УДК 539.3
© 1991 г.

С. В. Кузнецов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИСЛОКАЦИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается взаимодействие двух удаленных дислокаций, находящихся в анизотропной среде с упругой анизотропией общего вида, определяются силы, действующие на дислокационные дефекты. Решение строится методом мультиполярных разложений.

Механические свойства кристаллических тел в значительной степени зависят от наличия в них дефектов и взаимодействия последних друг с другом. Энергия взаимодействия дефектов является основным фактором, определяющим их взаимное расположение и ориентацию в кристалле.

Имеющиеся публикации в этом направлении посвящены либо определению энергии возникновения изолированной дислокационной петли [1—3], связанные с этим вопросом о силах, действующих на изолированный дефект [4], и полях напряжений в окрестности дислокационной петли [5], либо исследованию взаимодействия дислокационных дефектов друг с другом [6—10], или же с посторонними включениями [11—13].

Несмотря на то что большинство кристаллов является упруго анизотропными, исследования по определению энергии взаимодействия дислокаций выполнялись в основном для изотропных или трансверсально-изотропных (гексагональных) кристаллов. Это объясняется необходимостью использования фундаментальных решений уравнений равновесия, через производные от которых в большинстве случаев выражается энергия взаимодействия дислокаций.

В замкнутом виде фундаментальные решения уравнений равновесия построены для изотропных сред (решение Кельвина) и одного подкласса ортотропных материалов, включающего в себя трансверсально-изотропные среды [14]. В общем случае упругой анизотропии известны лишь численные способы построения фундаментальных решений [15].

Ниже на основании подхода [15] получено выражение для определения энергии и сил взаимодействия двух удаленных дислокационных петель в анизотропной среде с анизотропией общего вида.

1. Основные уравнения, операторы и символы. Рассматривается анизотропная упругая среда, уравнения статики (равновесия) которой имеют вид

$$\mathbf{A}\,(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\operatorname{div} \mathbf{C}\cdot\cdot\,(\nabla \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{C}$ — четырехвалентный строго эллиптичный тензор упругости:

$$(\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\xi})\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot(\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \in R^3, \ \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \neq 0 \tag{1.2}$$

Предполагается, что исследуемая среда гиперупругая, что обеспечивает симметрию тензора $\mathbf{C}$ по крайним парам индексов: $C^{mnij} = C^{ijmn}$. Условие (1.2) обеспечивает эллиптичность матричного символа $\mathbf{A}^*$:

$$\mathbf{A}^*\,(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^2 \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\xi} \tag{1.3}$$

полученного применением преобразования Фурье

$$f^*\,(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{R^3} f\,(\mathbf{x}) \exp\,(-2\pi i\, \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) dx, \ f \in L^2\,(R^3)$$

к уравнению (1.1).

Используя символ $\mathbf{A}^*$, легко построить обратный символ $\mathbf{E}^*$, представляющий собой преобразованное по Фурье фундаментальное решение:

$$\mathbf{E}^*\,(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_0^*\,(\boldsymbol{\xi})/\det \mathbf{A}^*\,(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}_0^*$ — матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^*$. Формула (1.4) показывает, что символ $\mathbf{E}^*$ эллиптичен, вещественно аналитичен всюду в $R^3 \setminus 0$ и однороден по $|\,\boldsymbol{\xi}\,|$ степени —2. Для дальнейшего потребуется также символ оператора напряжений

$$\mathbf{T}_\nu^*\,(\boldsymbol{\xi}) = 2\pi i \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\xi} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к исследуемой поверхности. Из (1.5 следует, что в случае гиперупругого материала транспонированный символ $\mathbf{T}_{\mathbf{v}}^{*t}$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{\mathbf{v}}^{*t}(\xi) = 2\pi i \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \tag{1.6}$$

2. Представление решения. Поле перемещений в среде, содержащей изолированную дислокацию, может быть задано в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}_1}(\partial_y)\, \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}')\, dy', \tag{2.1}$$

где $\mathbf{b}_1$ — заданный в Ω_1 вектор Бюргерса, Ω_1 — плоская область, ограниченная контуром $\partial\Omega_1$ — петлей дислокации.

