

УДК 539.3 : 534.1

© 1991 г.

Ю. А. Россихин, М. В. Шитикова

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКОМ УПРУГОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Для решения краевых задач, приводящих к распространению плоских ударных волн в анизотропных пластинках постоянной толщины при учете инерции вращения и деформаций поперечного сдвига, а также связанности продольных и поперечных колебательных движений, используется лучевой метод. Он состоит в том, что решение за фронтами ударных волн строится при помощи лучевых рядов типа рядов Тейлора. Исследуется распространение неустановившихся плоских волн в полубесконечных кварцевых пластинках АТ-среза.

Исследованию распространения нестационарных волн в анизотропной пластинке посвящена работа [1]. Динамическое поведение упругих анизотропных пластин при учете инерции вращения и деформаций поперечного сдвига рассмотрено в [2—4]. В частности, были выведены [2] дифференциальные уравнения связанных продольных и поперечных колебаний анизотропной пластины постоянной толщины, причем дифференциальные уравнения записаны в виде двух подсистем — уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и уравнений типа Тимошенко. Однако при решении задач о колебаниях таких пластин вводились упрощающие предположения, которые делают две упомянутые подсистемы несвязанными.

1. Лучевой метод. Напряженное и деформированное состояние тонкой кварцевой пластинки АТ-среза при учете деформаций поперечного сдвига и инерции вращения, а также связанности продольных и поперечных колебательных движений описывается системой уравнений, приведенной в [2].

Предположим, что в результате некоторого динамического воздействия на границу пластинки $y = x_1 v_1 + x_3 v_3 = 0$, где $v_1 = \cos \varphi$, $v_3 = \sin \varphi$ — компоненты вектора нормали к границе пластинки, в ней возникают поверхности сильного разрыва, каждая из которых является цилиндрической поверхностью $S(t)$ с направляющей линией $L(t)$, лежащей в плоскости пластины x_1, x_3 , и образующими, параллельными оси x_2 . За поверхностью $S(t)$ искомые функции $Z(x_1, x_3, t)$ представляются в виде лучевых рядов [5]

$$Z(x_1, x_3, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}] |_{t=yG^{-1}} \left(t - \frac{y}{G}\right)^k H\left(t - \frac{y}{G}\right) \quad (1.1)$$

где $[Z_{,(k)}]$ — скачки производных k -го порядка по времени t от функции $Z(x_1, x_3, t)$ на фронте ударной волны, G — нормальная скорость волны, y — расстояние, отсчитываемое от границы пластинки вдоль нормали к этой границе, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Для определения коэффициентов лучевых рядов (1.1) искомых функций продифференцируем уравнения движения приведенной в [2] системы k раз по времени t , а связь между силовыми факторами и перемещениями $k + 1$ раз и возьмем их разность на различных сторонах волновой

поверхности $S(t)$. В результате получим

$$\begin{aligned}
 [N_{1,1(k)}] + [N_{5,3(k)}] &= 2b\rho [v_{1,(k+1)}], \quad [N_{5,1(k)}] + [N_{3,\varepsilon(k)}] = 2b\rho [v_{3,(k+1)}] \\
 [Q_{1,1(k)}] + [Q_{3,\varepsilon(k)}] &= 2b\rho [v_{2,(k+1)}] \\
 [M_{1,1(k)}] + [M_{5,\varepsilon(k)}] - [Q_{1,(k)}] &= \frac{2}{3}b^3\rho [\Phi_{1,(k+1)}] \\
 [M_{5,1(k)}] + [M_{3,\varepsilon(k)}] - [Q_{3,(k)}] &= \frac{2}{3}b^3\rho [\Phi_{3,(k+1)}] \\
 [N_{\alpha,(k+1)}] &= 2b \{ \bar{c}_{1\alpha} [v_{1,1(k)}] + \bar{c}_{\alpha 3} [v_{3,\varepsilon(k)}] + K_{\alpha/2+5/2} \bar{c}_{\alpha 4} ([v_{2,3(k)}] + \\
 &\quad + [\Phi_{3,(k)}]) \} \\
 [N_{5,(k+1)}] &= 2b \{ c_{55} ([v_{3,1(k)}] + [v_{1,\varepsilon(k)}]) + K_1 c_{56} ([v_{2,1(k)}] + [\Phi_{1,(k)}]) \} \\
 [Q_{1,(k+1)}] &= 2b \{ K_1 c_{56} ([v_{3,1(k)}] + [v_{1,\varepsilon(k)}]) + K_1^2 c_{66} ([v_{2,1(k)}] + [\Phi_{1,(k)}]) \} \\
 [Q_{3,(k+1)}] &= 2b \{ K_3 \bar{c}_{14} [v_{1,1(k)}] + K_3 \bar{c}_{34} [v_{3,\varepsilon(k)}] + K_3^2 \bar{c}_{44} ([v_{2,\varepsilon(k)}] + \\
 &\quad + [\Phi_{3,(k)}]) \} \\
 [M_{\alpha,(k+1)}] &= \frac{2}{3}b^3 (\gamma_{1\alpha} [\Phi_{1,1(k)}] + \gamma_{\alpha 3} [\Phi_{3,\varepsilon(k)}]), \quad \alpha = 1, 3 \\
 [M_{5,(k+1)}] &= \frac{2}{3}b^3 \gamma_{55} ([\Phi_{3,1(k)}] + [\Phi_{1,\varepsilon(k)}]) \\
 K_1^2 &= \frac{\pi^2}{12}, \quad K_3^2 = \frac{\pi^2}{24\bar{c}_{44}} \{ c_{22} + c_{44} - [(c_{22} - c_{44})^2 + 4c_{24}^2]^{1/2} \} \\
 \bar{c}_{pq} &= c_{pq} - \frac{c_{2p}c_{q2}}{c_{22}}, \quad \gamma_{pq} = \bar{c}_{pq} - \frac{\bar{c}_{4p}\bar{c}_{q4}}{\bar{c}_{44}}, \quad \gamma_{55} = c_{55} - \frac{c_{56}^2}{c_{66}}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь N_1, N_3, N_5 — усилия, действующие в плоскости пластинки, Q_1, Q_3 — поперечные силы, M_1, M_3 — изгибающие моменты, M_5 — крутящий момент, $2b$ — толщина пластинки, ρ — плотность, v_1, v_2, v_3 — скорости перемещений, Φ_1, Φ_3 — скорости углов поворота нормали к срединной поверхности пластинки, c_{pq} — упругие модули кристалла кварца, индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной.

В дальнейшем принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, не стоящим в скобках, причем, если не оговорено особо, то латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие — 1, 2.

