

УДК 539.3 : 534.1

© 1991 г.

И. Е. Трояновский, И. Н. Шардаков, Н. А. Шевелев

ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФОРМ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В рамках постановки, аналогичной рассмотренной ранее [1], предлагается алгоритм численного решения задачи об определении собственных частот и форм вращающихся динамически симметричных тел, основанный на методе конечных элементов. Собственные формы неконсервативной задачи предлагается искать в виде разложения по собственным формам консервативной задачи, что снижает размерность матриц и позволяет решать комплексную проблему собственных значений с использованием уже разработанных и апробированных схем.

Характеристики жесткости вращающихся конструкций могут изменяться за счет действия центробежных сил. Если использовать терминологию, принятую в [1], то при постоянной угловой скорости вращения имеем дело с системой с регулируемым числом оборотов, которая является типичной неконсервативной системой. Последнее означает, что кроме задачи о собственных частотах и формах колебаний вращающихся упругих тел для получения полной информации о «динамическом паспорте системы» необходимо рассмотреть задачу неконсервативной упругой устойчивости.

Во многих случаях, особенно при решении прикладных задач, устойчивость исследуется по уравнениям первого приближения, а влияние начального напряженного состояния на собственные формы и частоты колебаний устанавливается из решения линеаризованных уравнений движения [2]. Общим при таком подходе является определение собственных значений. В зависимости от характера найденных собственных значений можно сделать заключение об устойчивости, например, в рамках теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению или показать, что эти собственные значения соответствуют собственным частотам колебаний.

Итак, рассматривается задача о собственных значениях и собственных формах движения неконсервативной системы. В зависимости от геометрии конструкции, свойств материала, граничных условий и других параметров, определяющих систему, собственные значения будут либо мнимые, либо действительные, либо комплексные.

Обычные методы расчета собственных частот и форм колебаний, применяемые для консервативных систем, например [3], не могут быть использованы для рассматриваемых здесь систем [4]. Поэтому необходимо предусмотреть возможные изменения известных подходов и алгоритмов, успешно зарекомендовавших себя при решении консервативных задач, и дополнить их рядом новых элементов. Например, процедура метода обратных итераций [2] и метод парабол в комплексной форме [5] в сочетании с полуаналитическим методом конечных элементов [6] удовлетворяют требованиям рассматриваемых задач.

1. Постановка задачи. В трехмерном евклидовом пространстве упругое тело занимает объем V , ограниченный поверхностью Σ . На части поверхности Σ_u заданы граничные условия в перемещениях, на остальной части Σ_σ — граничные условия в напряжениях. Вращение происходит с угловой скоростью ω , постоянной по величине, вокруг оси, совпадающей с осью симметрии тела. Учитываются относительные, кориолисовы и центробежные ускорения, связанные с упругими деформациями тела. Влияние стационарных внутренних усилий, вызванных действием центробежных сил, не рассматривается. Подлежат определению динамические характеристики системы, собственные значения и собственные формы движения, возникающие около стационарного положения. Другими словами,

необходимо определить функциональную зависимость возмущений от времени.

Математическая постановка задачи включает в себя уравнения движения [7, 8]

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho [\mathbf{u}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})], \quad r, z, \varphi \in V \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений во вращающейся цилиндрической системе координат r, z, φ , ось z которой направлена по вектору $\boldsymbol{\omega}$; σ — тензор напряжений в цилиндрической системе координат; ρ — плотность материала тела; граничные условия в перемещениях на части поверхности Σ_u и в напряжениях на части поверхности Σ_σ ($\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_\sigma$, \mathbf{v} — вектор внешней нормали к поверхности Σ)

$$\mathbf{u}(r, z, \varphi, t) = 0, \quad r, z, \varphi \in \Sigma_u \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0, \quad r, z, \varphi \in \Sigma_\sigma \quad (1.2)$$

Компоненты тензоров напряжений и деформаций в случае изотропного линейного материала связаны физическими соотношениями

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \Theta E + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.3)$$

Здесь λ, μ — постоянные Ламе, Θ — первый инвариант тензора деформаций, E — единичный тензор второго ранга. Для компонент тензора деформаций и вектора смещений имеют место соотношения Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2 [(\nabla \mathbf{u})^r + \nabla \mathbf{u}] \quad (1.4)$$

Искомый вектор перемещений для рассматриваемой задачи представляется в виде

$$\mathbf{u}(r, z, \varphi, t) = U(r, z, \varphi) e^{pt} \quad (1.5)$$

где p — комплексное собственное значение, имеющее смысл собственной частоты колебаний или параметра устойчивости.

