

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 17. No. 253. P. 4—11.
2. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; North-Holland, 1975. 425 p.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1990

УДК 539.375

© 1991 г.

В. Э. Садыхов

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ
НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО
СДВИГА**

Для произвольной симметричной односвязной конфигурации получена асимптотика коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в свободной вершине краевой трещины продольного сдвига в случае сравнительно малой длины трещины или малом расстоянии от конца трещины до границы фигуры. В более простых конфигурациях рассмотрены аналогичные вопросы для КИН в вершине угловой выточки.

1. Продольный сдвиг однородного изотропного упругого тела фигуры ω характеризуется смещением $W_z(x, y)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа $\nabla_{xy}^2 W_z = 0$ ($(x, y) \in \omega$), и напряжениями $\tau_{xy} = \tau_x = \mu \partial W_z / \partial x$, $\tau_{yz} = \tau_y = \mu \partial W_z / \partial y$ ($\mu = \text{const}$ — характеристика материала). Рассмотрим в расширенной комплексной плоскости C_z : $z = x + iy$ односвязную многоугольную область ω , для которой точка $z = \infty$ является граничной либо внешней. Пусть к граничной кривой $\partial\omega$ приложена нагрузка $\tau_n(\xi) = \tau_x(\xi) \sin \theta - \tau_y(\xi) \cos \theta$, где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к $\partial\omega$, а $\theta = \theta(\xi)$ — аргумент вектора касательной к $\partial\omega$ в ее точке ξ . Действительнозначные функции $\tau_x(\xi)$, $\tau_y(\xi)$ ($\xi \in \partial\omega$) непрерывны на $\partial\omega$. Если $\infty \in \partial\omega$, то для каждой вершины потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\partial\omega} \ln |W(\xi) - W(\xi_k)| \tau_n(\xi) ds < \infty$$

Здесь ds — элемент длины на $\partial\omega$, а функция $W = W(z)$ ($z \in \omega$) однолистно и конформно отображает область $\omega \subset C_z$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } W > 0$ комплексной плоскости C_W (если $W(\xi_k) = \infty$, это слагаемое в предыдущей формуле исчезает). Еще потребуем, чтобы в случае $\infty \in \partial\omega$ выполнялось условие самоуравновешенности

$$\int_{\partial\omega} \tau_n(\xi) ds = 0$$

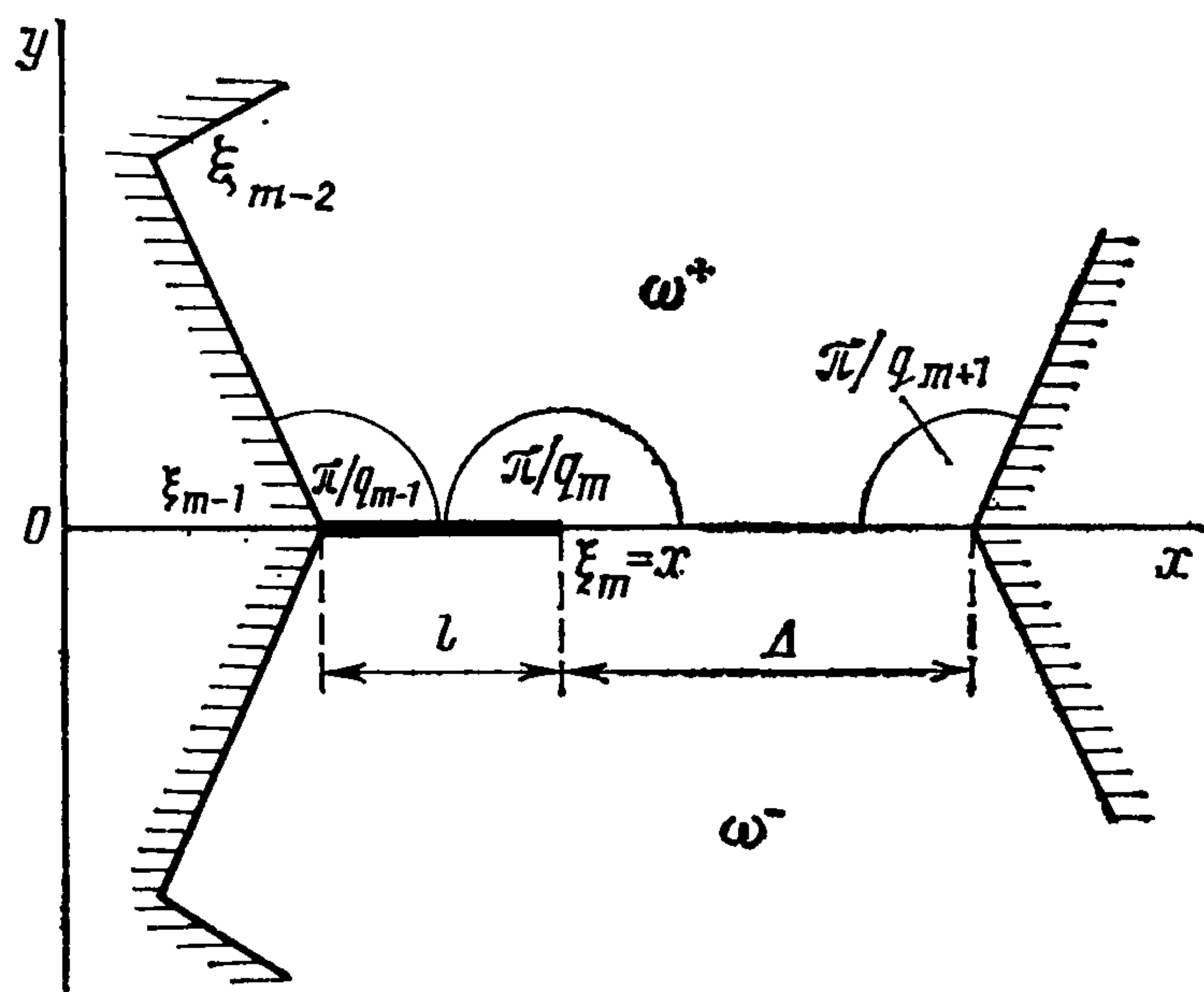
В этих предложениях, решив задачу Неймана для функции $W_z(x, y)$, гармонической в области ω , получим для поля напряжений формулу

