Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 539.3 : 534.1

Л. А. Алексеева

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ БЕГУЩИХ НАГРУЗОК

Строится матрица Грина для сосредоточенной силы, бегущей вдоль оси в изотропном упругом пространстве при до-, сверх- и трансзвуковых скоростях движения. На основе теории обобщенных функций получен аналог формулы Сомильяны, позволяющий строить граничные интегральные уравнения (ГИУ) для решения краевых задач в случае бегущих нагрузок.

Исследование движения транспорта в тоннелях, транспортируемых грузов и жидкостей в трубопроводах приводит к модельным задачам о действии подвижных нагрузок в цилиндрических полостях, расположенных в сплошной среде. Для классического кругового профиля полости при решении этих задач с успехом используются методы полного и неполного разделения переменных [1]. В случае более сложных профилей удобен метод ГИУ (МГИУ). Исходным для его применения является наличие фундаментальных решений. При дозвуковых скоростях движения фундаментальные решения найдены ранее [2, 3]. Ниже предлагается иной, более простой способ построения фундаментальных решений во всем диапазоне скоростей и показано, как на основе теории обобщенных функций можно строить ГИУ для решения задач о действии подвижных нагрузок в тоннелях с произвольным профилем сечения.

1. Уравнения движения в пространстве обобщенных функций. Обозначим x_1, x_2, x_3 — лагранжевы декартовы координаты точки x линейно-упругой изотропной среды, заданной параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ; u_i, ε_{ij}, σ_{ij} — декартовы компоненты перемещений $\mathbf{u}$, тензоров деформации и напряжений соответственно. Связь между ними задается соотношениями Коши и законом Гука

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование, δ_{ij} — символ Кронеккера, $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$, $u_{i,jk} = \partial^2 u_i/\partial x_j\partial x_k$.

Уравнения движения сплошной среды

$$\sigma_{ij,j} + \rho G_i = \rho u_{i,tt},\ i, j = 1, 2, 3$$

при учете соотношений (1.1) приводятся к виду

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{j,ij} + c_2^2 u_{i,jj} - u_{i,tt} + G_i = 0 \tag{1.2}$$

где c_1, c_2 — скорости объемных и сдвиговых волн. Если $G_i = G_i\,(x_1, x_2, x_3 - ct)$, то решение уравнения (1.2) обладает такой же структурой $\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(x_1, x_2, x_3 - ct)$. В подвижной системе координат $(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3 - ct)$ уравнение (1.2) примет вид (штрихи далее опускаем)

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{j,ij} + c_2^2 u_{i,jj} - c^2 u_{i,33} + G_i = 0 \tag{1.3}$$

Как известно, [4], система (1.2) строго гиперболическая, класс ее решений содержит разрывные. Поверхность разрыва (волновой фронт) совпадает с характеристической поверхностью системы (1.2) и движется в пространстве с течением времени. Пусть $F\,(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение такой поверхности F_t, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к F_t

в R_3:

$$n_j = F_{,j} \| \operatorname{grad} F_t \|^{-1}, \quad \| \operatorname{grad} F_t \|^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial F_t}{\partial x_k} \right)^2$$

v — скорость движения F_t в R_3:

$$v = -F_{,t} \| \operatorname{grad} F_t \|^{-1} \tag{1.4}$$

Обозначим F «ту же» поверхность, но в $R_4 = R_3 \times t$, где она неподвижна, $\mathbf{v} = (\nu_1, \ldots, \nu_4)$ — нормаль к F в R_4:

$$\nu_j = F_{,j} \| \operatorname{grad} F \|^{-1}, \quad \| \operatorname{grad} F \|^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right)^2$$

Поверхность F определяется уравнением

$$\nu_t = \pm c_j \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \nu_k^2}, \quad j = 1, 2, \ \nu_t = \nu_4 \tag{1.5}$$

Из (1.5) и (1.4) следует, что v совпадает с одной из звуковых скоростей c_1, c_2.