Учитывая условие совместности для разрывов производной k -го порядка от некоторой функции $Z(x_1, x_3, t)$ [6]:

$$G[Z, \alpha(k)] = -[Z, (k+1)] v_\alpha + \frac{d[Z, (k)]}{dt} v_\alpha + G[Z, (k)]_{,s} \tau_\alpha \quad (\alpha = 1, 3)$$

из соотношений (1.2) после преобразований имеем

$$\begin{aligned}
 \rho (G_{(n)}^2 - G^2) X_{(k+1)}^{(n)} &= 2\rho G_{(n)}^2 \frac{dX_{(k)}^{(n)}}{dt} + G p_{ij} l_i^{(n)} \sum_{f=1}^3 X_{(k),s}^{(f)} l_j^{(f)} + \\
 &\quad + G d_{i\alpha} l_i^{(n)} \sum_{\alpha=1}^2 Y_{(k)}^{(\gamma)} l_\alpha^{(\gamma^*)} - F_{i(k-1)} l_i^{(n)} \\
 \rho (G_{(\gamma^*)}^2 - G^2) Y_{(k+1)}^{(\gamma)} &= 2\rho G_{(\gamma^*)}^2 \frac{dY_{(k)}^{(\gamma)}}{dt} + G p_{\alpha f}^* l_\beta^{(\gamma^*)} \sum_{\delta=1}^2 Y_{(k),s}^{(\delta)} l_\alpha^{(\delta^*)} + \\
 &\quad + G d_{\alpha i}^* l_\alpha^{(\gamma^*)} \sum_{f=1}^3 X_{(k)}^{(f)} l_i^{(f)} - U_{\alpha(k-1)} l_\alpha^{(\gamma^*)} \\
 F_{i(k-1)} l_i^{(n)} &= \rho G_{(n)}^2 \frac{d^2 X_{(k-1)}^{(n)}}{dt^2} + p_{ij} l_i^{(n)} G \sum_{f=1}^3 \frac{dX_{(k-1),s}^{(f)}}{dt} l_j^{(f)} + \\
 &\quad + G^2 \bar{s}_{ij} l_i^{(n)} \sum_{f=1}^3 X_{(k-1),ss}^{(f)} l_j^{(f)} + d_{i\alpha} l_i^{(n)} G \sum_{j=1}^2 \frac{dY_{(k-1)}^{(\gamma)}}{dt} l_\alpha^{(\gamma^*)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G^2 \bar{a}_{i\alpha} l_i^{(n)} \sum_{\gamma=1}^2 Y_{(k-1),s}^{(\gamma)} l_\alpha^{(\gamma*)}, \quad U_{\alpha(k-1)} l_\alpha^{(\gamma*)} = \rho G_{(\gamma*)}^2 \frac{d^2 Y_{(k-1)}^{(\gamma)}}{dt^2} + \\
& + p_{\alpha\beta}^* l_\alpha^{(\gamma*)} G \sum_{\delta=1}^2 \frac{dY_{(k-1),s}^{(\delta)}}{dt} l_\beta^{(\delta*)} + \bar{c}_{\alpha\beta}^* l_\alpha^{(\gamma*)} G^2 \sum_{\delta=1}^2 Y_{(k-1),ss}^{(\delta)} l_\beta^{(\delta*)} + \\
& + d_{\alpha i}^* l_\alpha^{(\gamma*)} G \sum_{f=1}^3 \frac{dX_{(k-2)}^{(f)}}{dt} l_i^{(f)} + \bar{d}_{\alpha i}^* l_\alpha^{(\gamma*)} G^2 \sum_{f=1}^3 X_{(k-1),s}^{(f)} l_i^{(f)} \quad (1.3)
\end{aligned}$$

$$X_{(k)}^{(f)} = X_{i(k)} l_i^{(f)}, \quad X_{1(k)} = [v_{1,(k)}], \quad X_{2(k)} = [v_{3,(k)}], \quad X_{3(k)} = [v_{2,(k)}]$$

$$Y_{(k)}^{(\gamma)} = Y_{\alpha(k)} l_\alpha^{(\gamma*)}, \quad Y_{1(k)} = [\Phi_{1,(k)}], \quad Y_{2(k)} = [\Phi_{3,(k)}]$$

$$p_{11} = 2(\bar{c}_{11}\tau_1\nu_1 + c_{55}\tau_3\nu_3), \quad p_{12} = p_{21} = (\bar{c}_{13} + c_{55})(\tau_1\nu_3 + \tau_3\nu_1)$$

$$p_{13} = p_{31} = (K_3\bar{c}_{14} + K_1c_{56})(\tau_1\nu_3 + \tau_3\nu_1), \quad p_{22} = 2(\bar{c}_{33}\tau_3\nu_3 + c_{55}\tau_1\nu_1)$$

$$p_{23} = p_{32} = 2(K_1c_{56}\tau_1\nu_1 + K_3\bar{c}_{34}\tau_3\nu_3), \quad p_{33} = 2(K_1^2c_{66}\tau_1\nu_1 + K_3^2\bar{c}_{44}\tau_3\nu_3)$$

$$d_{11} = K_1c_{56}\nu_3, \quad d_{21} = K_1c_{56}\nu_1, \quad d_{31} = K_1^2c_{66}\nu_1, \quad d_{12} = K_3\bar{c}_{14}\nu_1$$

$$d_{22} = K_3\bar{c}_{34}\nu_3, \quad d_{32} = K_3^2\bar{c}_{44}\nu_3, \quad d_{11}^* = -3b^{-2}d_{11}\nu_1\nu_3^{-1}, \quad d_{12}^* = -3b^{-2}d_{21}\nu_1^{-1}\nu_3$$

Величины $p_{\alpha\beta}^*$ получаются из $p_{\alpha\beta}$ при замене в них \bar{c}_{mn} ($m, n = 1, 3$) на γ_{mn} и c_{55} на γ_{55} , $1 = x_1\tau_1 + x_3\tau_3$ ($\tau_1 = -\sin\varphi$, $\tau_3 = \cos\varphi$ — расстояние, отсчитываемое от начала координат вдоль волновой поверхности, $\rho G_{(f)}^2$, $\rho G_{(\gamma*)}^2$ — главные значения, а $l_i^{(f)}$, $l_\alpha^{(\gamma*)}$ — единичные главные направления симметричных тензоров $s_{ij} = 1/2 p_{ij} |_{\tau_\delta=\nu_\delta}$, $s_{\alpha\beta}^* = 1/2 p_{\alpha\beta}^* |_{\tau_\delta=\nu_\delta}$ ($\delta = 1, 3$) соответственно; тензоры \bar{s}_{ij} , $\bar{s}_{\alpha\beta}^*$ получаются из тензоров s_{ij} , $s_{\alpha\beta}^*$ путем замены в них величин ν_δ на τ_δ ($\delta = 1, 2$), а величины d_{13}^* , d_{23}^* , d_{22}^* , d_{21}^* — из соответствующих величин без звездочки путем умножения последних на $-3b^{-2}$.