После подстановки выражения (1.5) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) получим для отыскания вектора U , который представляет собой форму колебаний, если p — мнимое число, или форму потери устойчивости, если действительная часть комплексного p или действительное p больше нуля, краевую задачу

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \mu \Delta U &= \rho [p^2 U + 2p\boldsymbol{\omega} \times U + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times U)], \\ r, z, \varphi \in V; \quad U(r, z, \varphi) &= 0, \quad r, z, \varphi \in \Sigma_u \\ \mathbf{v} \cdot \{\lambda \Theta E + \mu [(\nabla U)^r + (\nabla U)]\} &= 0, \quad r, z, \varphi \in \Sigma_\sigma \end{aligned} \quad (1.6)$$

При использовании численных методов отыскания вектора перемещений удобней использовать вариационную формулировку

$$\begin{aligned} \delta A_\sigma + \delta A_i + \delta A_c + \delta A_k &= 0 \\ \delta A_\sigma &= - \int \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv, \quad \delta A_i = - \rho p^2 \int U \cdot \delta U dv \\ \delta A_c &= - \rho \int [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times U)] \cdot \delta U dv \\ \delta A_k &= - 2\rho p \int (\boldsymbol{\omega} \times U) \cdot \delta U dv \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь δA_σ — работа внутренних напряжений, определяемая возможными перемещениями, δA_i — работа сил инерции, δA_c — работа центробежных сил, связанных с полем перемещений U , δA_k — слагаемое, определенное силами Кориолиса; интегрирование ведется по объему V .

Искомый вектор перемещений U и его вариация δU должны удовлетворять граничным условиям в перемещениях, а условия в напряжениях выполняются автоматически.

2. Численная реализация. Геометрическая симметрия рассматриваемых тел относительно оси вращения позволяет записать искомый вектор $U(r, z, \varphi)$ в виде разложения по окружной координате φ

$$U = \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum u_n^s(r, z) \cos n\varphi + u_n^a(r, z) \sin n\varphi \\ \sum w_n^s(r, z) \cos n\varphi + w_n^a(r, z) \sin n\varphi \\ \sum v_n^s(r, z) \sin n\varphi + v_n^a(r, z) \cos n\varphi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Здесь u, w, v — компоненты вектора U по координатам r, z, φ — соответственно, индекс s соответствует симметричным и a — антисимметричным составляющим вектора относительно радиуса $\varphi = 0$, суммирование ведется от $n = 1$ до $n = N$.

В символической форме вектор перемещений запишется в виде

$$U = U_s + U_a \quad (2.2)$$

Если в вариационном уравнении не учитываются слагаемые δA_c и δA_k , связанные с вращением ($\omega = 0$), то задача определения U распадается на две самостоятельные для U_s и U_a , а соответствующие собственным векторам собственные значения p_s и p_a совпадают. В случае неконсервативной системы формы U_s и U_a связаны и определяются из общего уравнения (1.7), а вектор U — их суперпозиция. Для вариации δU примем разложение, аналогичное (2.1). Вычисление интегралов, входящих в (1.7), при учете представления U и δU в виде (2.1) и свойств ортогональности тригонометрических функций приводит к вариационной задаче для отдельной гармонике n в разложении (2.1).¹

На этапе численного построения векторов U_s и U_a применяется процедура метода конечных элементов. Приведем основные соотношения полуаналитического метода конечных элементов, сохраняя обозначения, принятые в [6].

Сечение тела вращения разбивается на треугольные элементы, содержащие в каждом узле шесть компонент перемещений с линейной аппроксимацией последних внутри элемента, три перемещения, соответствующих симметричному вектору перемещений, и три — антисимметричному. Таким образом, каждый элемент содержит 18 узловых перемещений. В матричной форме имеем

$$u^e = N^e \delta^e \quad (2.3)$$

где u^e — вектор перемещений в элементе, N^e — матрица функций формы размером 3×18 , δ^e — вектор-столбец узловых перемещений. Аналогичные матричные соотношения можно выписать для физических уравнений и соотношений Коши:

$$\sigma^e = D \varepsilon^e, \quad \varepsilon^e = B \delta^e \quad (2.4)$$

где матрица B^e определяется при учете (2.3), а D — матрица упругих постоянных.