$$\tau_x(z) - i\tau_y(z) = \frac{1}{\pi} W'(z) \int_{\partial\omega} \frac{\tau_n(\xi) ds}{W(\xi) - W(z)} \quad (z \in \omega) \quad (1.1)$$

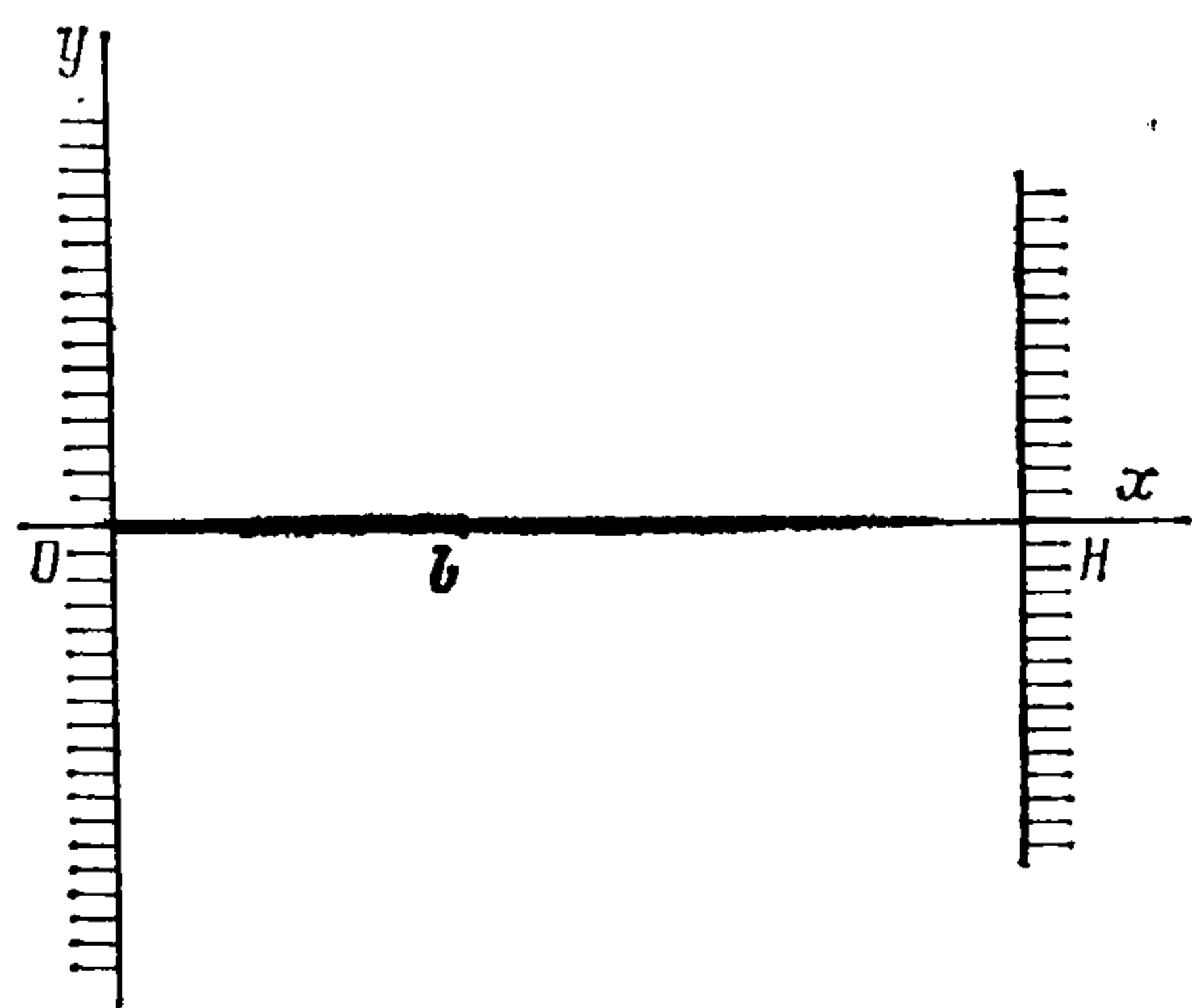
Отсюда и при помощи формулы Кристоффеля — Шварца [1] заключаем, что точками сингулярности поля напряжений являются лишь вершины угловых выточек и свободные вершины краевых трещин. Асимптотический анализ интеграла (1.1) дает

