Покажем, что второе слагаемое в правой части соотношения (11) также стремится к нулю. Согласно оценке (12) имеем

$$|I(t)| \leqslant C \int_0^t \exp(\alpha(t-\tau)) |f(\tau)| d\tau$$

Представим стоящий справа интеграл в виде суммы

$$\exp(\alpha(t-T)) \int_0^T \exp(\alpha(T-\tau)) |f(\tau)| d\tau + \int_T^t \exp(\alpha(t-\tau)) |f(\tau)| d\tau$$

Выберем T таким, чтобы при $\tau > T$ было выполнено неравенство $|f(\tau)| \leqslant \delta$ и воспользуемся свойством (8) управления $u(y(t))$. Предыдущее выражение не больше, чем

$$\alpha^{-1}[C_0 \| S^T G \| \exp(\alpha t)(1 - \exp(-\alpha T)) + \delta(\exp(\alpha(t-T)) - 1)]$$

Первое слагаемое в квадратных скобках с ростом t стремится к нулю в силу оценки $\alpha < 0$. Второе слагаемое также может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом δ. Поэтому предел правой части соотношения (11) при $t \to \infty$ равен нулю, что и требовалось.

Замечание. Условие (2) теоремы заведомо выполнено при $L_1 = L_2$. В этом случае существует управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость системы (1) при любой матрице C, отвечающей этому равенству. Пусть теперь матрица C такова, что условие $L_1 = L_2$ нарушилось и имеет место включение $L_1 \subset L_2$. В этом случае закон управления, вообще говоря, зависит от диссипативных сил.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x_1^{\cdot\cdot} = u - \nu(0{,}99x_1^{\cdot} + x_2^{\cdot})$$
$$x_2^{\cdot\cdot} = -0{,}1x_2 - 0{,}3x_2^{\cdot} - 10u - \nu(x_1^{\cdot} + 1{,}2x_2^{\cdot})$$

При $\nu = 0$ выполнено равенство $L_1 = L_2$, и управление $u = -x_1^{\cdot} - 0{,}01\ x_1$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы. При $\nu = 1$ имеем $L_1 \subset L_2$ и указанное управление делает систему неустойчивой. Это можно проверить, рассмотрев соответствующий характеристический полином. Поэтому закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость механической системы в вакууме, не обязательно будет ее обеспечивать в вязкой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Б. Н.* Оценка величины управления в линейной задаче с квадратичным функционалом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 678—681.
2. *Соколов Б. Н.* О минимальной размерности вектора управлений в линейной задаче стабилизации // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 864—866.
3. *Соколов Б. Н.* Стабилизация динамических систем при геометрических ограничениях на управление // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 48—53.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1990

УДК 539.3

Г. И. Назаров, А. А. Пучков

РАВНОВЕСИЕ ПАРАБОЛО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Для безмоментных статических уравнений равновесия строится точное общее аналитическое решение в комплексной форме для параболо-логарифмической оболочки вращения с переменной внешней нагрузкой.

1. Основные формулы. Безмоментное статическое равновесие срединной поверхности упругой оболочки вращения в географических координатах z, θ определяется системой уравнений в частных производных [1]:

$$\frac{\partial}{\partial z}(rT_1) - r'T_2 + t\frac{\partial S}{\partial \theta} + rtX_1 = 0 \tag{1.1}$$

$$t\frac{\partial T_2}{\partial \theta} + r\frac{\partial S}{\partial z} + 2r'S + rtX_2 = 0$$

$$t^2T_2 - rr''T_1 + rt^3Z = 0 \quad (t = \sqrt{1 + r'^2})$$

Здесь T_1, T_2 — внутренние силы, направленные соответственно по касательным к параллели и меридиану срединной поверхности оболочки вращения, S — сдвигающая сила, X_1, X_2, Z — компоненты внешних сил, $r = r(z)$ — заданный меридиан оболочки.

Формулы, связывающие усилия T_1, T_2, S с функциями напряжений $\varphi(z, \theta)$ и $\psi(z, \theta)$ [1] для случая $X_1 = X_2 = 0$, $Z = N(z)$ запишем в виде

$$T_1 = t\left(\frac{\psi}{r} + t^2\frac{N}{2r''}\right), \quad T_2 = \frac{r''\psi}{t} - \frac{rtN}{2}, \quad S = \frac{\varphi}{r^2} \tag{1.2}$$

внесем их в равенства (1.1). В результате придем к уравнениям

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{rt^3N}{r''}\right) + rr'tN = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - P(z)\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + Q(z)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

$$P = -rr'', \quad Q = r^2 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.4) совпадают с рассмотренными [2] для случая $X_1 = X_2 = Z = 0$ и эквивалентны двум уравнениям второго порядка

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - r''\frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} + 2r'\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{1.6}$$

$$rr''\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - (r'')^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \theta^2} - (r'r'' + rr''')\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

В зависимости от знака гауссовой кривизны система (1.4) и уравнения (1.6) эллиптического ($r'' < 0$, $P > 0$) или гиперболического ($r'' > 0$, $P < 0$) типов.

К этим уравнениям необходимо присоединить соответствующие тангенциальные граничные условия на краях оболочки.

Обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $N(z)$ (1.3) отслоилось от первого уравнения (1.1), а третье уравнение (1.1) тождественно удовлетворилось.

Интегрируя уравнение (1.3), получим выражение

$$N = Dr''/(rt^4) \tag{1.7}$$

справедливое для произвольного знака гауссовой кривизны срединной поверхности. Здесь D — постоянная интегрирования. Функция (1.7) определит внешнее ($D > 0$) или внутреннее ($D < 0$) нормальное давление по отношению к оболочке.

