

8. *Chou Y. T.* The energy of circular dislocation loops in thin plates // *Acta Met.* 1963. V. 11. N 8. P. 829—834.
9. *Willis J. R.* The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1965. V. 18. N 4. P. 419—433.
10. *Tupholme C. E.* Dislocation loops in hexagonal crystals // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1974. V. 22. N 4. P. 309—321.
11. *Dundurs J., Mura T.* Interaction between an edge dislocation and circular inclusion // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1964. V. 12. N 3. P. 177—189.
12. *Fukuzaki K., Shioya S.* On the interaction between an edge dislocation and two circular inclusions in an infinite medium // *Intern. J. Eng. Sci.* 1986. V. 24. N 12. P. 1771—1787.
13. *Fukuzaki K., Shioya S.* On the interaction between an edge dislocation and two circular inclusions in an infinite medium (continued report) // *Intern. J. Eng. Sci.* 1987. V. 25. N 8. P. 1017—1027.
14. *Kröner E.* Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // *Z. Phys.* 1953. V. 136. N4. P. 402—410.
15. *Кузнецов С. В.* Фундаментальные решения уравнения Ламе для анизотропных сред // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1989. № 4. С. 50—54.
16. *Volterra V.* Sur l'équilibre des corps elastiques multiplement connexes // *Ann. Ecol. Norm. Super.* 1907. V. 24. P. 401—517.
17. *Burgers J. M.* Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice // *Proc. Kon. Neder. Akad. Wetensch.* 1939. V. 42. P. 293—325; P. 378—399.
18. *Peach M. O., Koehler J. S.* The forces exerted in dislocations and the stress field produced by them // *Phys. Rev. Ser. 2.* 1950. V. 80. N 3. P. 436—439.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1989

УДК 539.3

© 1991 г.]

В. С. Ленский

РЕЛЕЕВСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НЕСВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Исследуются поверхностные стационарные волны в упругом полупространстве с граничными условиями, соответствующими комбинации винклеровской модели и инерционного слоя на границе. Обнаружено, что скорость распространения гармонической волны зависит от частоты, причем при наличии ограничений в нормальном к границе направлении имеет место запираание низких частот при совместном учете влияния упругой жесткости и инерционности границы и при отсутствии влияния инерционности опирания. Запираание частот не имеет места при ограничении перемещений вдоль границы и при пренебрежимости влиянием упругой жесткости на нормальные перемещения границы.]

1. Нормальные ограничения. В упругом полупространстве $y \geq 0$ со скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b рассмотрим плоское релеевское движение, задаваемое потенциалами

$$\varphi(x, y, t) = A \sin \omega \xi e^{-\omega \alpha y}, \quad \psi(x, y, t) = B \cos \omega \xi e^{-\omega \beta y} \quad (1.1)$$

$$\xi = \frac{x}{p} - t, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{a^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}}, \quad A, B = \text{const}$$

Здесь $p \leq b$ — скорость распространения волн, ω — частота колебаний. При этом координаты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений таковы:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = (p^{-1} A e^{-\omega \alpha y} - \beta B e^{-\omega \beta y}) \omega \cos \omega \xi \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = (-\alpha A e^{-\omega \alpha y} + p^{-1} B e^{-\omega \beta y}) \omega \sin \omega \xi \\ \sigma_{xy}/(\mu \omega^2) &= (-2\alpha p^{-1} A e^{-\omega \alpha y} + (\beta^2 + p^{-2}) B e^{-\omega \beta y}) \cos \omega \xi \\ \sigma_{yy}/(\mu \omega^2) &= ((\beta^2 + p^{-2}) A e^{-\omega \alpha y} - 2\beta p^{-1} B e^{-\omega \beta y}) \sin \omega \xi \end{aligned} \quad (1.2)$$

где μ — модуль сдвига полупространства.