$$\begin{aligned} \tau_x(\xi_m + re^{i\varphi}) - i\tau_y(\xi_m + re^{i\varphi}) &= -i\kappa_0(\xi_m) (re^{i\varphi})^{p_m-1} + \\ &+ (\tau_x(\xi_m) - i\tau_y(\xi_m)) + \varepsilon(r) \quad (r \rightarrow +0, |\varphi| < 1/2\pi/\rho_m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

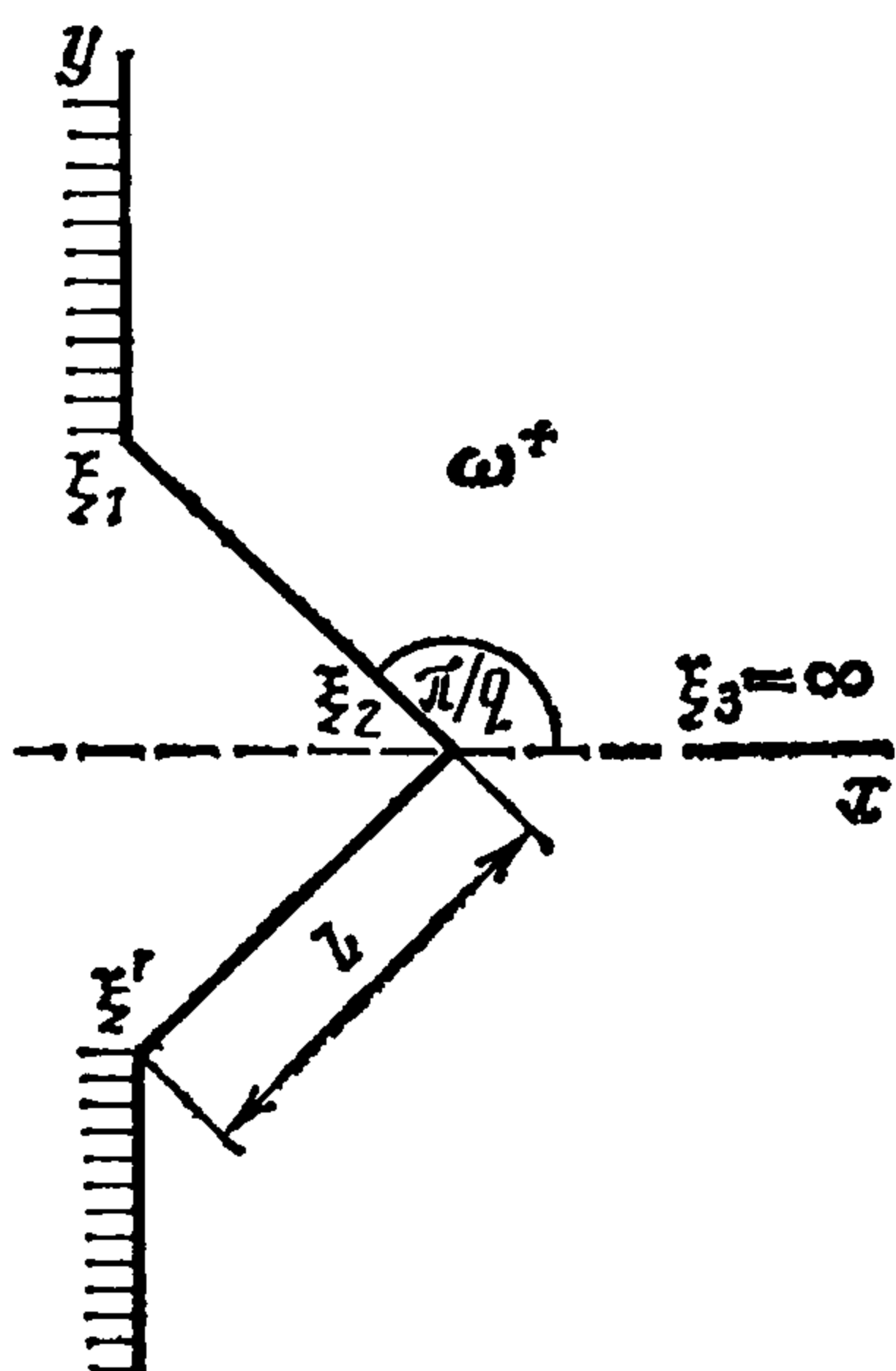
$$\kappa_0(\xi_m) = -\frac{1}{\pi} |c_m| \int_{\partial\omega} \frac{\tau_n(\xi) ds}{W(\xi) - W(\xi_m)}, \quad \varepsilon(r) = \begin{cases} O(r^{p_m-1}) & (1 < p_m < 1/2) \\ O(\sqrt{r}) & (p_m = 1/2) \end{cases}$$