Требование непрерывности перемещений при переходе через фронт, связанное с сохранением сплошности среды

$$[u_i]_{F_t} = 0 \tag{1.6}$$

приводит к известным кинематическим условиям совместности решений [4]

$$[u_{i,t} n_j + v u_{i,j}]_{F_t} = 0 \tag{1.7}$$

(условие непрерывности касательных производных), помимо этого из (1.2) следуют динамические условия совместности

$$[\sigma_{ij} n_j + \rho v u_{i,t}]_{F_t} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь $[f]_{F_t}$ — скачок f на F_t: $[f_i n_i]_{F_t} \triangleq n_i [f_i]_{F_t}$.

Рассмотрим, как эти условия трансформируются для решений уравнений (1.3). Характеристическая поверхность T должна удовлетворять уравнению

$$\det \{ (c_1^2 - c_2^2) n_i n_j + \delta_{ij} (c_2^2 - c^2 n_3^2) \} = 0 \tag{1.9}$$

корни которого при учете соотношений (1.5) имеют вид

$$n_3 = \pm M_j^{-1} = \pm c_j / c, \ j = 1, 2 \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{n} = \{n_i\}$ — вектор единичной нормали к T, M_j — числа Маха.

Поскольку $n_3 \leqslant 1$, отсюда следует, что $\mathrm{M}_j \geqslant 1$, т. е. разрывные решения могут возникнуть только в случае, если нагрузки сверхзвуковые или звуковые. Условия на фронтах в этом случае принимают вид

$$[u]_T = 0, \ [v u_{i,j} - c n_j u_{i,3}]_T = 0 \tag{1.11}$$

$$[\sigma_{ij} n_j - \rho v c u_{i,3}]_T = 0 \tag{1.12}$$

Поскольку, как следует из (1.10), (1.4), $v = c n_3$, то подставляя в последнее соотношение (1.12), получим

$$[\sigma_{ij} n_j - \rho c^2 n_3 u_{i,3}]_T = 0 \tag{1.13}$$

Введение сингулярных массовых сил в уравнения (1.3) для построения фундаментальных решений требует записи этих уравнений с учетом условий (1.11), (1.13) в пространстве обобщенных функций. В качестве основного пространства $D_3(R_3)$ рассмотрим пространство финитных бесконечно-дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_3(x)\}$, определенных на R_3. Соответствующее ему сопряженное пространство — пространство обобщенных вектор-функций $D_3'(R_3)$. Далее везде вместо «вектор-функция» будем говорить «функция». Сходимость определяется аналогично сходимости в $D(R_N)$ и $D'(R_N)$ [5, 6].

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — любое классическое решение (1.3), непрерывное, дважды кусочно дифференцируемое почти всюду, кроме, быть может, поверхностей, где выполнены условия (1.11)—(1.13). Обозначим $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ соответствующую $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ обобщенную функцию: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$, т. е.

$$(\mathbf{u}^*, \varphi) = \int_{R_3} u_i(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dV, \qquad \forall \varphi \in D_3(R_3) \tag{1.14}$$

Здесь интеграл берется по пространству R_3, вернее, его части в силу ограниченности носителя $\varphi(\mathbf{x})$.

Введем обобщенные тензоры напряжений σ_{ij}^* и деформаций ε_{ij}^*, определяемые соотношениями (1.1), но уже в обобщенном смысле.