Граничные условия имеют вид (k_1 — жесткость основания, m_1 — инерционное сопротивление)

$$\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = k_1 v - m_1 \partial^2 v / \partial t^2 \text{ при } y = 0 \quad (1.3)$$

Подставив значения напряжений в равенства (1.3), приходим к системе двух линейных однородных уравнений для определения A и B . Условие существования нетривиального решения приводит к уравнению относительно величины $q \equiv p/b \leq 1$:

$$Q_1(q) = (k_1/\omega - m_1\omega)b/\mu \quad (1.4)$$

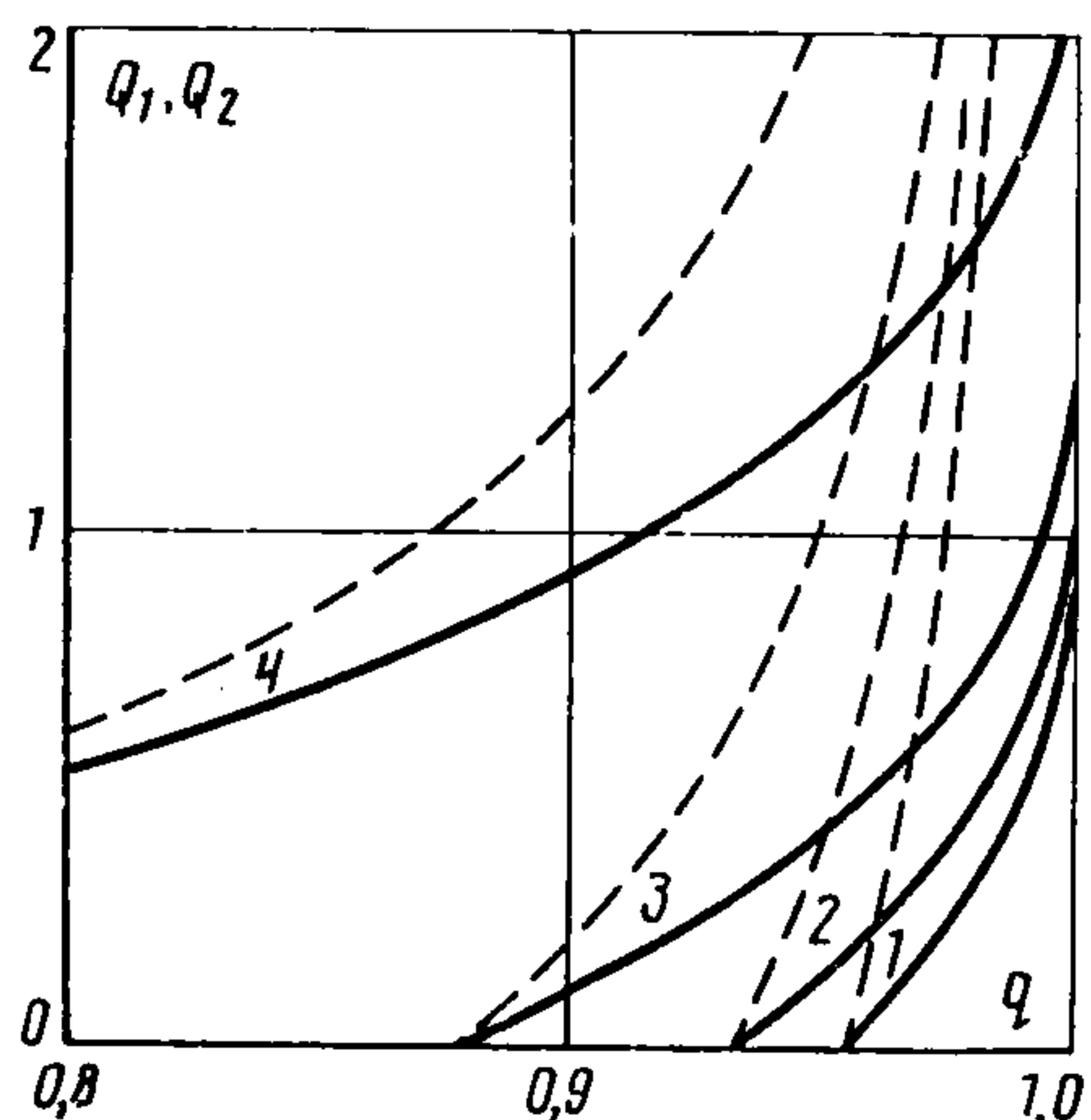
Здесь

$$Q_1(q) = R(q)/W_1(q), \quad R(q) = (2 - q^2)^2 - 4\sqrt{1 - r^2q^2}\sqrt{1 - q^2}$$