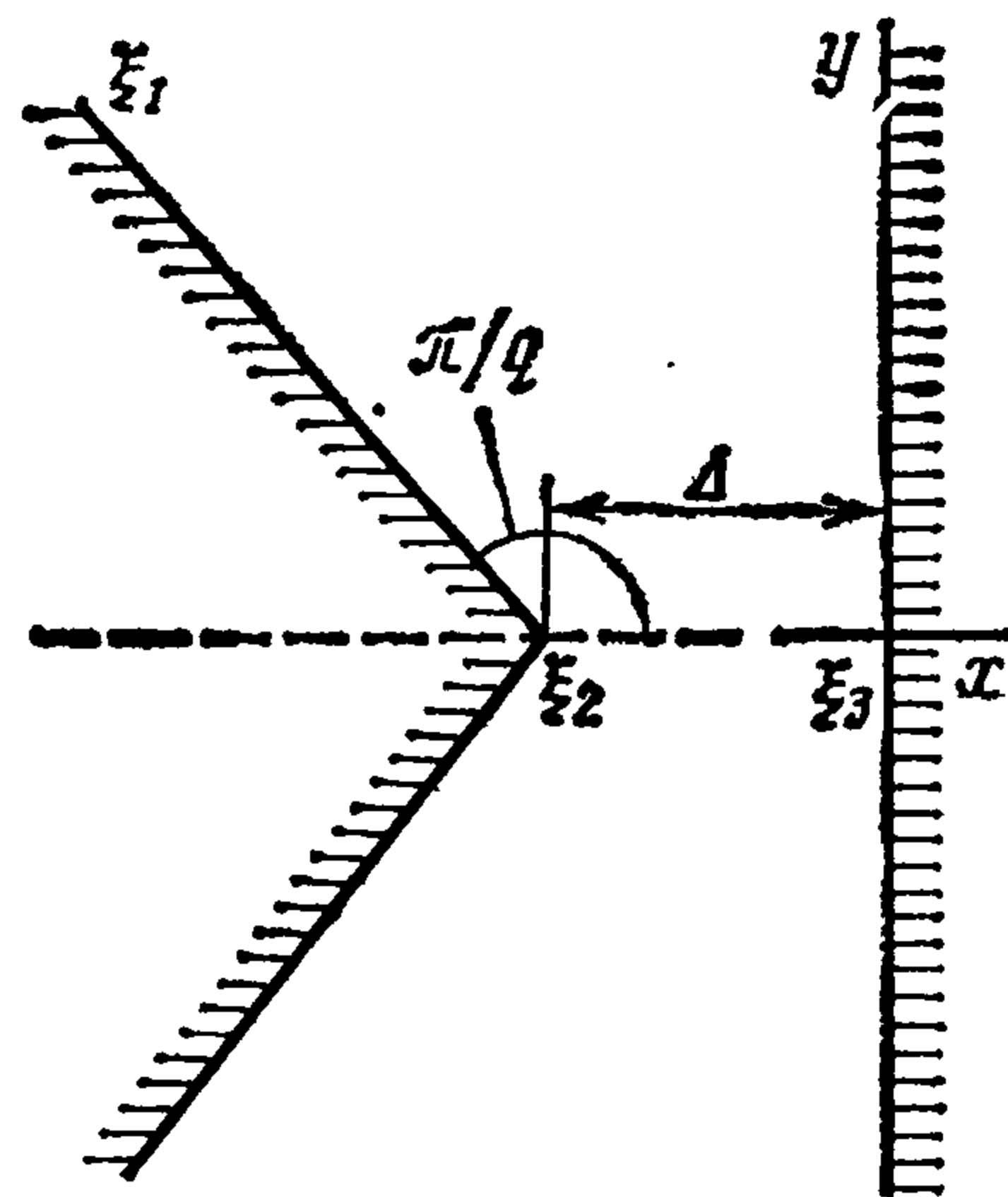
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В этих формулах π/p_m — внутренний угол многоугольной области ω в ее вершине ξ_m , такой, что $1/2 \leq p_m < 1$, а коэффициент c_m определяется из соотношения