Ограничиваясь в дальнейшем тремя членами лучевых рядов (1.1) для искомых функций, из уравнений (1.3) при $k = 0, 1, 2$ получим

$$\begin{aligned}
X_{(0)}^{(f,f)} &= h_{(0)}^{(f)}(z), \quad X_{(0)}^{(n,f)} = 0 \quad (n \neq f), \quad X_{(0)}^{(\alpha*,f)} = 0 \\
Y_{(0)}^{(\alpha*,\alpha)} &= h_{(\alpha)}^{(\alpha*)}(z), \quad Y_{(0)}^{(\alpha*,\beta)} = 0 \quad (\alpha* \neq \beta), \quad Y_{(0)}^{(n,\alpha)} = 0 \\
X_{(1)}^{(f,f)} &= h_{(1)}^{(f)}(z) + tH_{(0)}^{(f,f)}, \quad X_{(1)}^{(n,f)} = a_{(f,n)}^{(n)} h_{(0),z}^{(n)} \quad (n \neq f) \\
X_{(1)}^{(\alpha*,f)} &= a_{(f,\alpha*)}^{(\alpha*)} h_{(0)}^{(\alpha*)}, \quad Y_{(1)}^{(\alpha*,\alpha)} = h_{(1)}^{(\alpha*)} + tM_{(0)}^{(\alpha*,\alpha)} \quad (1.4) \\
Y_{(1)}^{(\alpha*,\beta)} &= d_{(\beta,\alpha*)}^{(\alpha*)} h_{(0),z}^{(\alpha*)} \quad (\alpha \neq \beta), \quad Y_{(1)}^{(n,\alpha)} = d_{(\alpha,n)}^{(n)} h_{(0)}^{(n)}
\end{aligned}$$

$$X_{(2)}^{(f,f)} = h_{(2)}^{(f)}(z) + tH_{(1)}^{(f,f)} + 1/2 t^2 \chi_{(1)}^{(f,f)}, \quad X_{(2)}^{(n,f)} = H_{(1)}^{(n,f)} + t a_{(f,n)}^{(n)} H_{(0),z}^{(n,n)} \quad (n \neq f)$$

$$X_{(2)}^{(\alpha*,f)} = H_{(1)}^{(\alpha*,f)} + t a_{(f,\alpha*)}^{(\alpha*)} M_{(0)}^{(\alpha*,\alpha)}, \quad Y_{(2)}^{(\alpha*,\alpha)} = h_{(2)}^{(\alpha*)}(z) + tM_{(1)}^{(\alpha*,\alpha)} + 1/2 t^2 \chi_{(1)}^{(\alpha*,\alpha)}$$

$$Y_{(2)}^{(\alpha*,\beta)} = M_{(1)}^{(\alpha*,\beta)} + t d_{(\beta,\alpha*)}^{(\alpha*)} M_{(0),s}^{(\alpha*,\alpha)} \quad (\alpha \neq \beta), \quad Y_{(2)}^{(n,\alpha)} = M_{(1)}^{(n,\alpha)} + t d_{(\alpha,n)}^{(n)} H_{(0)}^{(n,n)}$$

Здесь первый верхний индекс, стоящий в скобках, указывает на порядковый номер волны (первые три волны имеют порядковые номера 1, 2, 3, а четвертая и пятая волны — 1*, 2*), а второй — на номер проекции, $h_{(k)}^{(1)}$, $h_{(k)}^{(2)}$, $h_{(k)}^{(3)}$ ($k = 0, 1, 2$) — произвольные функции аргумента $z = 1 - g_{(f)}t$, а $h_{(k)}^{(1*)}$, $h_{(k)}^{(2*)}$ ($k = 0, 1, 2$) — произвольные функции аргумента $z^* = 1 - g_{(\alpha*)}t$ (в формулах индексы у аргумента z для простоты опущены), функции $H_{(k)}^{(n,f)}$, $M_{(k)}^{(\alpha*,\alpha)}$ ($k = 0, 1$), $M_{(1)}^{(n,\alpha)}$, $\chi_{(1)}^{(f,f)}$ и $\chi_{(1)}^{(\alpha*,\alpha)}$ зависят от вышеперечисленных произвольных функций и их производных по z и из-за громоздкости не приводятся

$$g_{(n)} = \frac{p_{ij} l_i^{(n)} l_j^{(n)}}{2\rho G_{(n)}}, \quad g_{(\gamma*)} = \frac{p_{\alpha\beta}^* l_\alpha^{(\gamma*)} l_\beta^{(\gamma*)}}{2\rho G_{(\gamma*)}} \quad (1.5)$$

Используя соотношения (1.4), можно построить за каждой из пяти ударных волн решение в виде лучевого ряда (1.1) с соответствующей функцией Хевисайда. Поскольку задача линейная, то для получения окончательного результата построенные лучевые ряды необходимо просуммировать. Пять наборов произвольных функций, входящих в полученное таким образом решение, находятся из пяти краевых условий. Рассмотрим несколько типов краевых условий.

Предположим сначала, что на краю пластинки заданы три скорости перемещения и две скорости углов поворота нормали к срединной поверхности пластинки как функции времени t и координаты $\hat{1}$, т. е.

$$\begin{aligned} v_n|_{y=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{n(k)}^0(s) \frac{t^k}{k!}, & v_{\tau}|_{y=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{\tau(k)}^0(s) \frac{t^k}{k!} \\ v_2|_{y=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{3(k)}^0(s) \frac{t^k}{k!}, & \Phi_n|_{y=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_{n(k)}^0 \frac{t^k}{k!} \\ \Phi_{\tau}|_{y=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_{\tau(k)}^0 \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

Тогда для определения произвольных функций получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^3 h_{(0)}^{(f)} C_N^{(f)} &= X_{N(0)}^0, & \sum_{\alpha=1}^2 h_{(0)}^{(\alpha^*)} B_M^{(\alpha^*)} &= Y_{M(0)}^0 \\ \sum_{f=1}^3 h_{(1)}^{(f)} C_N^{(f)} &= - \sum_{f=1}^3 \sum_{\substack{n=1 \\ (f \neq n)}}^3 a_{(f,n)}^{(n)} h_{(0)}^{(n)} C_N^{(f)} - \sum_{f=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 a_{(f,\alpha^*)}^{(\alpha^*)} h_{(0)}^{(\alpha^*)} C_N^{(f)} + X_{N(1)}^0 \\ \sum_{\alpha=1}^2 h_{(1)}^{(\alpha^*)} B_M^{(\alpha^*)} &= - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\substack{\beta=1 \\ (\alpha \neq \beta)}}^2 d_{(\beta,\alpha^*)}^{(\alpha^*)} h_{(0)}^{(\alpha^*)} B_M^{(\beta^*)} - \sum_{n=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 d_{(\alpha,n)}^{(n)} h_{(0)}^{(n)} B_M^{(\alpha^*)} + Y_{M(1)}^0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