Введем характеристическую функцию множества $T_+ = \{\mathbf{x}\colon T(\mathbf{x}) > 0\}$ (здесь $T(\mathbf{x}) = 0$ — уравнение поверхности T):

$$H_T^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & T(\mathbf{x}) > 0 \\ {}^1/_2, & T(\mathbf{x}) = 0 \\ 0, & T(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Аналогично вводятся T_- и H_T^-: $H_T^- + H_T^+ = 1$. Известно [5], что

$$H_{T,j}^{\pm} = \pm n_j \delta_T(\mathbf{x}) \tag{1.16}$$

$$u_{i,j}^* = u_{i,j} + [u_i n_j]_T \delta_T(x) \tag{1.17}$$

где $\alpha(\mathbf{x})\delta_T(\mathbf{x})$ — простой слой на T:

$$(\alpha\delta_T, \varphi) = \int_T \alpha_i(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, dS, \qquad \forall \varphi \in D_3(R_3) \tag{1.18}$$

В (1.17) первое слагаемое справа — классическая производная от u_i. Из этих соотношений следует

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* - \rho c^2 u_{i,33}^* + \rho G_i^* = [\sigma_{ij} n_j - \rho c^2 n_3 u_{i,3}]_T \delta_T + \{[\lambda u_k n_k \delta_{ij} + \\ + \mu(u_i n_j + u_j n_i)]_T \delta_T\}_{,j} - \{[u_k n_3]_T \delta_T\}_{,3} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Видно, что плотность $\alpha(\mathbf{x})$ простого слоя совпадает с динамическими условиями совместности решений (1.13) и равна нулю. Из условий (1.11) следует равенство нулю плотности $\beta(x)$ двойного слоя $\{\beta(x)\delta_T(x)\}_{,j}$, значит правая часть равенства (1.19) равна нулю. Таким образом, перемещения в обобщенных функциях удовлетворяют тем же уравнениям (1.3), но уже в обобщенном смысле.

2. Формула Сомильяны для подвижных нагрузок. Пусть $U_{ij}^*(\mathbf{x})$ — фундаментальное решение уравнений (1.3), соответствующее массовой силе $\mathbf{G}^* = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x})$, где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция в $D'(R_3)$ [6]:

$$(c_1^2 - c_2^2) U_{jk,ij}^* + c_2^2 U_{ik,jj}^* - c^2 U_{ik,33}^* + \delta_{ik}\delta(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.1}$$

Введем тензоры, соответствующие $G_i^* = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$:

$$U_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_{kj}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = \lambda n_i U_{kj,k} + \mu n_k (U_{ij,k} + U_{kj,i})$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = \Gamma_{ji}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \tag{2.2}$$

Как известно [5, 6], если $\mathbf{G}^*$ — произвольная массовая сила, то соответствующие ей перемещения определяются при помощи свертки

$$\mathbf{u}^* = U_{ij}^* * G_j^* = \int\limits_{R_3} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) G_j^*(\mathbf{y})\, dV(\mathbf{y}) \tag{2.3}$$

где последнее равенство соответствует регулярным U_{ij}^* и G_i^*.

Пусть S_+ — упругая среда, ограниченная гладкой цилиндрической поверхностью S, вдоль которой в направлении оси x_3 с постоянной скоростью c движется нагрузка

$$\sigma_{ij} n_j = p_i(x_1, x_2, x_3 - ct), \quad \mathbf{x} \in S \tag{2.4}$$

$\mathbf{n} = \{n_i\}$ — единичный вектор внешней нормали к S. Ясно, что

$$n_3 = 0 \tag{2.5}$$

Массовые силы отсутствуют. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение уравнений (1.3) в подвижной системе координат, удовлетворяющее (2.4) в S_+. Рассмотрим обобщенную функцию $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) H_S^+(\mathbf{x})$. Следуя рассуждениям разд. 1, для нее получим уравнения, аналогичные (1.19):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^* - \rho c^2 u_{i,33}^* = -(p_i - \rho c^2 n_3 u_{i,3})\delta_S(\mathbf{x}) + \{n_3 u_i \delta_S(\mathbf{x})\}_{,3} - \\ - \{(\lambda u_k n_k \delta_{ij} + \mu(u_i n_j + u_j n_i))\delta_S(\mathbf{x})\}_{,j}\end{aligned} \tag{2.6}$$