$$W'(z) \sim c_m (z - \xi_m)^{p_m-1} \quad (z \in \bar{\omega}, z \rightarrow \xi_m) \quad (1.3)$$

Главный член этой асимптотики совпадает в случае $p = p_m = 1/2$ (т. е. в случае трещины) с соответствующим членом, указанным в других работах (например, [2, 3]).

Величина $K_{III} = \sqrt{2\pi\kappa_0}$ называется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) в точке ξ_m сингулярности поля $\tau_x(z) - i\tau_y(z)$. Из того же тождества (1.1) вытекает, что в некоторой окрестности любой конечной точки ξ_ν граничной кривой с $p_\nu \geq 1$ поле напряжений непрерывно в области ω вплоть до границы.

2. Рассмотрим случай симметричной конфигурации (фиг. 1). Именно, пусть фигура ω и граничные нагрузки симметричны относительно интервала действительной оси, причем положительное направление этой оси отвечает положительному направлению обхода области ω^+ . Одновременно действительная ось является осью краевой трещины (как на фиг. 1), либо биссектрисой угловой выточки (если на фиг. 1 снять разрез по отрезку $|\xi_{m-1}, \xi_m|$ и положить $\xi_{m-1} = \xi_m$).

Пусть π/q_k — величина внутренних углов многоугольной области $\omega^+ = \omega \cap \{z: \text{Im } z > 0\}$, $W = W(z)$ — функция, однолистно и конформно отображающая область ω^+ на полуплоскость $\text{Im } W > 0$.

Решив методом Келдыша — Седова [4] смешанную краевую задачу для функции $W_z(x, y)$, гармонической в ω^+ , получим следующую формулу для КИН в свободной вершине ξ_m краевой трещины ($q_m = 1$) и в вершине угловой выточки ($1 < q_m < 2$):

$$K_{III}(\xi_m) = T(l) \int_{\gamma^+} \sqrt{\left| \frac{h(\xi, \xi_{m+1})}{h(\xi, \xi_m)} \right|} \tau_n(\xi) ds \quad (\xi_{m+1} \neq \infty) \quad (2.1)$$

$$K_{III}(\xi_m) = \sqrt{\frac{2q_m |c_m|}{\pi}} \int_{\gamma^+} \frac{\tau_n(\xi) ds}{\sqrt{h(\xi, \xi_m)}} \quad (\xi_{m+1} = \infty) \quad (2.2)$$

$$T(l) = \sqrt{\frac{2q_m |c_m|}{\pi h(\xi_{m+1}, \xi_m)}}, \quad h(x, y) = W(x) - W(y), \quad \gamma^+ = \partial\omega^+ \setminus]\xi_m, \xi_{m+1}[$$

Здесь c_m, q_m означают то же, что c_m, p_m в (1.3).⁷

3. Рассмотрим конфигурацию с краевой трещиной (фиг. 1) и найдем асимптотику $K_{III}(\xi = x)$ при $l \rightarrow +0, l + \Delta = H = \text{const}$. В случае трещины функция $W(z)$ из (3.1) фиксирована. При помощи формулы Кристоффеля — Шварца найдем

$$c_m = W'(x) \sim |c_{m-1}| l^{q-1}, \quad h(x, \xi_{m-1}) \sim q^{-1} |c_{m-1}| l^q (l \rightarrow +0), \quad q = q_{m-1} \quad (3.1)$$

$$h(\xi_{m-1}, \xi) \sim q^{-1} |c_{m-1}| |\xi_{m-1} - \xi|^q \quad (\xi \in]\xi_{m-2}, \xi_{m-1}[, \xi \rightarrow \xi_{m-1})$$

Без ограничения общности можно считать, что $q = q_{m-1} > 1$.