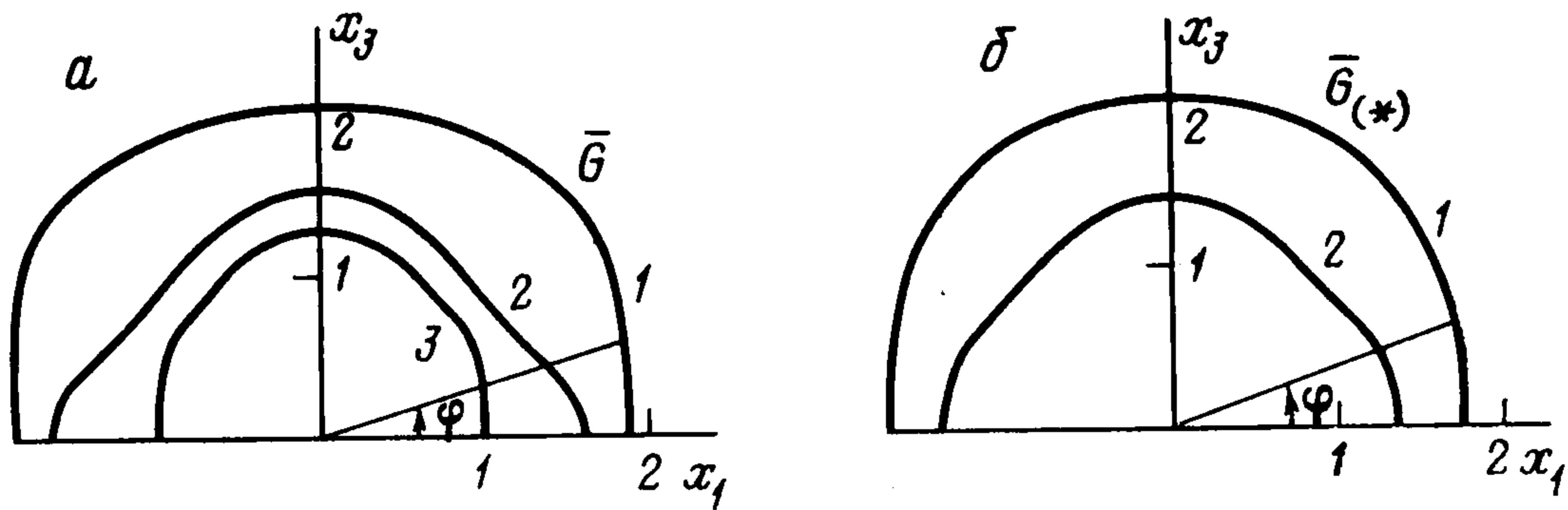
$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^3 h_2^{(f)} C_N^{(f)} &= - \sum_{f=1}^3 \sum_{\substack{n=1 \\ (f \neq n)}}^3 H_{(1)}^{(n,f)} C_N^{(f)} - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{f=1}^3 H_{(1)}^{(\alpha^*,f)} C_N^{(f)} + X_{N(2)}^0 \\ \sum_{\alpha=1}^2 h_{(2)}^{(\alpha^*)} B_M^{(\alpha^*)} &= - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\substack{\beta=1 \\ (\alpha \neq \beta)}}^2 M_{(1)}^{(\alpha^*,\beta)} B_M^{(\beta^*)} - \sum_{n=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 M_{(1)}^{(n,\alpha)} B_M^{(\alpha^*)} + Y_{M(2)}^0 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем в каждой системе уравнений индекс N принимает значения $n, \tau, 3$, а индекс M — значения n, τ , причем

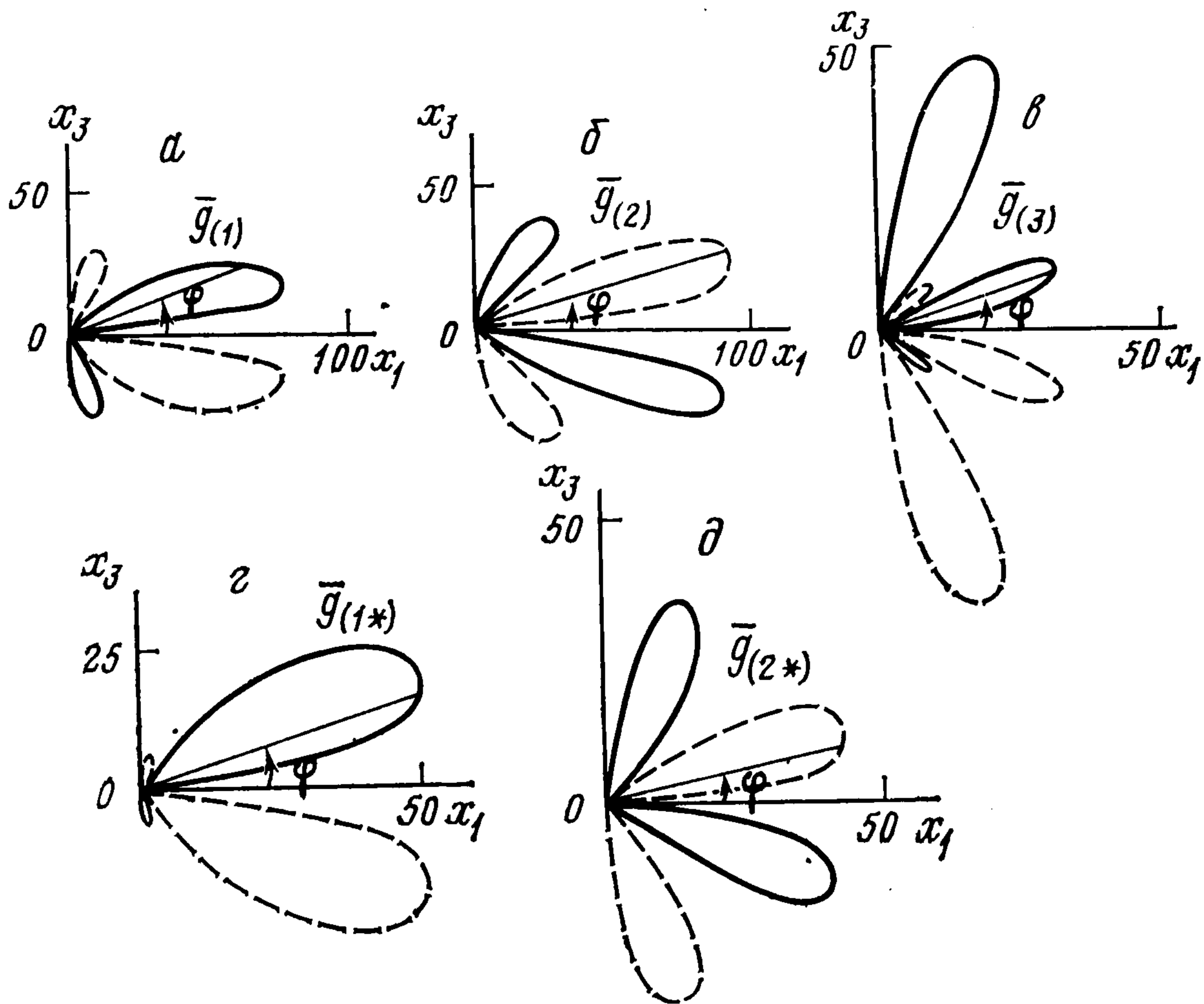
$$\begin{aligned} C_n^{(f)} &= l_1^{(f)} v_1 + l_2^{(f)} v_3, & C_{\tau}^{(f)} &= l_1^{(f)} \tau_1 + l_2^{(f)} \tau_3, & C_3^{(f)} &= l_3^{(f)}, \\ B_n^{(\alpha^*)} &= l_1^{(\alpha^*)} v_1 + l_2^{(\alpha^*)} v_3, & B_{\tau}^{(\alpha^*)} &= l_1^{(\alpha^*)} \tau_1 + l_2^{(\alpha^*)} \tau_3 \end{aligned}$$

