Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 531.36 : 62—50

Б. Н. Соколов

СТАБИЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В продолжение исследований различных законов позиционного управления большими динамическими системами [1—3] рассматривается управляемая голономная система в окрестности положения равновесия. Получены необходимые и достаточные условия существования управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы в целом. Предложена в некотором смысле простейшая структура управления, решающая поставленную задачу.

Пусть M, C, P, G — матрицы масс, диссипативных сил, потенциальной энергии и управления соответственно, q — вектор обобщенных координат, u — управление. C и P — неотрицательно определенные матрицы, M — положительно определенная матрица. В окрестности положения равновесия движение голономной системы описывается уравнениями [4]

$$Mq^{\cdot\cdot} + Cq^{\cdot} + Pq = Gu, \quad q \in R^n, \quad u \in R^m \tag{1}$$

Линейные управляемые системы общего вида хорошо изучены [4, 5], и для получения управления, решающего двухточечную краевую задачу, развиты соответствующие методы. Если размерность системы велика, то построение позиционного управления, переводящего систему в заданное положение, затруднительно. Поэтому часто используют регуляторы, обеспечивающие асимптотическую устойчивость динамической системы в требуемом положении [5]. Пусть рассматриваемая система имеет большую размерность и требуется построить регулятор, зависящий от минимального числа обобщенных координат. Ниже получены необходимые и достаточные условия, определяющие матрицу управлений такого регулятора, предложено соответствующее управление.

Подпространство L, на котором неотрицательно определенная квадратичная форма обращается в нуль, будем называть нулевым. Обозначим через L_1 и L_2 нулевые подпространства квадратичных форм q^TCq и q^TPq (1) соответственно.

Теорема. Допустим, что $L_2 \subset L_1$ и $\dim L_2 = p$. Пусть при всех, в том числе комплексных, $\lambda \neq 0$ системы уравнений

$$\lambda^2 M\xi + P\xi = 0 \quad \text{и} \quad C\xi = 0 \tag{2}$$

не имеют общих нетривиальных решений. Тогда необходимым и достаточным условием существования управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость в целом системы (1), будет соотношение

$$\operatorname{rank} \| \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p \|^T G = p \tag{3}$$

где ξ^i $(i = 1, \ldots, p)$ — произвольный набор линейно независимых векторов, составляющих базис подпространства L_2 в R^n

Доказательство. Неособым преобразованием $q = Sx$ систему (1) можно привести к нормальным координатам

$$x_i^{\cdot\cdot} = (S^TGu)_i, \quad i = 1, \ldots, p \tag{4}$$

$$x_i^{\cdot\cdot} + \sum_{j=p+1}^{n} (S^TCS)_{ij} x_j^{\cdot} + \omega_i^2 x_i = (S^TGu)_i \quad i = p+1, \ldots, n, \quad \omega_i^2 = (S^TPS)_{ii} \tag{5}$$

В силу предположения $L_2 \subset L_1$ уравнения (4) не содержат элементов матриц C и P. Обозначим через S_0 подматрицу матрицы S, образованную ее первыми p столбцами. Из соотношений (4) следует, что для полной управляемости системы (4) необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\operatorname{rank} S_0^TG = p \tag{6}$$

Пусть $S_0^1, S_0^2, \ldots, S_0^p$ — векторы, составляющие столбцы матрицы S_0. Множество всех линейно независимых векторов, составляющих базис L_2 в R^n, определяется соотношением

$$\| \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p \|^T = R \| S_0^1, S_0^2, \ldots, S_0^p \|^T$$

где R — произвольная невырожденная матрица размером $p \times p$. Поэтому соотношения (6) и (3) эквивалентны.

Если соотношение (3) нарушено, то не существует управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы (4), а тем самым и всей системы (4), (5). Пусть соотношение (3) выполнено. Обозначим через y вектор $(x_1, \ldots, x_p, x_1^{\cdot}, \ldots, x_p^{\cdot})^T$. Предположим, что управление $u(y)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость системы (4), обладает следующими свойствами:

$$u(y(t)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{7}$$

где $y(t)$ — решение системы (4), соответствующее управлению $u(y)$, и для всякой ограниченной области D фазового пространства $y \in R^{2p}$ существует такая постоянная C_0, зависящая от области, что

$$| u(y) | \leqslant C_0 \text{ при } y \in D \tag{8}$$

Подставим управление $u(y)$ в систему (4), (5) и покажем, что оно обеспечивает асимптотическую устойчивость всей системы в целом. Система (4) асимптотически устойчива по выбору $u(y)$. Покажем, что система (5) также асимптотически устойчива.

Пусть $z = (x_{p+1}, \ldots, x_n, \dot{x}_{p+1}, \ldots, x_n^{\cdot})^T$, A — матрица фазовых координат системы (5), приведенной к нормальной форме.

Покажем, что все собственные значения λ_k матрицы A удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \tag{9}$$

Будем искать решение однородной системы (4), (5) в виде $x = \eta e^{\lambda t}$, где η — некоторый вектор. Подставим это выражение в однородную систему (4), (5) и сократим на $e^{\lambda t}$. Получим

$$\lambda^2 \eta + \lambda S^T C S \eta + S^T P S \eta = 0 \tag{10}$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если λ удовлетворяет уравнению

$$\det (\lambda^2 E + \lambda S^T C S + S^T P S) = 0$$

Из уравнений (10) и предположения $L_2 \subset L_1$ следует, что $2p$ нулевым корням $\lambda_i = 0$ соответствуют p собственных векторов $S\eta_i$ оператора P. Эти векторы составляют базис подпространства L_2 в R^n. Нулевым значениям λ_i отвечают первые p уравнений системы (4), (5).