Далее, для первого сомножителя в правой части формулы (2.1) имеем из (3.1)

$$T(l) \sim \sqrt{\frac{2|c_{m-1}|}{\pi h(\xi_{m+1}, \xi_m)}} l^{q-1/2} \quad (l \rightarrow +0) \quad (3.2)$$

Обозначим через γ объединение тех звеньев ломаной γ^T , которые не содержат вершины ξ_{m-1} , а часть интеграла в (2.1), распространенную на γ_0 , через $I(l)$. Очевидно

$$I(l) \sim \int_{\gamma_0} \sqrt{\left| \frac{h(\xi, \xi_{m+1})}{h(\xi, \xi_{m-1})} \right|} \tau_n(\xi) ds \quad (l \rightarrow +0)$$

Далее, подсчитаем вклад в разыскиваемую асимптотику интегралов $I_{m-1}(l), I_{m-2}(l)$, распространенных на стороны $[\xi_{m-1}, \xi_m]$ и $[\xi_{m-2}, \xi_{m-1}]$ соответственно. Положив

$$\tau_n^- = \lim_{\xi \rightarrow \xi_{m-1}+0} \tau_n(\xi + i0) = -\tau_y(\xi_{m-1})$$

из определения $I_{m-1}(l)$ и соотношений (3.1) выводим

$$\begin{aligned} I_{m-1}(l) &\sim \sqrt{h\tau_n^-} \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_{m-1}+l} \frac{d\xi}{\sqrt{|c_{m-1}|/q (l^q - (\xi - \xi_{m-1})^q)^{1/2}}} \sim \\ &\sim \tau_n^- \sqrt{\frac{hq}{|c_{m-1}|}} l^{1-q/2} \frac{1}{q} \int_0^1 s^{1/q-1} (1-s)^{-1/2} ds = -\tau_y(\xi_{m-1}) \times \\ &\times \sqrt{\frac{h}{q|c_{m-1}|}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right) \quad (l \rightarrow +0), \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right) \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/q)}{\Gamma(1/2 + 1/q)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Остается получить асимптотику интеграла

$$I_{m-2}(l) = \int_{\xi_{m-2}}^{\xi_{m-1}} \sqrt{\frac{h + h(\xi_{m-1}, \xi)}{h(x, \xi_{m+1}) + h(\xi_{m-1}, \xi)}} \tau_n(\xi) ds$$

Здесь необходимо различать три случая. Если $q_{m-1} = q > 2$, то при $l \rightarrow +0$ имеется узел асимптотики $\xi = \xi_{m-1}$. Значит,

$$\begin{aligned} I_{m-2}(l) &\sim \tau_n^+ \sqrt{\frac{hq}{|c_{m-1}|}} \int_0^{\delta} \frac{ds}{\sqrt{l^q + s^q}} \sim \tau_n^+ \sqrt{\frac{h}{q|c_{m-1}|}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right) \times \\ &\times \left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^{-1} l^{1-q/2} \quad (l \rightarrow +0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\tau_n^+ = \lim_{\xi \rightarrow 0, \xi \in]\xi_{m-2}, \xi_{m-1}[} \tau_n(\xi) = -\tau_x(\xi_{m-1}) \sin \frac{\pi}{q} + \tau_y(\xi_{m-1}) \cos \frac{\pi}{q}, \quad (q = q_{m-2} > 2)$$

Также очевидно, что при $l \rightarrow +0$

$$I_{m-2}(l) \sim \int_{\xi_{m-2}}^{\xi_{m-1}} \sqrt{\frac{h(\xi_{m+1}, \xi)}{h(\xi_{m-1}, \xi)}} \tau_n(\xi) ds, \quad 1 < q_{m-1} < 2 \quad (3.5)$$

$$I_{m-2}(l) \sim (-\tau_x(\xi_{m-1})) \sqrt{\frac{2h}{|c_{m-1}|}} \ln \frac{h}{l}, \quad q = q_{m-1} = 2 \quad (3.6)$$

Теперь из тождества $K_{III}(\xi_m) = T(l)(I(l) + I_{m-2}(l) + I_{m-1}(l))$ при помощи асимптотических формул (3.2)–(3.6) заключаем следующее.