$$W_1(q) = q^3 \sqrt{1 - r^2q^2}, \quad r = b/a$$

причем R — левая часть уравнения Релея для полупространства со свободной границей.

Функция $Q_1(q)$ монотонно возрастает от нуля при $q_{R_1} = \frac{c_R}{b} < 1$ (c_R — скорость волны Релея в свободном полупространстве) до значения $Q_1(1) > 0$, ограниченного для реальных значений $r \in [0, 1]$. Графики этой функции показаны на фигуре сплошными линиями 1—4 для $r = 0,1; 0,5; 0,7; 0,9$. При этом $q \rightarrow q_R$ ($p \rightarrow c_R$) при $\omega \rightarrow \infty$, и движение релеевского типа не существует при



$(\frac{k_1}{\omega} - m_1\omega)b/\mu \leq Q_1(1)$. Это квадратное неравенство для каждого фиксированного значения r имеет два корня, один из которых $\omega_k > 0$. Для частот $\omega \leq \omega_k$ релеевское движение не реализуется (запирание низких частот). Запирание низких частот ($\omega \leq k_1 b / (\mu Q_1(1))$) имеет место также при $m_1 = 0$. Если $k_1 = 0$, запирания частот нет и скорости волн меньше релеевской для всех ω .

Для фиксированного значения отношения скоростей волн r возможные скорости распространения релеевского движения охватывают интервал от $q = q_R$ до $q = 1$. Ниже приведены значения q_R и $Q_1(1)$ для нескольких значений r для материалов твердых тел (скорость q считалась равной релеевской q_R , когда значение R не превышало 10^{-5})

r	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
q_R	0,955	0,949	0,932	0,878	0,608
$Q_1(1)$	1,005	1,048	1,155	1,400	2,294

2. Поперечные ограничения. Граничные условия

$$\sigma_{xy} = k_2 u - m_2 \partial^2 u / \partial t^2, \sigma_{yy} = 0 \text{ при } y = 0 \quad (2.1)$$

при использовании значений (1.2) для перемещений и напряжений приводят к уравнению

$$Q_2(q) = (k_2/\omega - m_2\omega), \quad Q_2 = R/W_2, \quad W_2 = q^3 \sqrt{1 - q^2} \quad (2.2)$$

Функция $Q_2(q)$ монотонно растет от $-\infty$ при $q = 0$ до $+\infty$ при $q = 1$ (штриховые линии 1—4 на фигуре для $r = 0,1; 0,5; 0,7; 0,9$), так что (2.2) имеет действительный корень при любых k_2 и m_2 : запирание частот не имеет места. При этом $q = q_R$ при $\omega = \omega_0 \equiv \sqrt{k_2/m_2}$ и $q < q_R$ при $\omega > \omega_0$. Скорость распространения меньше релеевской для всех ω , если $k_2 = 0$.

3. Смешанное основание Винклера. Граничные условия

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = k_1 v(x, 0, t), \sigma_{xy} = k_2 u(x, 0, t)$$

после подстановки в них выражений (1.2) и приравнивания нулю детерминанта системы линейных однородных уравнений относительно постоянных A и B приводят к следующему уравнению для определения относительной скорости q : | |

$$R(q) - \frac{bq^3}{\mu\omega} (k_1 \sqrt{1 - r^2q^2} + k_2 \sqrt{1 - q^2}) - \frac{k_1 k_2}{\mu^2 \omega^2} (1 - \sqrt{1 - r^2q^2} \sqrt{1 - q^2}) \quad (3.1)$$

При $q_k < q < 1$ дискриминант уравнения (3.1) положителен, причем один из корней $\omega > 0$. Аналогичный вывод справедлив при совместном учете упругой жесткости и инерционности опирания на границе.

