (1 - \alpha - s_{2m})]^{-1},$$
$$r_{2m+1}^{(k)} = \overline{r_{2m}^{(k)}}\ (k = 3,\, 4)$$

(δ_{km} — символ Кронекера). Решение задачи Римана (3.6) находим из (3.9)

$$\Phi_1^-\, (s) = [L_0^-\, (s)]^{-1} \Omega_1\, (s) + \lambda_1^{s+1}\, [L_2^+\, (s)]^{-1} \Psi_2^-\, (s) -$$
$$- \lambda_2^{s+1} L_1^+\, (s)\, [L_2^+\, (s)\, L_2^-\, (s)]^{-1} \Omega_2\, (s),\ \Phi_1^+\, (s) = \lambda_1^{-s-1} \Phi_1^-\, (s)$$
$$\Phi_2^-\, (s) = [L_1^-\, (s)]^{-1} \Omega_2\, (s) - (\lambda_1/\lambda_2)^{s+1} L_2^-\, (s) [L_1^+\, (s) L_1^-\, (s)]^{-1} \Psi_2^-\, (s)$$
$$\Phi_2^+\, (s) = -C_0\, (s + 1)^{-1} + L_0^+\, (s)\, \Omega_1\, (s),\ \Phi_3^-\, (s) = -L_2^-\, (s)\, \Psi_2^-(s)$$
$$\Phi_3^+\, (s) = L_1^+\, (s)\, \Omega_2\, (s) + \lambda_2^{-s-1} l_{21}\, (s)\, l_{11}^{-1}\, (s)\, L_0^+\, (s)\, \Omega_1\, (s)$$
$$\Omega_1\, (s) = C_0 \nu_0\, (s + 1)^{-1} + C_1 + \Psi_1^+\, (s)$$
$$\Omega_2\, (s) = -C_0 \nu_1\, (s + 1)^{-1} + C_2 + \Psi_1^-\, (s) + \Psi_2^+\, (s) \tag{3.12}$$

Определим теперь угол поворота γ и постоянные C_1 и C_2. Учитывая обозначения (3.3) и (3.5), условия равновесия штампа (3.2) представим в виде

$$\lambda_2 \Phi_2^-\, (0) - \Phi_1^-\, (0) = 2\mu a^{-1} P,\ \lambda_2 \Phi_2^-\, (0) + \Phi_1^-\, (0) = 2a^{-1} T$$
$$\lambda_2^2 \Phi_2^-\, (1) - \Phi_1^-\, (1) = 2\mu a^{-2} M \tag{3.13}$$

Принимая во внимание формулы (3.12) и (3.8) и обозначая

$$\omega_{km}^{\pm} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{jk}^{\pm}}{\alpha \mp j + m - {}^1/_2 \mp {}^1/_2},\quad \omega_{km} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{jk}^{+}}{m - s_j}$$
$$d_0 = \pi\, [\Gamma\, (\alpha)\, \mathrm{ch} \pi\beta]^{-1},\ d_1 = \pi\, (\beta^2 + {}^1/_4)\, [\Gamma\, (\alpha + 1)\, \mathrm{ch}\, \pi\beta]^{-1}$$

для определения постоянных C_0, C_1, C_2 из условий (3.13) приходим к системе трех уравнений

$$\sum_{k=0}^{2} a_{jk} C_k = f_j \quad (j = 0, 1, 2);\quad f_0 = 2\mu \frac{P}{a},\quad f_1 = 2 \frac{T}{a},\quad f_2 = 2\mu \frac{M}{a^2} \tag{3.14}$$
$$a_{jk} = 2\lambda_2 d_0 \delta_{j1}\, (-\nu_1 \delta_{k0} + \delta_{k2} + \omega_{k0}^- + \omega_{k0}) - (-1)^j \Gamma\, (\alpha)\, \times$$
$$\times\, (\nu_0 \delta_{k0} + \delta_{k1} + \omega_{k0}^+)\ (j = 0,\, 1)$$
$$a_{2k} = -\Gamma\, (\alpha + 1)\, (^1/_2 \nu_0 \delta_{k0} + \delta_{k1} + \omega_{k1}^+)\ (k = 0,\, 1,\, 2)$$

Угол поворота штампа γ связан с C_0 соотношением (3.6).

Для нахождения неизвестных точек смены типа граничных условий b_1, b_2 введем, как и в разд. 1, 2, коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_1 = \lim_{r \to b_1 + 0} (r - b_1)^{1-\alpha} \chi_1\, (r),\ K_2 = \lim_{r \to b_2 - 0} (b_2 - r)^{1-\alpha} \chi_2\, (r) \tag{3.15}$$

С одной стороны, в силу (3.12) имеем при $s \to \infty$

$$\Phi_1^+\, (s) \sim \varkappa_1^{-1} \omega_*\, (-s)^{-\alpha}\ (s \in D^+),\ \Phi_2^-\, (s) \sim C_2 s^{-\alpha}\ (s \in D^-)$$
$$\omega_* = B_0^- + B_1^- + \ldots \tag{3.16}$$

а с другой — вследствие (3.5) и (3.15) при $s \to \infty$

$$\Phi_1^+\, (s) \sim K_1 b_1^{\alpha-1} \Gamma\, (\alpha)\, (-s)^{-\alpha}\ (s \in D^+),\ \Phi_2^-\, (s) \sim K_2 b_2^{\alpha-1} \Gamma\, (\alpha)\, s^{-\alpha}$$
$$(s \in D^-)$$