При учете приведенных обозначений конечно-элементный аналог вариационного уравнения (1.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} (K + \rho p^2 M + \rho \omega^2 F_c + 2\omega \rho p F_k) \delta &= 0 \\ K &= \int V^T D B dv, \quad M = \int N^T N dv \\ F_c &= \int N^T f_c dv, \quad F_k = \int N^T f_k dv \end{aligned} \quad (2.5)$$

где \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{F}_c , \mathbf{F}_k — матрицы жесткости, масс, центробежных сил и сил Кориолиса. Матрица \mathbf{f}_c определяется через функции формы элемента и является симметричной, а матрица \mathbf{f}_k — антисимметричной. Если сделать замену переменной

$$t_0 = t\Omega^{-1}, \quad \partial^2/\partial t_0^2 = \Omega\partial^2/\partial t^2 \quad (2.6)$$

и положить $\Omega = \omega$, то можно уравнение (2.5) переписать в виде

$$(\mathbf{K}^0 + p_0^2\mathbf{M}^0 + p_0\mathbf{F}_k^0) \delta = 0 \quad (2.7)$$

где матрицы с нулевым индексом отличаются от соответствующих матриц из (2.5) множителями, а $p = p_0\Omega$. Такая замена переменной t и выбор Ω приводит к нормировке численного значения элементов матриц \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{F}_c , \mathbf{F}_k и их равноценному вкладу в результирующие коэффициенты системы (2.7).

Комплексные собственные значения p_0 , входящие в систему линейных алгебраических уравнений как неизвестные параметры, определяем методом парабол [5] в комплексной форме. Такую схему решения поставленной задачи будем называть прямым методом отыскания собственных значений. К ее недостаткам надо отнести высокий порядок системы уравнений (2.7) и низкую эффективность метода парабол в комплексной форме для матриц высокой размерности.

Для снижения размерности системы воспользуемся методом разложения по собственным формам соответствующей задачи для консервативной системы. Последняя задача, будучи действительной, существенно проще комплексной задачи (2.7).

Разложение включает линейные комбинации конечного числа первых собственных форм колебаний соответствующей упругой задачи без учета вращения [9]

$$\delta = \sum_{k=1}^m q_k \chi_k, \quad q_k = \text{const} \quad (2.8)$$

(χ_k — собственные формы колебаний). Для их определения решается алгебраическая задача

$$(\mathbf{K} - \rho\lambda_k^2\mathbf{M}) \chi_k = 0 \quad (2.9)$$

где λ_k — собственная частота колебаний консервативной системы, χ_k — собственная форма колебаний, соответствующая λ_k . При учете (2.8) система (2.7) преобразуется так:

$$(\mathbf{K}' + p_0^2\mathbf{M}' + p_0\mathbf{F}_k') \mathbf{q} = 0 \quad (2.10)$$

Матрицы в (2.10) имеют размер $2m \times 2m$, их элементы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K_{ij}' &= \chi_i^T \mathbf{K}^0 \chi_j, & M_{ij}' &= \chi_i^T \mathbf{M}^0 \chi_j \\ F_{(k)ij}' &= \chi_i^T \mathbf{F}_k^0 \chi_j, & i, j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.11)$$

Размер матриц в два раза больше числа удержанных членов разложения, что связано с необходимостью учета симметричных и антисимметричных компонент в векторах χ_k .

Метод разложения по собственным формам удобно использовать при варьировании свойств материала конструкции и параметра угловой скорости, когда полученные заранее формы колебаний многократно могут быть использованы при исследовании устойчивости. Однако трудно определить заранее необходимое число собственных форм в разложении (2.8).

Проведенные расчеты показывают, что этот недостаток компенсируется существенным повышением эффективности метода отыскания собственных значений, а проведение численного эксперимента с различным количеством удержанных в разложении форм гарантирует правильность полученных результатов.

3. Примеры расчета. Численные расчеты были выполнены для упругого тела, имеющего форму диска следующих геометрических размеров: внутренний радиус 0,02 м, наружный — 0,125 м, толщина 0,01 м, жестко закрепленного по внутреннему контуру, коэффициента Пуассона 0,26. По внешнему контуру диск свободен от нагрузок. Для оценки работоспособности предлагаемых алгоритмов задача решалась прямым методом и методом разложения по собственным формам консервативной системы. Кроме того, результаты, полученные при построении собственных форм колебаний консервативной задачи, дают возможность определить необходимое количество членов в разложении (2.8).