Если предположить, что на краю пластинки заданы силы $N_n, N_{n\tau}$, лежащие в плоскости пластинки, перерезывающая сила Q_n , изгибающий и крутящий моменты $M_n, M_{n\tau}$, можно получить аналогичную (1.6) систему уравнений для определения произвольных функций. При этом в правые части уравнений вместо величин $X_{N(k)}^0, Y_{M(k)}^0$ ($k = 0, 1, 2$) войдут функции $N_{N(k)}^0, M_{M(k)}^0$, заданные на границе ($N_{n(k)}^0, N_{\tau(k)}^0$ — коэффициенты рядов Маклорена для граничных сил, лежащих в плоскости пластинки, $N_{2(k)}^0$ — для граничной перерезывающей силы, $M_{n(k)}^0, M_{\tau(k)}^0$ — для граничных изгибающего и крутящего моментов).

Краевые условия других типов можно получить аналогично.



Фиг. 1



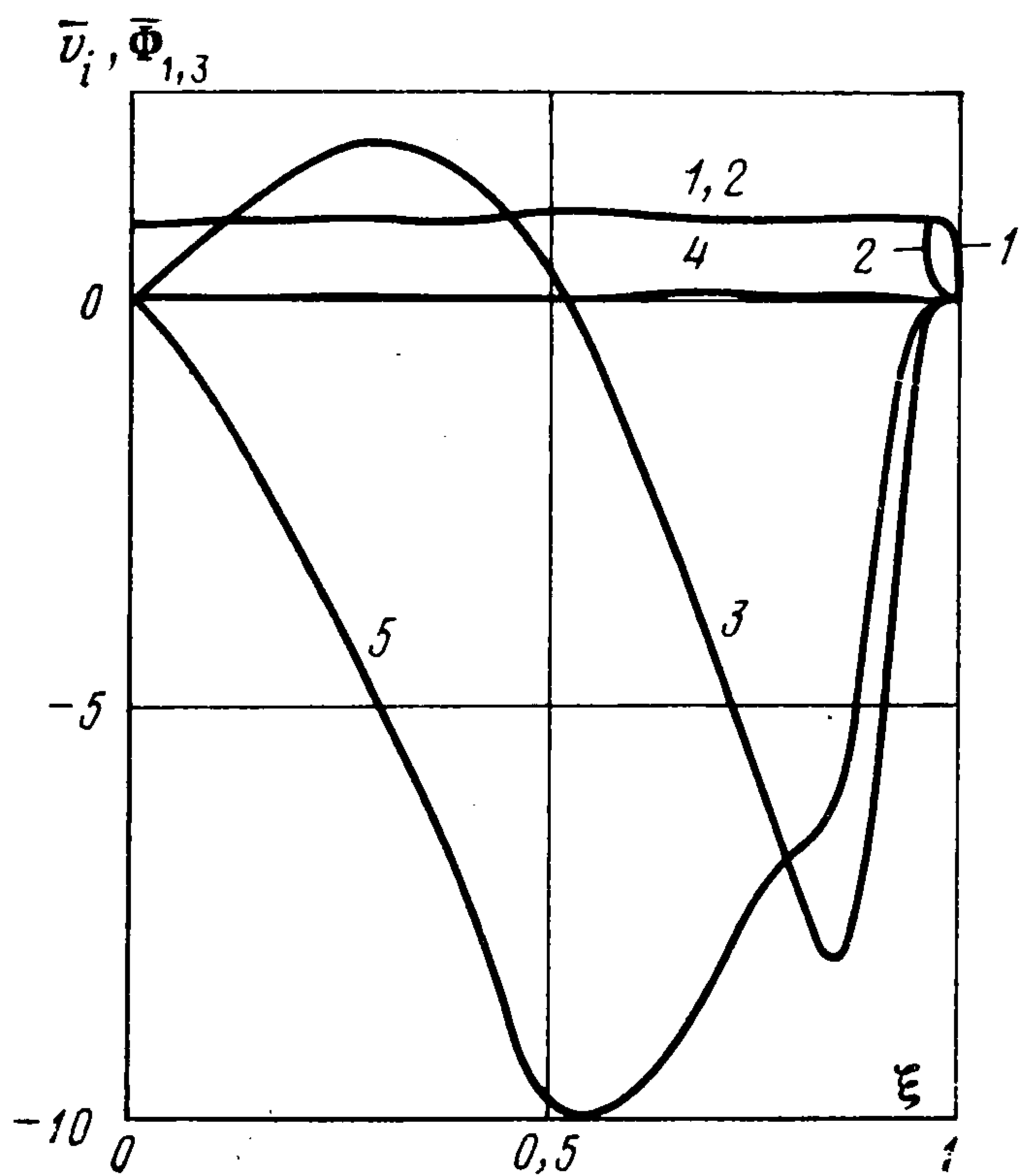
Фиг. 2

2. Пример. На основе полученных формул исследуем зависимости от угла φ скоростей распространения поверхностей сильного разрыва $G_{(n)}$, $G_{(\gamma^*)}$, а также скоростей $g_{(n)}$, $g_{(\gamma^*)}$ распространения возмущений вдоль волновых поверхностей. Эти зависимости в безразмерном виде в полярной системе координат представлены на фиг. 1, 2 (кривые 1, 2, 3 на фиг. 1, а соответствуют скоростям $\bar{G}_{(1)}$, $\bar{G}_{(2)}$, $\bar{G}_{(3)}$, а кривые 1, 2 на фиг. 1, б — скоростям $\bar{G}_{(1^*)}$, $\bar{G}_{(2^*)}$). На фиг. 1 в силу симметрии изображены верхние части кривых, а на фиг. 2 — правые, причем при отображении левых частей кривых на фиг. 2 сплошные линии меняются на штриховые и наоборот. Все скорости $G_{(i)}$, $G_{(\alpha^*)}$ отнесены к наименьшей скорости вдоль направления оси x_1 , а все скорости $g_{(i)}$, $g_{(\alpha^*)}$ — к наименьшей скорости в направлении распространения $\varphi = 50^\circ$.