Замечание. Представление (2.1) по существу совпадает с выражением, полученным Вольтеррой [16] для описания перемещений в кристалле, содержащем заданную дислокацию. При этом рассматривался [16] общий случай, когда вектор $\mathbf{b}_1$ мог быть переменным, а зона дислокации Ω_1 представляла собой часть некоторой криволинейной поверхности в R^3. В последствии Бюргерс [17] предложил рассматривать дислокации с постоянным вектором $\mathbf{b}_1$, названным вектором Бюргерса. Для постоянного вектора $\mathbf{b}_1$ представление (2.1) инвариантно по отношению к поверхности, несущей дислокацию. Именно поэтому, когда $\partial\Omega_1$ — некоторая плоская замкнутая кривая, можно говорить о плоской области, несущей дислокацию. В [17] и позднее в [18] для изотропной упругой среды были получены формулы, сводящие интеграл по Ω_1 в (2.1) к контурному интегралу по $\partial\Omega_1$. В случае анизотропной среды с анизотропией общего вида такие формулы неизвестны.

Напряжение на плоскости, где расположена вторая дислокационная петля Ω_2, определяется по формуле

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{\mathbf{v}_2}(\partial_x) \int_{\Omega_1} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}_1}(\partial_y)\, \mathbf{E}(\mathbf{x} - y')\, dy', \qquad \mathbf{x} \in \Omega_2 \tag{2.2}$$

Энергия взаимодействия двух удаленных дислокационных петель представляет собой работу, необходимую для формирования второй дислокационной петли в поле напряжений, созданном первой петлей [9, 10], т. е.

$$W = -\int_{\Omega_2} \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}')\, dx' \approx -\operatorname{mes}(\Omega_1) \operatorname{mes}(\Omega_2)\, \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}_2}(\partial_x)\, \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}_1}(\partial_y)\, \underline{\mathbf{E}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1)} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$ — координаты «центров» дислокаций Ω_1 и Ω_2 соответственно. В дальнейшем удобно отождествлять $\mathbf{y}_1$ с началом координат в R^3.

Выражение (2.3)' содержит неизвестное фундаментальное решение $\mathbf{E}$. Для получения необходимых расчетных формул рассмотрим символ интегро-дифференциального оператора

$$\mathbf{G}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\mathbf{T}_{\mathbf{v}_2}{}^{t}(\partial_x)\mathbf{T}_{\mathbf{v}_1}(\partial_y)\, \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{2.4}$$

При учете (1.5), (1.6) символ $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ принимает вид

$$\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}(\xi) = 4\pi^2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \xi) \cdot \mathbf{E} \cdot (\xi \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_1) \tag{2.5}$$

3. Энергия и силы взаимодействия. В случае, когда материал исследуемой среды гиперупругий и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, т. е. дислокации одинаково ориентированы, справедливо

Предложение 1. Символ $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ положительно полуопределен.

Доказательство основано на строгой эллиптичности символа $\mathbf{E}^*$, обеспечивающей выполнение неравенства

$$\eta \cdot \mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \cdot \eta = 4\pi^2 ((\eta \otimes \mathbf{v}) \cdot\cdot\, \mathbf{C} \cdot \xi) \cdot \mathbf{E}^*(\xi) \cdot (\xi \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{v} \otimes \eta)) \geqslant 0$$

Предложение 2. Оператор $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ представим в виде $\mathbf{G}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} = \overset{\circ}{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} + \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$, где $\overset{\circ}{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ — постоянный оператор (матрица), а $\mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ — матричный сингулярный оператор.

Доказательство. Ввиду однородности символа $\mathbf{E}^*$ по $|\xi|$ степени —2, символ $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ оказывается однородным степени 0. Принимая вещественную аналитичность $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ в $R^3 \setminus 0$ и теорему Марцинкевича о мультипликаторах, получаем требуемый результат. При этом если среднее значение (при интегрировании по единичной сфере в R^3) какой-либо компоненты символа $\mathbf{G}^*_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}$ отлично от нуля, то соответствующая компонента $\overset{\circ}{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ также отлична от нуля.