где вместо скачка стоят значения соответствующих выражений на S, так как $\mathbf{u}^* = 0$ вне $S_+ + S$. Следуя (2.3), при учете (2.5) и свойства дифференцирования свертки [5], получим

$$\rho u_i^* = U_{ik}^* * p_k \delta_S + \{(\lambda u_k n_k \delta_{lj} + \mu(u_l n_j + u_j n_l))\delta_S * U_{il}^*\}_{,j} \tag{2.7}$$

или

$$\rho u_i^* = U_{ik}^* * p_k \delta_S + (\lambda u_k n_k \delta_{lj} + \mu(u_l n_j + u_j n_l))\delta_S * U_{il,j}^* \tag{2.8}$$

Если U_{ik}^* и $U_{ik,j}^*$ — регулярные обобщенные функции, то последнее равенство можно записать в интегральном виде. Однако, как показывают исследования, в зависимости от скорости движения c тензор U_{ik}^* или его производные могут стать сингулярными. Для таких U_{ik}^* удобно пользоваться формулой (2.7). В частности, если U_{ik}^* — регулярная обобщенная функция, то все свертки в (2.7) записываются в интегральном виде с последующим дифференцированием полученных интегралов по известным правилам.

Воспользуемся следствием (2.1)

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = U_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

и равенством

$$U_{ij, x_k} = -U_{ij, y_k}$$

и перепишем (2.8) формально в интегральном виде, переобозначая немые индексы у перемещений с учетом (2.2). В результате получим

$$u_i^* = \int\limits_S \{U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{y}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}(\mathbf{y})) u_k(\mathbf{y})\}\, dS(\mathbf{y}) \tag{2.9}$$

Формула по виду совпадает с формулой Сомильяны статической теории упругости [3] и выражает перемещения внутри области через граничные значения перемещений и напряжений. При $x \in S$ для ляпуновских поверхностей формула дает ГИУ для решения краевых задач с подвижными нагрузками. Однако в этом случае интегралы требуют определенной регуляризации, которая зависит от свойств ядер U_{ij} и T_{ij}. Последние существенным образом зависят от скорости движения c. Исследования показывают, что в виде (2.9) формула верна только для дозвуковых скоростей подвижной нагрузки ($c < c_2$), при этом для $x \in S$ второй интеграл сингулярный берется в смысле главного значения. Для сверхзвуковых скоростей ($c \geqslant c_2$) для построения регулярного аналога формул Сомильяны следует пользоваться соотношением (2.7).

3. Обобщенное преобразование Фурье. Приведем вначале некоторые конструктивные алгоритмы определения прямого и обратного преобразований Фурье локально интегрируемых в R_1 функций медленного роста [5], которые используем далее для определения U_{ij}^*.

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в R_1 функция медленного роста. Назовем обобщенным преобразованием Фурье этой функции выражение

$$F_x[f] = \bar{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\xi x - \varepsilon|x|}\, dx, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.1}$$

Удобно использовать представление

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) \tag{3.2}$$

где $f_\pm = fH(\pm x)$, $H(x)$ — функция Хевисайда. Из (2.1) следует

$$\bar{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to +0} (\bar{f}_+(\xi + i\varepsilon) + \bar{f}_-(\xi - i\varepsilon))$$

Здесь пределы берутся в смысле сходимости обобщенных функций [5]. В (2.1) интегралы существуют в силу медленного роста $f(x)$, причем

а) функция $\bar{f}_+(\xi)$ аналитична при $\operatorname{Im}\xi > 0$, $\bar{f}_+ \to 0$ при $\operatorname{Im}\xi \to +\infty$,

б) функция $\bar{f}_-(\xi)$ аналитична при $\operatorname{Im}\xi < 0$, $\bar{f}_- \to 0$ при $\operatorname{Im}\xi \to -\infty$.