Пусть $\lambda_k \neq 0$ и η_k — соответствующий собственный вектор, удовлетворяющий системе (10). Умножим η_k^* слева на вектор (10) и введем обозначения

$$a_1 = \eta^* \eta, \quad a_2 = \eta^* S^T C S \eta, \quad a_3 = \eta^* S^T P S \eta$$

Получим $\lambda_k = (-a_2 \pm (a_2^2 - 4a_1 a_3)^{1/2})/(2a_1)$. В силу условия $\lambda_k \neq 0$ имеем $S\eta_k \notin L_2$ и $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Поэтому для справедливости неравенства $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ необходимо и достаточно выполнение условия $a_2 > 0$. Равенство $a_2 = 0$ возможно тогда и только тогда, когда собственные векторы, удовлетворяющие уравнению (10), обращают в нуль квадратичную форму $\eta^* S^T C S \eta$. Однако это противоречит условиям (2) теоремы. Следовательно, $a_2 > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, что и требовалось.

Любое решение уравнения (5), представленного в нормальной форме, с управлением $u(y)$ имеет вид

$$z(t) = \exp(At) z^0 + I(t) \tag{11}$$

$$I(t) = \int_0^t \exp(A(t - \tau)) f(\tau) d\tau \qquad (z^\circ = z(0))$$

где $f(t)$ — соответствующая неоднородная часть, получившаяся в результате подстановки $u(y(t))$ в правую часть (5).

В соотношении (11) первое слагаемое стремится к нулю с ростом t в силу условия (9). Для оценки второго слагаемого воспользуемся неравенством

$$\| \exp(At) \| \leqslant C \exp(\alpha t), \quad t \geqslant 0 \tag{12}$$

где $\alpha = \varepsilon + \max_k \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $\varepsilon > 0$, $k = 1, \ldots, 2(n - p)$, $C = \text{const}$.

Покажем, что второе слагаемое в правой части соотношения (11) также стремится к нулю. Согласно оценке (12) имеем

$$| I(t) | \leqslant C \int_0^t \exp(\alpha(t-\tau)) \, | f(\tau) | \, d\tau$$

Представим стоящий справа интеграл в виде суммы

$$\exp(\alpha(t-T)) \int_0^T \exp(\alpha(T-\tau)) \, | f(\tau) | \, d\tau + \int_T^t \exp(\alpha(t-\tau)) \, | f(\tau) | \, d\tau$$

Выберем T таким, чтобы при $\tau > T$ было выполнено неравенство $| f(\tau) | \leqslant \delta$ и воспользуемся свойством (8) управления $u\ (y\ (t))$. Предыдущее выражение не больше, чем

$$\alpha^{-1} [C_0 \| S^T G \| \exp(\alpha t) (1 - \exp(-\alpha T)) + \delta (\exp(\alpha(t - T)) - 1)]$$

Первое слагаемое в квадратных скобках с ростом t стремится к нулю в силу оценки $\alpha < 0$. Второе слагаемое также может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом δ. Поэтому предел правой части соотношения (11) при $t \to \infty$ равен нулю, что и требовалось.

Замечание. Условие (2) теоремы заведомо выполнено при $L_1 = L_2$. В этом случае существует управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость системы (1) при любой матрице C, отвечающей этому равенству. Пусть теперь матрица C такова, что условие $L_1 = L_2$ нарушилось и имеет место включение $L_1 \subset L_2$. В этом случае закон управления, вообще говоря, зависит от диссипативных сил.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x_1^{\cdot\cdot} = u - \nu\,(0{,}99 x_1^{\cdot} + x_2^{\cdot})$$

$$x_2^{\cdot\cdot} = -0{,}1 x_2 - 0{,}3 x_2^{\cdot} - 10u - \nu\,(x_1^{\cdot} + 1{,}2 x_2^{\cdot})$$

При $\nu = 0$ выполнено равенство $L_1 = L_2$, и управление $u = -x_1^{\cdot} - 0{,}01\ x_1$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы. При $\nu = 1$ имеем $L_1 \subset L_2$ и указанное управление делает систему неустойчивой. Это можно проверить, рассмотрев соответствующий характеристический полином. Поэтому закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость механической системы в вакууме, не обязательно будет ее обеспечивать в вязкой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Б. Н.* Оценка величины управления в линейной задаче с квадратичным функционалом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 678—681.
2. *Соколов Б. Н.* О минимальной размерности вектора управлений в линейной задаче стабилизации // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 864—866.
3. *Соколов Б. Н.* Стабилизация динамических систем при геометрических ограничениях на управление // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 48—53.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1990

УДК 539.3

Г. И. Назаров, А. А. Пучков

РАВНОВЕСИЕ ПАРАБОЛО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Для безмоментных статических уравнений равновесия строится точное общее аналитическое решение в комплексной форме для параболо-логарифмической оболочки вращения с переменной внешней нагрузкой.

1. Основные формулы. Безмоментное статическое равновесие срединной поверхности упругой оболочки вращения в географических координатах z, θ определяется