Заметим, что при $D = -1$ функция (1.7) совпадет с выражением для гауссовой кривизны.

Рассмотрим параболо-логарифмическую оболочку вращения положительной гауссовой кривизны ($r'' < 0$) с меридианом

$$r = af^{1/2}\ln f \quad (f = cz + b) \tag{1.8}$$

Начало координат поместим в ее вершине и ось симметрии направим вертикально вниз. Пусть $0 \leqslant z \leqslant H$, где H — высота оболочки.

В точке z_0 ($cz_0 + b = 0$) появляющаяся неопределенность вида $0\cdot\infty$ раскрывается и приводит к равенству $r(z_0) = 0$. В вершине $z = 0$ имеется горловина радиуса $r_0 = ab^{1/2}\ln b$ и у оболочки (1.8) — два края, причем ее кривизна почти нулевая.

2. Общее решение. Для системы (1.4) с оболочкой (1.8) ищем решение в виде [3]

$$\varphi = \varphi_0 + \operatorname{Re}\left[\alpha(z)W(\zeta) + \int W(\zeta)\,d\zeta\right], \quad \psi = \psi_0 + \operatorname{Im}\beta(z)W(\zeta) \tag{2.1}$$

$$\zeta = \int\sqrt{P/Q}\,dz + i\theta \tag{2.2}$$

Здесь φ_0, ψ_0 — постоянные, $W(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция комплексного аргумента.

Вещественные функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ от одной переменной z необходимо искать так, чтобы система (1.4) удовлетворялась при произвольной функции $W(\zeta)$. Для этого вносим в нее соответствующие производные от выражений (2.1).

Учитываем свойства аналитических функций комплексного переменного

$$\mathrm{Re}\,[if(\zeta)] = -\mathrm{Im}\, f(\zeta), \quad \mathrm{Im}\,[if(\zeta)] = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$$

и затем опускаем знаки вещественной и мнимой частей:

$$(\sqrt{Q}\alpha' + \sqrt{P})\, W + \sqrt{P}\,(\alpha - \sqrt{PQ}\beta)\, W' = 0$$

$$(1 - Q\beta')\, W + (\alpha - \sqrt{PQ}\beta)\, W' = 0$$

Эти равенства удовлетворяются при произвольной функции $W(\zeta)$ только в том случае, если две функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ будут удовлетворять одновременно трем равенствам

$$\alpha = -\int \sqrt{P/Q}\, dz, \quad \beta = \int Q^{-1}\, dz, \quad \alpha = \sqrt{PQ}\,\beta \tag{2.3}$$

Здесь опущены постоянные интегрирования как несущественные.

Функции (1.5) для оболочки (1.8) вносим в равенства (2.3) и интегрируем. Получим

$$\alpha = -{}^1/_2 \ln f, \quad \beta = -\varkappa \quad \varkappa = 1/(ca^2 \ln f) \tag{2.4}$$

и третье равенство (2.3) выполняется.

Формулы (2.1) при учете равенств (2.4) принимают вид

$$\varphi = \varphi_0 + \mathrm{Re}\left[-{}^1/_2 \ln f W(\zeta) + \int W\, d\zeta\right], \quad \psi = \psi_0 - \varkappa\, \mathrm{Im}\, W(\zeta) \tag{2.5}$$

а комплексная переменная (2.2) будет

$$\zeta = {}^1/_2 \ln f + i\theta$$

Формулы (2.5) для оболочки (1.8) представляют общее решение для системы (1.4) и для уравнений (1.6), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Если в качестве функции $W(\zeta)$ взять сходящийся экспоненциальный ряд [3] (ниже и всюду далее суммирование ведется по n от $n = 1$ до ∞):

$$W = \sum (A_n + iB_n)\, e^{n\omega\zeta} + (C_n + iD_n) e^{-n\omega\zeta}$$

где $\omega = 1$ для замкнутой оболочки $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ и $\omega = \pi/\lambda$ для открытой оболочки $(0 \leqslant \theta \leqslant \lambda,\ \lambda = \mathrm{const})$; A_n, B_n, C_n, D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольные постоянные, то после внесения его в формулы (2.5) и выделения вещественной и мнимой частей получим для случая $\omega = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \sum (A_n\alpha_n - C_n\beta_n) \cos n\theta - (B_n\alpha_n + D_n\beta_n) \sin n\theta, \\ \psi &= \psi_0 - \varkappa \sum (B_n f^{n/2} + D_n f^{-n/2}) \cos\theta + (A_n f^{n/2} - C_n f^{-n/2}) \sin n\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2n}(2 - n \ln f)^{n/2}, \quad \beta_n = \frac{1}{2n}(2 + n \ln f)\, f^{-n/2}$$

Здесь $4n$ — постоянные, входящие в равенства (2.6), определяются обычным методом Фурье разложения по $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$ в интервале $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ заданных тангенциальных значений от угла θ функции ψ и φ (или, что то же самое, усилий T_1, S) на разных краях оболочки.

Найденные таким образом силы (1.2), (2.6) будут исходными для решения по существу самостоятельной задачи о смещениях, геометрические уравнения которых имеют тот же тип, что и система (1.4) [1].

В заключение отметим, что функциям (2.1) можно придать форму дифференциального оператора [3], если положить $W = F'(\zeta)$, где $F(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция от аргумента ζ (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
3. *Назаров Г. И.* Точное решение уравнений газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. № 3. 1968. С. 113—120.

Киев

Поступила в редакцию
20.XI.1990