Поскольку

$$\bar{f}_+(\xi + i\varepsilon) = F_x[f_+(x)\, e^{-\varepsilon x}], \quad \bar{f}_-(\xi - i\varepsilon) = F_x[f_-(x) e^{\varepsilon x}]$$

(здесь преобразование Фурье классическое), можно воспользоваться обратным преобразованием

$$f_+(x)\, e^{-\varepsilon x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_+(\xi + i\varepsilon)\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \frac{e^{-\varepsilon x}}{2\pi} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \bar{f}_+(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi$$

Отсюда

$$f_+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \bar{f}_+(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Аналогичная формула справедлива для $f_-(x)$.

Суммируя, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \bar{f}_+(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi + \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} \bar{f}_-(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi \right) \tag{3.3}$$

Очевидно, последнее справедливо и для обычных функций, для которых существует классическое преобразование Фурье. Трансформанты Фурье локально интегрируемых функций медленного роста имеют особенности на действительной оси ξ' комплексной плоскости $\xi = \xi' + i\xi''$, поэтому формулами (3.3) удобно пользоваться для восстановления оригинала.

Однако обычно бывает известна $\bar{f}(\xi)$, а не $\bar{f}_+$ и $\bar{f}_-$. Назовем факторизацией $\bar{f}(\xi)$ представление (если оно существует)

$$\bar{f}(\xi) = \bar{f}^+(\xi) + \bar{f}^-(\xi) \tag{3.4}$$

где $\bar{f}^+$ и $\bar{f}^-$ обладают свойствами а) и б) соответственно. Если функция имеет особенности на действительной оси, то факторизация может быть неединственной. Простейший пример:

$$\bar{f}(\xi) = -\frac{1}{i\xi}, \quad \bar{f}^+(\xi) = -\frac{A}{i\xi}, \quad \bar{f}^-(\xi) = -\frac{1-A}{i\xi}$$

где A — любая постоянная. Используя (3.3), получим

$$f(x) = f_A(x) = AH(x) - (1-A)H(-x)$$

В частности, $f_0(x) = -H(-x)$, $f_1(x) = H(x)$. Следовательно, таким $\bar{f}(\xi)$ соответствует целый класс локально интегрируемых функций медленного роста, поэтому при восстановлении оригинала следует учитывать его свойства.

В частности, если $f(x) = 0$ при $x > 0$, то $\bar{f}_+(\xi) = 0$; при $f(x) = 0$ для $x < 0$ имеем $\bar{f}_-(\xi) = 0$.

Рассмотрим свертки с $H(x)$:

$$g_+(x) = f_+(x) * H(x) = H(x)\int_0^x f_+(y)\,dy, \quad g_-(x) = f_-(x) * H(-x) =$$
$$= H(-x)\int_x^0 f_-(y)\,dy.$$

Используя (3.1) и перестановку порядка интегрирования, получим

$$\bar{g}_\pm(\xi) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\bar{f}_+(\xi \pm i\varepsilon)}{\mp i(\xi \pm i\varepsilon)} \triangleq \pm\frac{i\bar{f}_\pm(\xi \pm i0)}{\xi \pm i0} \tag{3.5}$$

Пусть $\bar{f}(\xi) = \bar{f}_-(\xi) + \bar{f}_+(\xi)$. Назовем естественной факторизацией функции $\bar{f}(\xi)/i\xi$ выражение

$$\frac{\bar{f}(\xi)}{i\xi} = \frac{\bar{f}_+(\xi)}{i(\xi + i0)} + \frac{\bar{f}_-(\xi)}{i(\xi - i0)} \tag{3.6}$$

Используя соотношения (3.5), получим

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{\bar{f}(\xi)}{i\xi}\right] = f_+ * H(x) - f_- * H(-x) = H(x)\int_0^x f(y)\,dy - H(-x)\int_x^0 f(y)\,dy \tag{3.7}$$

4. Тензор Грина. Применяя преобразование Фурье к (2.1), получим уравнение для определения трансформанты тензора Грина $\bar{U}_{jk}^*(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$(c_1^2 - c_2^2)\,\xi_i\xi_k\bar{U}_{kj}^* - (c_2^2\|\xi\|^2 - c^2\xi_3^2)\bar{U}_{ij}^* + \delta_{ij} = 0,$$