Поясним это на конкретном примере. Значения первых семи собственных частот колебаний диска (в герцах) без учета вращения при $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7830$ кг/м³ оказались следующими: 74, 564, 1614, 3173, 5245, 5944, 7824. Все результаты, приведенные в работе, относятся к первой гармонике в разложении по угловой координате. Первым пяти собственным частотам соответствуют изгибные формы колебаний, шестая частота имеет форму колебаний в плоскости r, φ , седьмая вновь изгибная и т. д. (чередование изгибных и плоских форм колебаний). Для различных геометрических размеров дисков и граничных условий порядок их следования может изменяться.

Влияние дополнительных сил инерции, вызванных вращением, по разному сказывается на изменении собственных значений как в количественном отношении, так и качественно. Те собственные значения, которым соответствуют изгибные формы колебаний, с увеличением угловой скорости могут убывать, оставаясь чисто мнимыми (фиг. 1, p_1), до тех пор, пока хотя бы одно из них не обратится в нуль. При дальнейшем увеличении ω величина p_1 , например, становится действительной и положительной, причем изменение таких собственных значений происходит довольно медленно. Согласно известным исследованиям [1], [10], такой тип неустойчивости называется статической неустойчивостью. Чтобы показать, как изменяются собственные значения соответствующей консервативной задачи при учете вращения, приведем значения собственных частот при $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7830$ кг/м³ для угловой скорости $\omega = 5000$ об/мин: 56,4, 56,9, 547,2, 547,6, 1601,2, 1600,8, 3160,9, 3161,4, 5232,9, 5233,4, $(1274,0 + 3547,8i)$, $(1274,0 - 3547,8i)$, 7813,0. Шестое собственное значение, соответствующее плоской форме колебаний, на изменение угловой скорости реагирует совершенно иначе, чем упомянутые выше изгибные частоты.

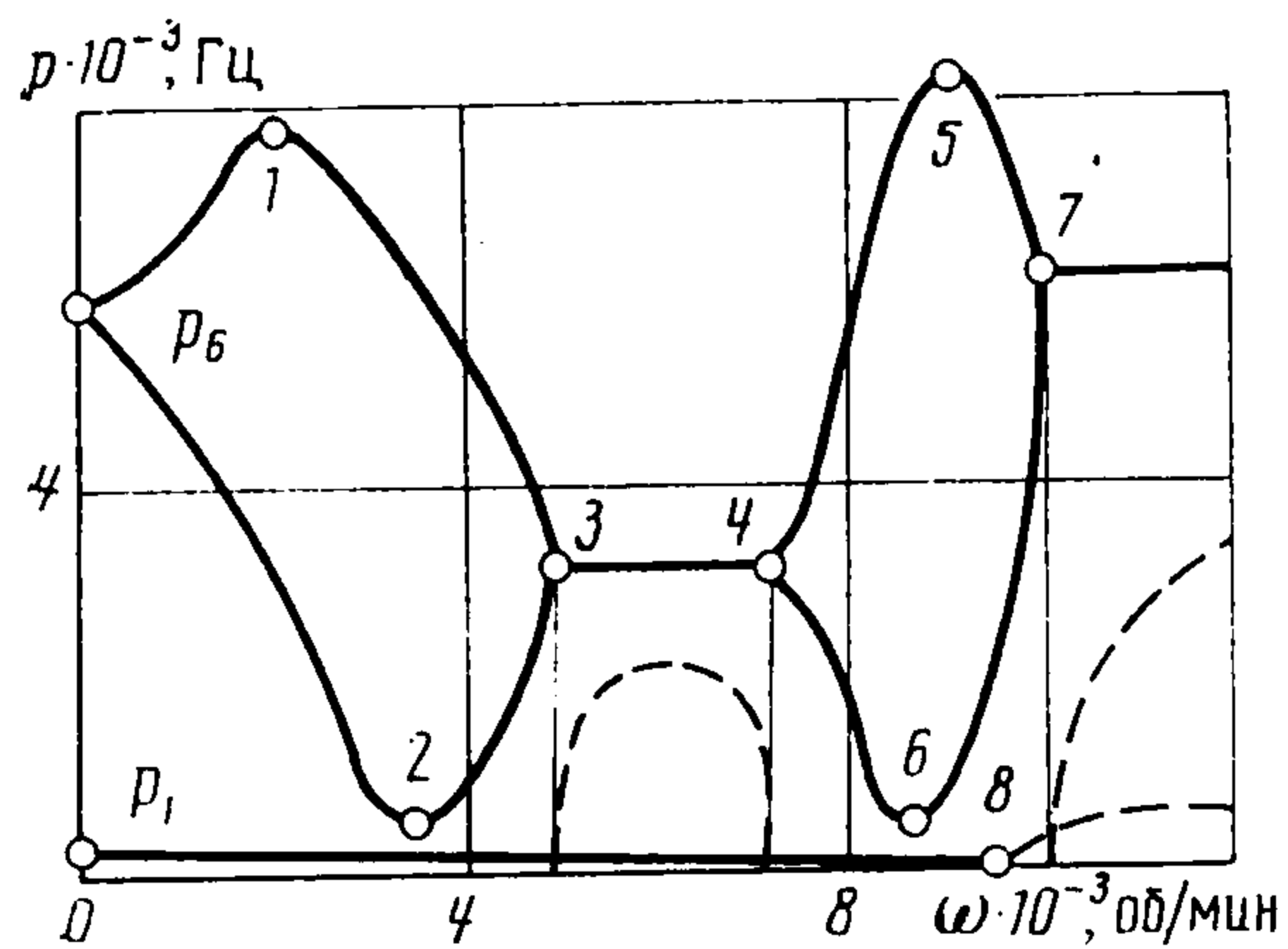
Напомним, что в случае $\omega = 0$ имеем кратные собственные частоты, соответствующие симметричным и антисимметричным формам движений. При появлении угловой скорости они начинают изменяться количественно, оставаясь чисто мнимыми (фиг. 1), по весьма сложному закону. Начиная с некоторого значения параметра ω они сближаются, образуя пару комплексных собственных значений с положительной действительной частью. Такой эффект описан [1] как колебательная неустойчивость.