При учете (2.3) формулу для энергии запишем в виде

$$W \approx \mathrm{mes}\,(\Omega_1)\mathrm{mes}\,(\Omega_2)\,\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{G}^1_{\nu_1,\,\nu_2}\cdot\mathbf{b}_1 \tag{3.1}$$

Конкретный вид сингулярного ядра $\mathbf{G}^1_{\nu_1,\,\nu_2}$ определяется следующим образом. Пусть задано разложение символа $\mathbf{G}^*_{\nu_1,\,\nu_2}$ в ряд по сферическим гармоникам:

$$\mathbf{G}^*_{\nu_1,\,\nu_2}(\xi') = \sum_{p=0,\,2\,\ldots}^{\infty}\;\sum_{k=1}^{2p+1}\mathbf{G}^{p,\,k}_{\nu_1,\,\nu_2}Y_k{}^p(\xi'),\qquad \xi'\in S \tag{3.2}$$

где $Y_k{}^p$ — сферические гармоники, а матричные коэффициенты $\mathbf{G}^{p,\,k}_{\nu_1,\,\nu_2}$ определяются интегрированием по сфере единичного радиуса в R^3

$$\mathbf{G}^{p,\,k}_{\nu_1,\,\nu_2} = (2\pi)^{-2}\int\limits_S \mathbf{G}^*_{\nu_1,\,\nu_2}(\xi)\,Y_k{}^p(\xi')\,d\xi'$$

Тот факт, что в разложении (3.2) присутствуют лишь гармоники четных степеней, обусловлен положительной однородностью символа $\mathbf{G}^*_{\nu_1,\,\nu_2}$. Обратное преобразование Фурье (3.2) дает

$$\mathbf{G}^1_{\nu_1,\,\nu_2}(\mathbf{x}) = \pi^{-3/2}\sum_{p=2,\,4,\,\ldots}^{\infty}(-1)^{p/2}\,\frac{\Gamma((p+3)/2)}{\Gamma(p/2)}\sum_{k=1}^{2p+1}\mathbf{G}^{p,\,k}_{\nu_1,\,\nu_2}\,\frac{Y_k{}^p(\mathbf{x}')}{|x|^3} \tag{3.3}$$

С энергией взаимодействия связана сила взаимодействия дислокаций: $\mathrm{F} = \nabla W$. Рассмотрение радиальной компоненты $F_r = -(\nabla W\cdot\mathbf{r}) = -\partial_r W$ показывает, что при $F_r < 0$ происходит взаимное притяжение дислокаций, а при $F_r > 0$ — их отталкивание. Принимая во внимание формулу (3.1) и представление (3.3), видно, что компонента F_r прямо пропорциональна энергии дислокации:

$$F_r = -3W/\,|\,x\,| \tag{3.4}$$

причем для F_r выполняется асимптотическая оценка $F_r = O\,(\,|\,x\,|^{-4})$, $|\,x\,| \to \infty$. Таким образом, для определения зон взаимного притяжения или отталкивания необходимо в соответствии с (3.4) вычислить энергию взаимодействия на единичной сфере S в R^3.

Из (3.4) может быть получено выражение для тангенциальной составляющей

$$F_\theta = \mathbf{F} - F_r\mathbf{x} = -\nabla W - 3W\,|x\,|^{-2}\mathbf{x} \tag{3.5}$$

с асимптотической оценкой $F_\theta = O\,(|\,x\,|^{-3})$, $|\,x\,| \to \infty$.

Если предположить унимодальность W в пределах зон постоянного знака на S, то формула $\mathbf{F} = -\nabla W$ будет определять движение дислокационной петли Ω_2 по отношению Ω_1. Для петли Ω_2, находящейся в зоне взаимного притяжения ($W > 0$) будет происходить движение к Ω_1 с одновременным перемещением в зону ближайшего (отрицательного) относительного минимума W. Далее в соответствии с (3.4) происходит движение по радиусу от петли Ω_1.

На основании проведенного анализа и асимптотических оценок, вытекающих из формул (3.4), (3.5), можно заключить, что стенки дислокаций должны выстраиваться на линиях, характеризуемых направлениями, на которых W достигает относительных минимумов. Этот результат, обобщающий соответствующие исследования [8, 10]. справедлив для сред с произвольной упругой анизотропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nabarro F. R. N.* The mathematical theory of stationary dislocations // Adv. Phys. 1952. V. 1. N 3. P. 271—394.
2. *Chou Y. T.*, *Eshelby J. D.* The energy and line tension of a dislocation in a hexagonal crystal // J. Mech. and Phys. Solids. 1962. V. 10. N 1. P. 27—34.
3. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 103 с.
4. *Batra R. C.* The force on a lattice defect in an elastic body // J. Elast. 1987. V. 17. N 1. P. 3—8.
5. *Ohr S. M.* Anisotropic elasticity of a prismatic dislocation loop in a hexagonal crystal // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. N 4. P. 1361—1365.
6. *Cottrell A. H.* Dislocation and Plastic Flow Crystals. Oxford: Clarendon press, 1956. 224 p.
7. *Chou Y. T.* Interaction of parallel dislocations in a hexagonal crystal // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. N9. P. 2747—2751.