1°. Если краевая трещина продольного сдвига образует с примыкающими к ней сторонами острые углы величины π/q , то

$$K_{III}(\xi) \sim \left(-\tau_x(\xi_{m-1}) \sqrt{\frac{2}{q}} \frac{\Gamma(1/q)}{\Gamma(1/2 + 1/q)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{q} \right) \sqrt{l} \quad (l \rightarrow +0) \quad (3.7)$$

2°. Если указанные выше углы тупые, то

$$K_{III}(\xi_m) \sim q^{-1/2} l^{(q-1)/2} K_{III}^*(\xi_{m-1}) \quad (l \rightarrow +0) \quad (3.8)$$

где в качестве $K_{III}^*(\xi_{m-1})$ получается в соответствии с (2.1) КИН в вершине ξ_{m-1} угловой выточки фигуры ω^+ , полученной из фигуры ω удалением краевой трещины $[\xi_{m-1}, \xi_m]$.

3°. Если краевая трещина перпендикулярна примыкающей к ней стороне, то

$$K_{III}(\xi_m) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} (-\tau_x(\xi_{m-1})) \sqrt{l} \ln \frac{H}{l} \quad (l \rightarrow +0) \quad (3.9)$$

Отметим частный случай п. 3°, когда примыкающая к трещине и перпендикулярная ей сторона фигуры ω свободна от внешней нагрузки. Не выписывая очевидную общую формулу, рассмотрим конфигурацию (фиг. 2), где на соответствующих промежутках

$$-\tau_x(0, y) = 0, \quad \tau_y(x, \pm 0) = \tau(x), \quad \tau_x(H - 0, y) = \varphi(y)$$

и последняя функция — четная.

По формуле (2.1) с $\xi = \infty$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \xi_m = l$, $\xi = H$, если, к примеру, $W(z) = -\cos(\pi z/H)$, получим

$$K_{III}(l) = \sqrt{\frac{2}{H}} \operatorname{tg} L \left(\int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos X}{\cos X - \cos L}} \tau(x) dx + \int_0^\infty \sqrt{\frac{\operatorname{ch} Y - 1}{\operatorname{ch} Y + \cos L}} \varphi(y) dy \right) \quad (3.10)$$

$$(L = \pi l/H, \quad X = \pi x/H, \quad Y = \pi y/H)$$

(эквивалентная формула при $\varphi(y) = 0$, $-\infty < y < \infty$ имеется в [5]).

Отсюда находим

$$K_{III}(l) = 2 \sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_0^l \frac{\tau(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} + O\left(\frac{1}{H^2}\right) \quad (H \rightarrow \infty, l = \text{const}) \quad (3.11)$$

Первое слагаемое правой части соответствует КИН в свободной вершине краевой трещины, перпендикулярной границе полуплоскости. В частности, при $T(x) = T = \text{const}$ имеем известную формулу $K_{III}(l) = T \sqrt{\pi l}$. Тем самым в предельном процессе $l = \text{const}$, $H \rightarrow +0$ выполнен известный «принцип микроскопа». С другой стороны, пусть в той же конфигурации рассматривается предельный процесс $l \rightarrow +0$, $H = \text{const}$ (как и выше, содержащийся в общей схеме $l/H \rightarrow +0$). Видно, что

$$K_{III}(l) \sim \sqrt{\pi l} \left(\tau + \frac{1}{H} \int_0^\infty \operatorname{th} \frac{Y}{2} \varphi(y) dy \right) \quad (l \rightarrow +0), \quad H = \text{const}, \quad \tau = \tau(+0)$$

Характер этой асимптотики не вполне отвечает обсуждаемому принципу, поскольку значимый вклад в $K_{III}(l)$ дает и нагрузка $T_x(H - 0, y) = \varphi(y)$. Лишь при дополнительном предельном переходе $H \rightarrow +\infty$ получаем формулу для полуплоскости с перпендикулярной ее границе краевой трещиной.

4. Рассмотрим конфигурацию с краевой трещиной (фиг. 1) и найдем асимптотику $K_{III}(\xi_m = x)$ при $\Delta \rightarrow +0$, $H = \text{const}$. С этой целью предварительно продолжим функцию $\tau_n(x)$ с отрезка $[\xi_{m-1}, \xi_m]$ на промежуток $[\xi_{m-1}, \xi_{m+1}]$ с сохранением непрерывности и абсолютной интегрируемости. Из соотношения (2.1) найдем (см. также [7, 8])

$$K_{III}(\xi_m) \sim \sqrt{\frac{2q_{m-1}}{\pi \Delta}} Q \quad (\Delta \rightarrow +0), \quad H = \text{const}, \quad Q = \int_{\partial \omega^+} \tau_n(\xi) d\xi \quad (4.1)$$

Заметим, что если ξ_{m+1} — вершина соосной трещины, то $q_{m+1} = 1/2$, а для точки ξ_{m+1} на свободной поверхности, перпендикулярной исходной трещине, будет $q_{m+1} = 1$. В рамках разбираемой модели получается, что при наличии внутренних дислокаций раз-

рушение несколько более интенсивно идет снаружи, чем внутри (хотя порядок величины $K_{III} \approx \Delta^{-1/2}$ ($\Delta \rightarrow +0$) в обоих случаях одинаков). Другими словами, близость граничной поверхности провоцирует разрушение в большей мере, чем близость другой сингулярности.