При получении этих результатов был использован прямой метод и метод разложения по собственным формам. Сравнение показало практическое совпадение собственных значений, полученных обоими методами, при удержании в разложении 16 собственных форм колебаний.

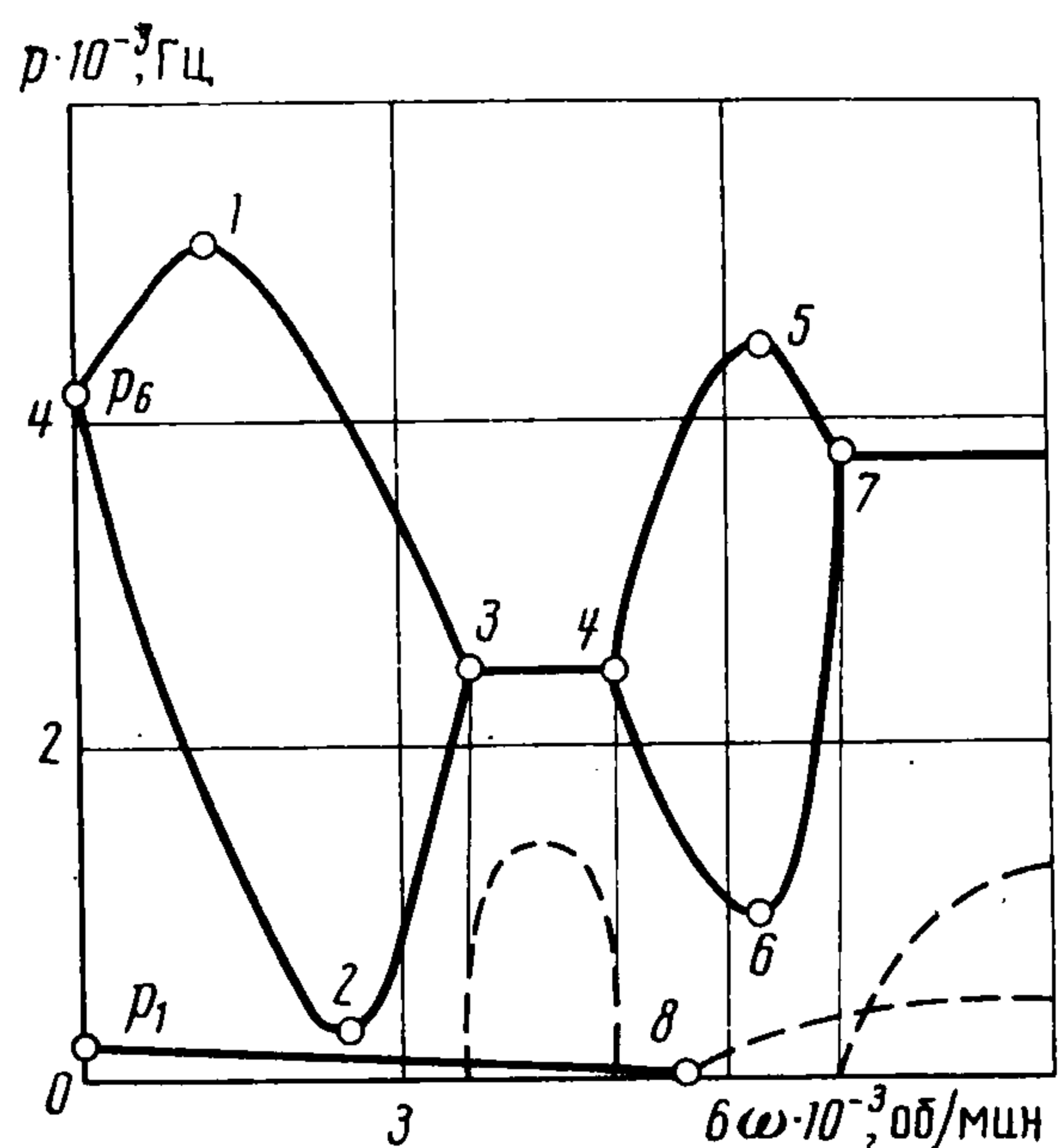
В таблице приведены нормированные коэффициенты q_k в разложении (2.8), индексы s и a имеют прежний смысл, а номера 1, 2, . . . , 16 соответствуют порядку следования частоты в спектре. Изгибные формы имеют номера 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11. Плоские формы имеют номера 6, 9, 13, 16. Анализ таблицы позволяет целенаправленно формировать последовательность функций χ_k и их дальнейшее использование в разложении.