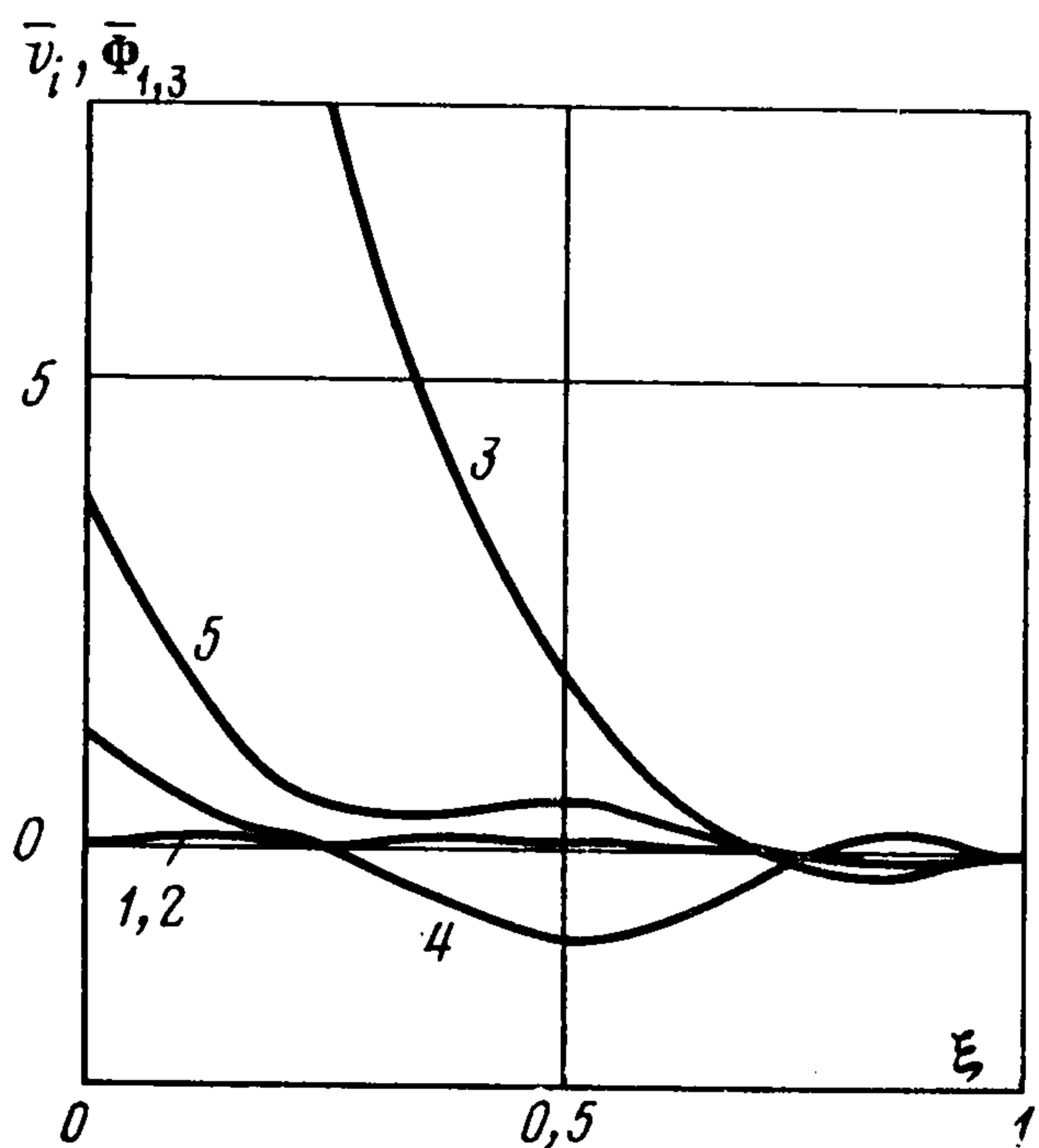
Из сравнения графиков видно, что экстремальные значения скоростей $\bar{G}_{(n)}$, $\bar{G}_{(\gamma^*)}$ соответствуют нулевым значениям скоростей $\bar{g}_{(n)}$, $\bar{g}_{(\gamma^*)}$, причем величины $\bar{g}_{(n)}$, $\bar{g}_{(\gamma^*)}$ при переходе через нуль меняют знак на противоположный (сплошные линии на фиг. 2, а — д соответствуют положительным значениям этих величин, а штриховые — отрицательным), т. е. лучевые трубки могут отклоняться от нормалей как в одну, так и в другую сторону в зависимости от направления распространения волновой поверхности.

В качестве примеров решения краевых задач рассмотрим распространение плоских волн в кварцевой пластинке в направлении $\varphi = 0^\circ$ вследствие ударного воздействия типа (1.6), когда все величины $X_{N(k)}^0$, $Y_{N(k)}^0$, кроме $X_{n(0)}^0$, $Y_{n(0)}^0$, равны нулю или когда все величины $N_{N(k)}^0$, $M_{N(k)}^0$, кроме $N_{2(0)}^0$, $M_{\tau(0)}^0$, равны нулю.

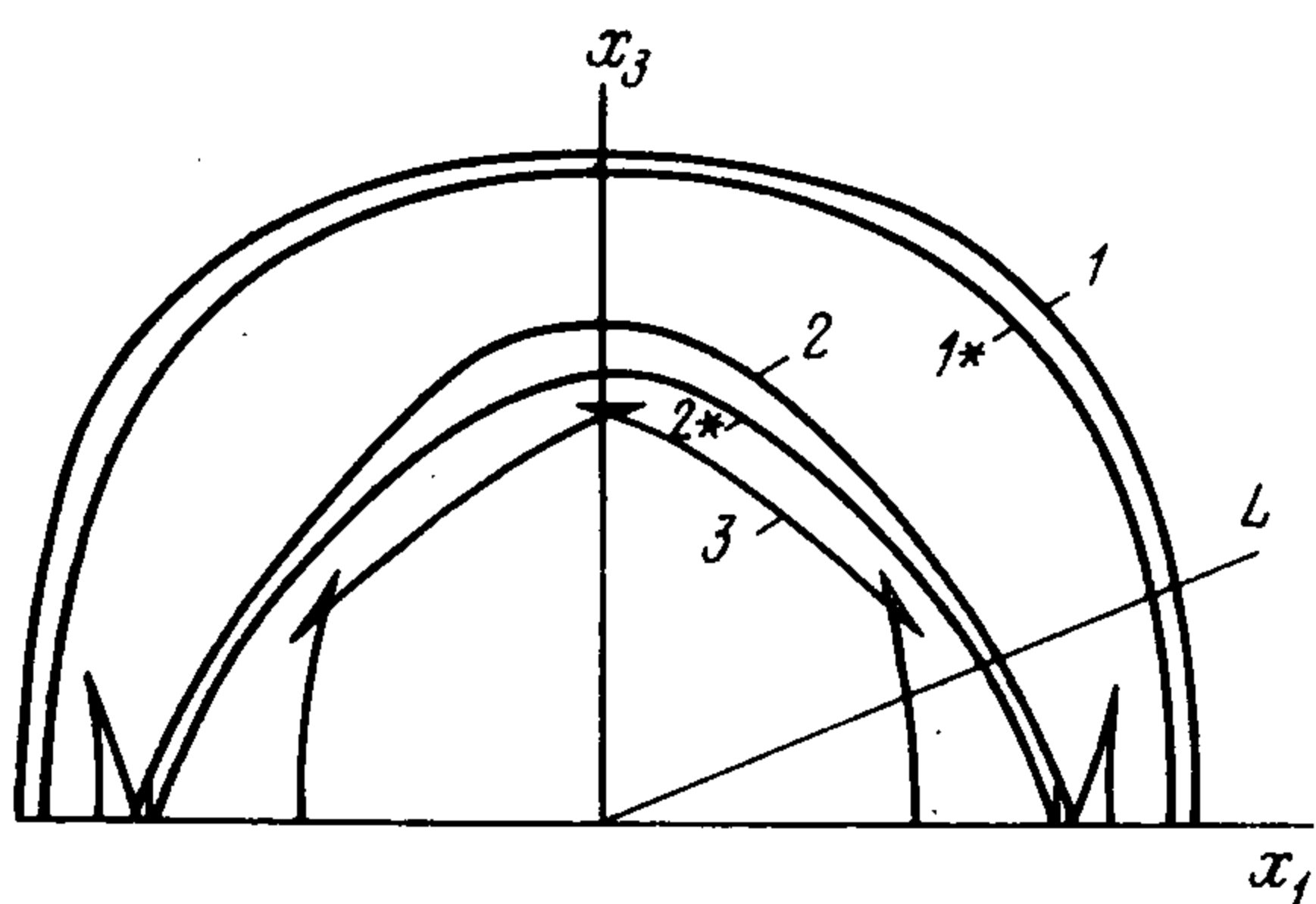
При ударном воздействии первого типа в направлении $\varphi = 0^\circ$ распространяется пять волн со скоростями $G_{(1)} > G_{(1^*)} > G_{(2)} > G_{(2^*)} > G_{(3)}$ (пронумеруем их в порядке убывания скорости). На первой волне терпит разрыв величина v_1 , а Φ_3 непрерывна вместе со своей первой производной, а вторая производная от Φ_3 по x_1 терпит разрыв.