находим

$$K_1 = b_1^{1-\alpha}[\varkappa_1\Gamma(\alpha)]^{-1}\omega_*,\quad K_2 = b_2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1}C_2$$

Параметры λ_1, λ_2 определяются из условий $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, которые, очевидно, эквивалентны следующим равенствам: $C_2 = 0$, $\omega_* = 0$. Учитывая (3.16), а также (3.10), линейную систему трех уравнений (3.14) относительно C_0, C_1, C_2 приводим к системе двух трансцендентных уравнений относительно λ_1, λ_2

$$f_0(a_{j0}F_1 - a_{j1}F_0) = (a_{00}F_1 - a_{01}F_0)f_j\quad (j = 1,\ 2)$$
$$F_k = B_{0k}^- + B_{1k}^- + \ \ldots\quad (k = 0,\ 1)$$

При этом угол поворота определяется равенством

$$\gamma = (1+\nu)f_0[2\mu E(a_{00} - F_1^{-1}F_0a_{01})]^{-1}$$

и равновесие штампа обеспечивается.

Исследуем вопрос об особенностях контактных напряжений и смещений в окрестности особых точек. Вследствие $K_1 = K_2 = 0$ функции $\tau_{r\theta}$, σ_θ, $\partial u_r/\partial r$, $\partial u_\theta/\partial r$ ограничены при $\theta = 0$ и $r\to b_1$, $r\to b_2$. В окрестности точки $r = a$ имеем

$$\sigma_\theta(r,\ 0) = O\{(a-r)^{-\alpha}\},\quad \tau_{r\theta}(r,\ 0) = O\{(a-r)^{-\alpha}\},\quad r\to a-0$$
$$\partial u_\theta/\partial r\,(r,\ 0) = O\{(r-a)^{-\alpha}\},\quad \partial u_r/\partial r\,(r,\ 0) = O(1),\quad r\to a+0$$

Нетривиальным оказывается исследование поведения напряжений при $r\to 0$. Имеем в силу (3.5) и (3.12)

$$\chi_2(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{\Omega_2(s)}{L_1^-(s)} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s+1}\frac{L_2^-(s)\Psi_2^-(s)}{L_1^+(s)L_1^-(s)}\right]\left(\frac{r}{b_2}\right)^{-s-1}ds \tag{3.17}$$

Функция $[L_1^-(s)]^{-1}$ в области D^+ имеет полюсы в точках $s = -s_n$ (s_n — комплексные числа, определенные в (3.8)). Однако вследствие (3.12) и четвертого равенства в (3.11)

$$\operatorname*{Res}_{s=-s_n}\{[\Omega_2(s) - (\lambda_1/\lambda_2)^{s+1}L_2^-(s)\Psi_2^-(s)(L_1^+(s))^{-1}][L_1^-(s)]^{-1}\} = 0$$

Применяя теорию вычетов и учитывая последнее равенство, получаем из (3.17) и (3.3)

$$\chi_2(r) = -\Psi_2^-(\alpha-1)[\Gamma(2\alpha-1)L_1^+(\alpha-1)]^{-1}(r/b_1)^{-\alpha} +$$
$$+\, O(r^{1-\alpha}),\quad r\to 0$$
$$\tau_{r\theta}(r,\ 0) = {}^1\!/_2\chi_2(r),\quad \tau_{r\theta}(r,\ 0) = (2\mu)^{-1}\chi_2(r),\quad 0 < r < b_1$$

Сопоставляя формулы (3.5) и (3.12), находим

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{\theta=0} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Gamma(\alpha)\Psi_2^-(\alpha-1)(r/b_1)^{-\alpha}}{\Gamma(-{}^1\!/_2+i\beta+\alpha)\Gamma(-{}^1\!/_2-i\beta+\alpha)} + O(1),\quad r\to 0$$

В заключение отметим возможность предельного перехода $\lambda_1\to 0$ ($b_1\to 0$) в формулах (3.12). В этом случае $\Phi_1^+(s) = 0$, $\Phi_3^-(s) = 0$, $\Psi_2^\pm(s) = 0$. Для определения коэффициентов $A_n^\pm$ приходим к алгебраической системе

$$A_n^- = -\lambda_2^{-1+\alpha+n}r_n^{(1)}\left(C_1 + \frac{C_0\nu_0}{1-\alpha-n} - \sum_{j=0}^\infty\frac{A_j^+}{1+n+j}\right)$$

$$A_n^+ = \lambda_2^{2-\alpha+n}r_n^{(2)}\left(C_2 - \frac{C_0\nu_1}{2-\alpha+n} + \sum_{j=0}^\infty\frac{A_j^-}{1+n+j}\right)$$

Учитывая соотношения (3.12) ($\Psi_2^{\pm} = 0$), получаем (D_j — комплексные постоянные)

$$\chi_j(r) = D_j r^{-1/2+i\beta} + \bar{D}_j r^{-1/2-i\beta} + O(r^{1/2}), \quad r \to 0 \quad (j = 1,\ 2)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413—424.
2. *Dundurs J., Comninou M.* Some consequences of the inequality conditions in contact and crack problems // J. Elasticity. 1979. V. 9. № 1. P. 71—82.
3. *Захаров В. В., Никитин Л. В.* О зоне проскальзывания при расслоении упругих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 172—175.
4. *Моссаковский В. И., Бискуп А. Г., Моссаковская Л. В.* Дальнейшее развитие задачи Галина с трением и сцеплением // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 1. С. 60—64.
5. *Антипов Ю. А.* Аналитическое решение смешанных задач математической физики со сменой граничных условий по кольцу // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 51—58.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Одесса, Москва

Поступила в редакцию 22.II.1991