На фиг. 1 ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7830$ кг/м³) и подобных ей фиг. 2 ($E = 1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7830$ кг/м³), фиг. 3 ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 4540$ кг/м³) приведены графики изменения первого и шестого собственных значений в зависимости от параметра угловой скорости. Сплошными линиями дано изменение мнимой части комплексного собственного значения, штрихами — действительная часть соответственно.

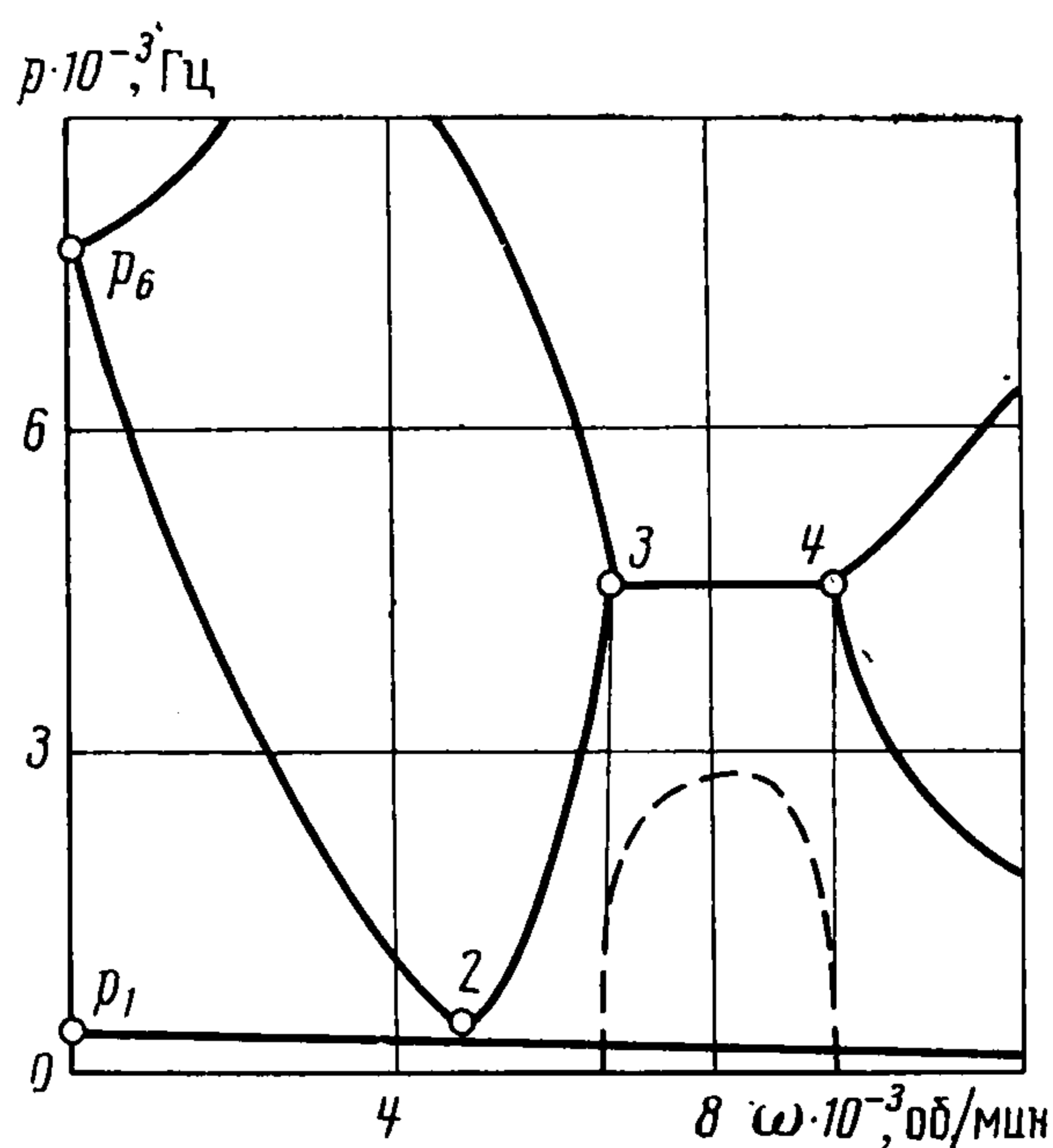
| Форма | Частота | | | | | |
|---------|---|---|---|--|--|--|
| | $p_1=56,4$ | $p_2=56,9$ | $p_3=547,2$ | $p_4=547,6$ | $p_{10}=5233,4$ | $i_{11,12} = 1274 \pm 3547i$ |
| q_k^s | $1,0+0i$ $0,001+0i$ $-0,0008+0i$ 0 | 0 | $-0,01+0i$ $1,0+0i$ $-0,005+0i$ $0,0008+0i$ 0 | 0 | 0 | $0, k=1, 2, \dots, 5$ $1,0+0i, k=6$ $0, k=7, 8$ $0,294-0,226i, k=9$ $0, k=10, 11, 12$ $0,027-0,021i, k=13$ $0, k=14, 15$ $-0,002+0,003i, k=6$ |
| q_k^a | 0 | $1,0+0i$ $0,01+0i$ $-0,008+0i$ 0 | $-0,01+0i$ $1,0+0i$ $-0,005+0i$ $0,008+0i$ 0 | $-0,01+0i$ $1,0+0i$ $-0,005+0i$ $0,008+0i$ 0 | 0 $0,0004+0i$ $-0,0004+0i$ $0,001+0i$ $1,0+0i$ $0,001+0i$ $0,0002+0i$ 0 | $0, k=1, 2, \dots, 5$ $0+1,0i, k=6$ $0, k=7, 8$ $-0,226+0,294i, k=9$ $0, k=10, 11, 12$ $-0,021+0,027i, k=13$ $0, k=14, 15$ $0,003-0,002i, k=16$ |