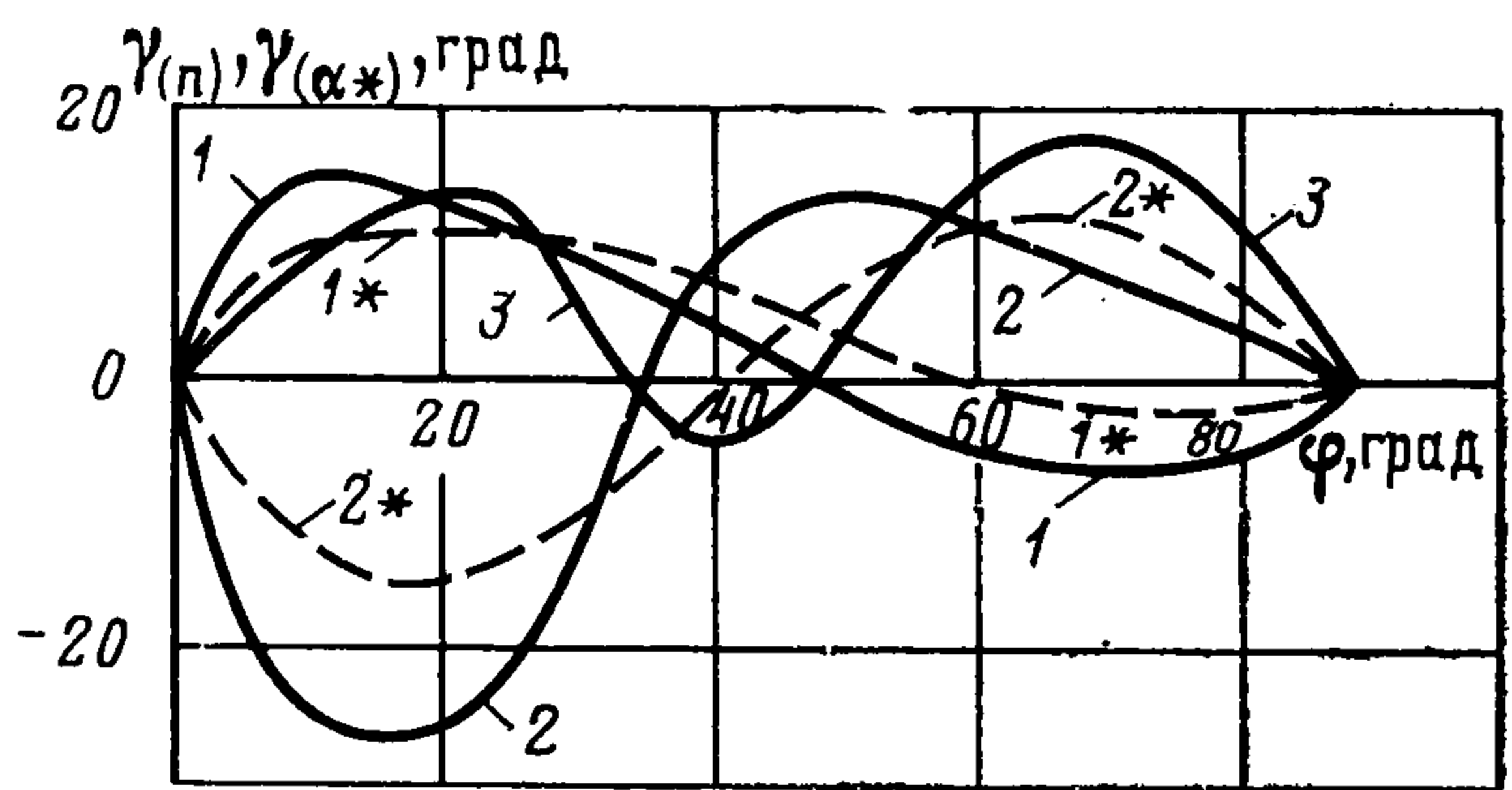
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На второй волне терпит разрыв величина Φ_1 , первая производная от v_1 и вторые производные от v_2, v_3 . На третьей волне терпят разрыв первые производные от Φ_1, v_2, v_3 и вторая производная от v_1 , на четвертой волне терпят разрыв первые производные от v_1 и Φ_3 , на пятой волне — первые производные от Φ_1, v_2, v_3 и вторая производная от v_1 . Численный анализ решения при граничных условиях первого типа показывает, что четвертая волна не вносит существенного вклада в определение скоростей перемещений и углов поворота и ее можно не учитывать.

Для иллюстрации сказанного на фиг. 3 приведены зависимости безразмерных скоростей перемещений и углов поворота (скорости перемещений относились к начальной скорости X_0 , а скорости углов поворота — к Y_0) для кварцевой пластинки АТ-среза

толщиной $2b = 2$ мм при $\tau = tY_0 = 1$ от $\xi = \frac{x_1}{G(1)} Y_0$. Кривые 1—5 соответствуют $\bar{v}_1, \bar{\Phi}_1, \bar{v}_3, \bar{\Phi}_3, \bar{v}_2$. На отрезке от 0 до 0,53 вклад в решение вносят все пять волн, на отрезке от 0,53 до 0,76 — первые четыре, на отрезке от 0,76 до 0,86 — первые три, на отрезке от 0,86 до 0,96 — первые две и на отрезке от 0,96 до 1,00 — только одна первая волна.