5. На значительно более простых моделях коснемся аналогичных вопросов для угловой выточки (фиг. 3, 4).

На фиг. 3 считаем нагруженными лишь берега выточки, причем постоянной нагрузкой $\tau(\xi) = \tau = \text{const}$. Выполнив в формуле (3.1) замену переменной интегрирования $\xi = W(u)$, при учете сказанного о нагрузке будем иметь

$$K_{III}(\xi_2) = r \sqrt{2/\pi} (q |F_2|)^{1-q/2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{|\xi'(u)| du}{|F_2| \sqrt{|u_2 - u|}} \quad (5.1)$$

Здесь u_1, u_2 — образы точек ξ_1, ξ_2 при отображении $W = W(z)$, а коэффициент F_2 определяется из соотношения

$$Z'(W) \sim F_2 (W - u_2)^{1/q-1} \quad (\text{Im } W \geq 0, W \rightarrow u_2)$$

Полагая $z(\infty) = \infty, z(0) = \xi_1, z(1) = \xi_2$, получим $z'(W) = c W^{1/2-1/q} (W - 1)^{1/q-1}$ и уравнение для определения $|c|$ в виде

$$|\xi_2 - \xi_1| = l = |\xi| \int_0^1 u^{1/2-1/q} (1-u)^{1/q-1} du$$

Отсюда по формуле (5.1)

$$K_{III}(\xi_2) \sim \tau \sqrt{\pi} \left| \cos \frac{\pi}{q} \right|^{-1} 2^{q-1/2} \left(\frac{q \sqrt{\pi} l}{\Gamma(3/2 - 1/q) \Gamma(1/q)} \right)^{1-q/2} (l \rightarrow +0), \quad 1 \leq q \leq 2 \quad (5.2)$$

При $q = 1$ имеем, как выше, $K_{III}(\xi_2) \sim \tau \sqrt{\pi l}$. С приближением q к значению $q = 2$ зависимость от l ослабевает, зато коэффициент при $l^{1-q/2}$ неограниченно возрастает. Это соответствует общему принципу: при монотонном увеличении показателя сингулярности до $+0$ соответствующий КИН возрастает до $+\infty$.

На фиг. 4 можем считать нагруженными все стороны фигуры. Используя формулу (3.1) и соотношение $|c_m| = q_m^{1-q} |F_m|^{-q}$, получим

$$K_{III}(\xi_2) \sim c(q) Q \Delta^{-q/2} \quad (\Delta \rightarrow 0), \quad 0 \leq q < 2 \quad (5.3)$$

где Q , как и выше, означает интеграл нагрузки, а коэффициент $C(q)$ дается формулой

$$C(q) = \sqrt{2/\pi} q^{1-q/2} (B(1/2, 1/q))^{q/2}, \quad 1 \leq q < 2 \quad (5.4)$$

Полагая в (4.1) $q_{m+1} = 1/2$ или в (5.4) $q = 1$, получим для случая выхода трещины на перпендикулярную ей свободную поверхность соотношение

$$K_{III} \sim Q/\sqrt{\pi \Delta} \quad (\Delta \rightarrow +0) \quad (5.5)$$

Автор благодарит В. Д. Кулиева за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. / Аналитические функции. / М.: Наука, 1968. 471 с.
2. Си (Sih G. C.). Распределение напряжений вблизи концов трещины продольного сдвига // Прикл. механика. 1965. Т 32. № 1. С. 57—65.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. / Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. / Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Седов Л. И. / Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / М.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
5. Sih G. C. External cracks under longitudinal shear // J. Franklin Inst. 1965. V. 280. № 2. P. 139—149.
6. Черепанов Г. П. / Механика хрупкого разрушения. / М.: Мир, 1974. 640 с.
7. Садыхов В. Э. Коэффициент интенсивности напряжения для однородной среды при продольном сдвиге // Докл. АН АзССР. 1988. Т. 44. № 10. С. 3—6.
8. Садыхов В. Э. К проблеме разрушения двухслойных сред с одним слоем, разорванным трещиной сдвига // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 1. С. 58—61.