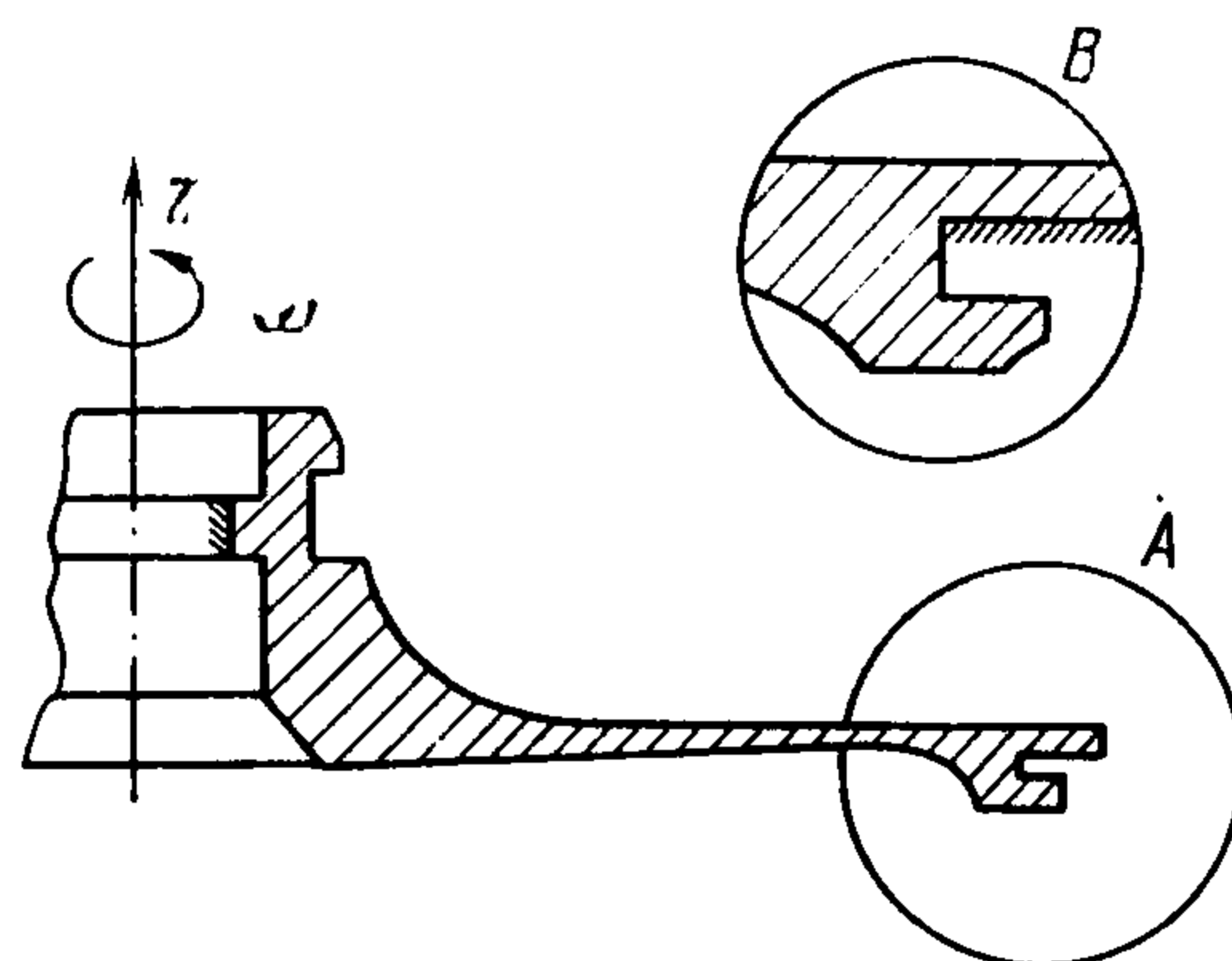
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При постановке задачи было отмечено, что на собственные частоты колебаний оказывает влияние предварительное напряженное состояние. В случае консервативной задачи такая оценка сделана в [2]. Поскольку в данной работе проведен анализ устойчивости без учета этого факта, то в качестве оценочного расчета были построены графики изменения характеристик собственных значений (фиг. 2 и фиг. 3) для дисков с различными характеристиками материала, что в какой-то степени моделирует изменение жесткости за счет предварительного напряженного состояния. Из сравнения фиг. 1—3 можно сделать вывод, что учет предварительного напряженного состояния не изменяет качественной картины появления неустойчивости, а лишь сдвигает области неустойчивости в сторону возрастания или убывания критической угловой скорости.

Предложенный подход затем был применен для исследования устойчивости дефлектора авиационного двигателя (фиг. 4). Качественные результаты совпадают с приведенными на фиг. 1—3. Первые зоны неустойчивости для конструкции с граничными условиями типа А установлены в диапазоне $500 \text{ об/мин} < \omega^* < 800 \text{ об/мин}$, а для условий типа В в диапазоне $4200 \text{ об/мин} < \omega^* < 5500 \text{ об/мин}$.

Для полного исследования динамического поведения конструкций необходимо подобный анализ провести для нескольких гармоник в разложении по угловой координате.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Домбровский И. В., Шардаков И. Н., Шевелев Н. А. Исследование свободных колебаний осесимметричных тел с учетом предварительного напряженного состояния // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций. Пермь, 1989. с. 62—65.

3. *Пустовойт К. С., Трояновский И. Е., Шардаков И. Н.* Об одном подходе к решению трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости для тел сложной формы // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 856—859.
4. *Laurenson R. M.* Modal Analysis of Rotating Flexible Structures // AIAA Journal. 1976. V. 14. No. 10. P. 1444—1450.
5. *Шардаков И. Н., Шевелев Н. А.* Особенности динамического поведения осесимметричных тел с учетом вращения // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Изд. Калинин. ун-та, 1987. с. 100—106.
6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
7. *Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983. 351 с.
8. *Майборода В. П., Трояновский И. Е.* Динамическая устойчивость слоистых вязкоупругих конструкций // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. № 6. С. 44—50.
9. *Вильке В. Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1988. № 3. С. 25—30.
10. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.

Москва, Пермь

Поступила в редакцию
26.IV.1990.