8. *Chou Y. T.* The energy of circular dislocation loops in thin plates // Acta Met. 1963. V. 11. N 8. P. 829—834.
9. *Willis J. R.* The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1965. V. 18. N 4. P. 419—433.
10. *Tupholme C. E.* Dislocation loops in hexagonal crystals // J. Mech. and Phys. Solids. 1974. V. 22. N 4. P. 309—321.
11. *Dundurs J., Mura T.* Interaction between an edge dislocation and circular inclusion // J. Mech. and Phys. Solids. 1964. V. 12. N 3. P. 177—189.
12. *Fukuzaki K., Shioya S.* On the interaction between an edge dislocation and two circular inclusions in an infinite medium // Intern. J. Eng. Sci. 1986. V. 24. N 12. P. 1771—1787.
13. *Fukuzaki K., Shioya S.* On the interaction between an edge dislocation and two circular inclusions in an infinite medium (continued report) // Intern. J. Eng. Sci. 1987. V. 25. N 8. P. 1017—1027.
14. *Kröner E.* Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // Z. Phys. 1953. V. 136. N4. P. 402—410.
15. *Кузнецов С. В.* Фундаментальные решения уравнения Ламе для анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50—54.
16. *Volterra V.* Sur l'equilibre des corps elastiques multiplement connexes // Ann. Ecol. Norm. Super. 1907. V. 24. P. 401—517.
17. *Burgers J. M.* Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice // Proc. Kon. Neder. Akad. Wetensch. 1939. V. 42. P. 293—325; P. 378—399.
18. *Peach M. O., Koehler J. S.* The forces exerted in dislocations and the stress field produced by them // Phys. Rev. Ser. 2. 1950. V. 80. N 3. P. 436—439.

Москва

Поступила в редакцию 28.VI.1989

УДК 539.3
© 1991 г.

В. С. Ленский

РЕЛЕЕВСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НЕСВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Исследуются поверхностные стационарные волны в упругом полупространстве с граничными условиями, соответствующими комбинации винклеровской модели и инерционного слоя на границе. Обнаружено, что скорость распространения гармонической волны зависит от частоты, причем при наличии ограничений в нормальном к границе направлении имеет место запирание низких частот при совместном учете влияния упругой жесткости и инерционности границы и при отсутствии влияния инерционности опирания. Запирание частот не имеет места при ограничении перемещений вдоль границы и при пренебрежимости влиянием упругой жесткости на нормальные перемещения границы.

1. Нормальные ограничения. В упругом полупространстве $y \geqslant 0$ со скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b рассмотрим плоское релеевское движение, задаваемое потенциалами

$$\varphi(x, y, t) = A \sin \omega\xi e^{-\omega\alpha y}, \quad \psi(x, y, t) = B \cos \omega\xi e^{-\omega\beta y} \tag{1.1}$$

$$\xi = \frac{x}{p} - t, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{a^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}}, \quad A, B = \text{const}$$

Здесь $p \leqslant b$ — скорость распространения волн, ω — частота колебаний. При этом координаты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений таковы:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = (p^{-1}Ae^{-\omega\alpha y} - \beta Be^{-\omega\beta y})\, \omega \cos \omega\xi$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = (-\alpha Ae^{-\omega\alpha y} + p^{-1}Be^{-\omega\beta y})\, \omega \sin \omega\xi$$

$$\sigma_{xy}/(\mu\omega^2) = (-2\alpha p^{-1}Ae^{-\omega\alpha y} + (\beta^2 + p^{-2})Be^{-\omega\beta y}) \cos \omega\xi \tag{1.2}$$

$$\sigma_{yy}/(\mu\omega^2) = ((\beta^2 + p^{-2})Ae^{-\omega\alpha y} - 2\beta p^{-1}Be^{-\omega\beta y}) \sin \omega\xi$$

где μ — модуль сдвига полупространства.