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 17. No. 253. P. 4—11.
2. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; North-Holland, 1975. 425 p.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1990

УДК 539.375

© 1991 г.

В. Э. Садыхов

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ
НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО
СДВИГА**

Для произвольной симметричной односвязной конфигурации получена асимптотика коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в свободной вершине краевой трещины продольного сдвига в случае сравнительно малой длины трещины или малом расстоянии от конца трещины до границы фигуры. В более простых конфигурациях рассмотрены аналогичные вопросы для КИН в вершине угловой выточки.

1. Продольный сдвиг однородного изотропного упругого тела фигуры ω характеризуется смещением $W_z(x, y)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа $\nabla_{xy}^2 W_z = 0$ ($(x, y) \in \omega$), и напряжениями $\tau_{xy} = \tau_x = \mu \partial W_z / \partial x$, $\tau_{yz} = \tau_y = \mu \partial W_z / \partial y$ ($\mu = \text{const}$ — характеристика материала). Рассмотрим в расширенной комплексной плоскости C_z : $z = x + iy$ односвязную многоугольную область ω , для которой точка $z = \infty$ является граничной либо внешней. Пусть к граничной кривой $\partial\omega$ приложена нагрузка $\tau_n(\xi) = \tau_x(\xi) \sin \theta - \tau_y(\xi) \cos \theta$, где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к $\partial\omega$, а $\theta = \theta(\xi)$ — аргумент вектора касательной к $\partial\omega$ в ее точке ξ . Действительнозначные функции $\tau_x(\xi)$, $\tau_y(\xi)$ ($\xi \in \partial\omega$) непрерывны на $\partial\omega$. Если $\infty \in \partial\omega$, то для каждой вершины потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\partial\omega} \ln |W(\xi) - W(\xi_k)| \tau_n(\xi) ds < \infty$$

Здесь ds — элемент длины на $\partial\omega$, а функция $W = W(z)$ ($z \in \omega$) однолистно и конформно отображает область $\omega \subset C_z$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } W > 0$ комплексной плоскости C_W (если $W(\xi_k) = \infty$, это слагаемое в предыдущей формуле исчезает). Еще потребуем, чтобы в случае $\infty \in \partial\omega$ выполнялось условие самоуравновешенности

$$\int_{\partial\omega} \tau_n(\xi) ds = 0$$

В этих предложениях, решив задачу Неймана для функции $W_z(x, y)$, гармонической в области ω , получим для поля напряжений формулу

$$\tau_x(z) - i\tau_y(z) = \frac{1}{\pi} W'(z) \int_{\partial\omega} \frac{\tau_n(\xi) ds}{W(\xi) - W(z)} \quad (z \in \omega) \quad (1.1)$$

Отсюда и при помощи формулы Кристоффеля — Шварца [1] заключаем, что точками сингулярности поля напряжений являются лишь вершины угловых выточек и свободные вершины краевых трещин. Асимптотический анализ интеграла (1.1) дает

$$\begin{aligned} \tau_x(\xi_m + re^{i\varphi}) - i\tau_y(\xi + re^{i\varphi}) = & -i\kappa_0(\xi_m) (re^{i\varphi})^{p_m-1} + \\ & + (\tau_x(\xi_m) - i\tau_y(\xi_m)) + \varepsilon(r) \quad (r \rightarrow +0, |\varphi| < 1/2\pi/\rho_m) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\kappa_0(\xi_m) = -\frac{1}{\pi} |c_m| \int_{\partial\omega} \frac{\tau_n(\xi) ds}{W(\xi) - W(\xi_m)}, \quad \varepsilon(r) = \begin{cases} O(r^{p_m-1}) & (1 < p_m < 1/2) \\ O(\sqrt{r}) & (p_m = 1/2) \end{cases}$$