При ударном воздействии второго типа характер каждой из пяти волн претерпевает изменения, а именно: на первой волне рвутся первая производная величины v_1 и вторые производные от Φ_1 и Φ_3 ; на второй волне терпят разрыв первая производная величины Φ_1 и вторые производные от v_2 и v_3 ; на третьей волне терпят разрыв величины v_2 и v_3 и первая производная от Φ_1 ; на четвертой волне рвутся величина Φ_3 , первая производная от v_1 и вторая производная от Φ_1 ; на пятой волне терпят разрыв величины v_2 и v_3 и первая производная от Φ_1 . Анализ численных результатов в этом случае позволяет сделать вывод о том, что первая и вторая волны не оказывают существенного влияния на значения скоростей перемещений и углов поворота и их вклад в решение можно не учитывать. Эпюры безразмерных скоростей перемещений и углов поворота изображены на фиг. 4.

В заключение подсчитаем лучевые скорости $G_{L(n)}$, $G_{L(\alpha^*)}$, волн сильного разрыва (скорости, с которыми распространяются возмущения вдоль луча), построим кривые лучевых скоростей, сравним их с соответствующими кривыми фазовых скоростей $G_{(n)}$, $G_{(\alpha^*)}$ (фиг. 1, а, б) и, кроме того, найдем углы $\gamma_{(n)}$, $\gamma_{(\alpha^*)}$, характеризующие отклонение лучей от волновых нормалей. Как уже отмечалось выше, экстремумы фазовых скоростей $G_{(n)}$, $G_{(\alpha^*)}$ совпадают с нулями скоростей $g_{(n)}$, $g_{(\alpha^*)}$ распространения возмущений вдоль соответствующих волновых фронтов. Это наводит на мысль, что скорости $g_{(n)}$, $g_{(\alpha^*)}$ являются производными по переменной φ от фазовых скоростей $G_{(n)}$, $G_{(\alpha^*)}$. Действительно, если выражение

$$s_{ij}l_i^{(n)}l_j^{(n)} = \rho G_{(n)}^2$$

продифференцировать по φ и учесть, что $s_{ij}l_i^{(n)}l_j^{(m)} = 0$ при $n \neq m$, то в результате можно получить

$$G_{(n),\varphi} = s_{ij,\varphi}l_i^{(n)}l_j^{(n)} (2\rho G_{(n)})^{-1} \quad (2.1)$$

Так как $s_{ij} = 1/2 p_{ij} |_{\tau_\sigma = \nu_\sigma}$ и, следовательно, $s_{ij,\varphi} = p_{ij}$, то формула (2.1) совпадает с формулой (1.5) для $g_{(n)}$, т. е. $G_{(n),\varphi} = g_{(n)}$. Аналогично можно получить, что $G_{(\alpha^*),\varphi} = g_{(\alpha^*)}$.

Чтобы определить местонахождение возмущения в каждый фиксированный момент времени, необходимо исключить параметр φ из системы уравнений

$$\begin{aligned} F(x_1, x_3, \varphi) &= x_1\nu_1 + x_3\nu_3 - Gt = 0 \\ F_1(x_1, x_3, \varphi) &= x_1\tau_1 + x_3\tau_3 - gt = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь индекс, указывающий на порядковый номер волны, для простоты опущен.

В силу равенства $g = G_{,\varphi}$ функция $F_1(x_1, x_3, \varphi) = F_{,\varphi}(x_1, x_3, \varphi)$, т. е. кривые лучевых скоростей являются огибающими волновых фронтов плоских волн, вышедших в определенный момент времени из точечного источника, помещенного в начале координат [7].

Из (2.2) можно получить уравнения поверхностей лучевых скоростей в полярной форме

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = G_L t, \quad G_L = \sqrt{G^2 + g^2} \quad (2.3)$$

а также выражения для углов

$$\cos \gamma = GG_L^{-1}, \quad \sin \gamma = gG_L^{-1} \quad (2.4)$$

характеризующих отклонение лучей волновой нормали.

На фиг. 5 изображены кривые лучевых скоростей для пяти плоских волн, подсчитанные по формуле (2.2) (в силу симметрии изображены только верхние части кривых).

Видно, что гладкие волновые фронты наблюдаются только у двух типов волн — квазипродольной (первая волна) и квазипродольной поворотной (вторая). У квазипоперечных волн (третья и пятая) и квазипоперечной поворотной волны (четвертая) волновые фронты характеризуются лагунами, причем третья и четвертая волны имеют по две лагуны, расположенные симметрично на оси x_1 , а пятая — шесть лагун, две из которых находятся на оси x_3 , а четыре расположены симметрично относительно начала координат на прямых, составляющих углы $\pm 35^\circ 15'$ с осью x_1 (эти лагуны не симметричны относительно данных прямых). Заметим, что АТ-срез наклонен к кристаллографической оси также под углом $35^\circ 15'$. Луч L может пересекать волновую поверхность в пяти, семи или девяти точках, т. е. вдоль луча в кварцевой пластинке АТ-среза могут распространяться до девяти различных по скоростям упругих волн, из которых две являются квазипродольными, а остальные квазипоперечными.

На фиг. 6 показаны зависимости углов γ отклонения лучей от волновой нормали от угла φ наклона волновой нормали к оси x_1 , построенные на основе формул (2.4).

Как видно из графиков, все кривые, кроме третьей, имеют два экстремума и пересекают ось φ в трех точках (третья кривая имеет три экстремума и четыре точки пересечения с осью φ). Иначе говоря, лучи максимально отклоняются от нормали в двух направлениях (для пятой волны в трех направлениях) и совпадают с волновой нормалью в трех направлениях (для пятой волны в четырех), два из которых совпадают с осями x_1 , x_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohen H., Thomas R. S.* Transient waves in inhomogeneous anisotropic elastic plates // *Acta Mech.* 1985. V. 58. No. 12. P. 41—57.
2. *Mindlin R. D., Spencer W. J.* Anharmonic, thickness-twist overtones of thickness-shear and flexural vibrations of rectangular, AT-cut quartz plates // *J. Acoust. Soc. America.* 1967. V. 42. No. 6. P. 1268—1277.
3. *Kaczkowski Z.* The influence of the shear forces and the rotatory inertia on the vibration of an anisotropic plate // *Arch. mech. stosowanej.* 1960. V. 12. No. 4. P. 531—552.
4. *Красюков В. П.* Колебания анизотропных пластинок с учетом инерции вращения и деформации сдвига // *Науч. тр. Саратов. политехн. ин-та.* 1966. Вып. 23. С. 107—110.
5. *Achenbach J. D., Reddy D. P.* Note on wave propagation in linearly viscoelastic media // *ZAMP.* 1967. V. 18. No. 1. P. 141—144.
6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. *Musgrave M. J. P.* Crystal acoustics: Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals. San Francisco: Holden-Day, 1970. 288 p.

Воронеж

Поступила в редакцию
6.IV.1990