разрешая которое, найдем

$$\xi_k\bar{U}_{kj}^* = \xi_j(c_1^2\|\xi\|^2 - \mathrm{M}_1^2\xi_3^2)^{-1} \tag{4.1}$$

$$\bar{U}_{ij}^* = \delta_{ij}c_2^{-2}(\|\xi\|^2 - \mathrm{M}_2^2\xi_3^2)^{-1} + \frac{\xi_i\xi_j}{c^2\xi_3^2}((\|\xi\|^2 - \mathrm{M}_1^2\xi_3^2)^{-1} - (\|\xi\|^2 - \mathrm{M}_2^2\xi_3^2)^{-1}) \tag{4.2}$$

В зависимости от величины M_j оригинал матрицы U_{ij} имеет различный вид.

Дозвуковые нагрузки. Обозначим $m_j = \sqrt{|1 - \mathrm{M}_j^2|}$. Если $c < c_j$ ($\mathrm{M}_j < 1$), то для восстановления U_{ij}^* следует найти оригиналы функций

$$\bar{f}_{0j} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + m_j^2\xi_3^2)^{-1}$$

и их первообразных по x_3. Заметим, что $\bar{f}_{0j}$ — преобразование Фурье фундаментального решения уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+m_j^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)f_{0j}+\delta(\mathbf{x})=0 \tag{4.3}$$

которое заменой переменных $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3/m_j$, приводится к уравнению Лапласа, функция Грина которого известна [5]. Ее преобразование Фурье имеет вид

$$F_{y_1,y_2y_3}[(4\pi R)^{-1}] = \|\xi\|^{-2},\quad R=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

откуда заменой переменных получим

$$f_{0j}(r, x_3) = (4\pi\sqrt{x_3^2+m_j^2r^2})^{-1},\quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

Функция $\bar{f}_{2j} = \bar{f}_{0j}/(i\xi_3)^2$ — преобразование Фурье класса фундаментальных решений уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+m_j^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Phi=-\delta(\mathbf{x}) \tag{4.4}$$

которые можно представить в виде $\Phi = \Phi_\delta + \Phi_0$, где Φ_δ — частное фундаментальное решение (4.4), Φ_0 — решение однородного уравнения, соответствующего нулевой правой части (4.4). Для определения Φ_δ воспользуемся естественной факторизацией (3.7) $\bar{f}_{0j}(\xi)/(i\xi_3)$ по ξ_3. Введем функции

$$\Phi_{kj}(r,x_3)=H(x_3)\int_0^{x_3}\Phi_{(k-1)j}(r,y)\,dy-H(-x_3)\int_{x_3}^{0}\Phi_{(k-1)j}(r,y)\,dy,\quad k=1,2$$

$$\Phi_{1j}=(4\pi)^{-1}\operatorname{sgn}x_3\ln\left(\frac{|x_3|+V_j^+}{m_jr}\right),\quad V_j^\pm=\sqrt{x_3^2\pm m_j^2r^2};$$

$$\Phi_{2j}=(4\pi)^{-1}\left(|x_3|\ln\left(\frac{|x_3|+V_j^+}{m_jr}\right)-V_j^++m_jr\right)$$

$$f_{kj}=\Phi_{kj},\ k=0,1;\ f_{2j}=\Phi_{2j}-(4\pi)^{-1}m_jr$$

В силу (4.3) функция Φ_{2j} удовлетворяет уравнению (4.4). Поскольку слагаемое m_jr является решением соответствующего однородного уравнения, функция $f_{2j}(r, x_3)$ также фундаментальное решение этого уравнения. Воспользуемся ею для построения U_{ij}^*.

Из (4.1) следует

$$U_{ij,i}^*=c_1^{-2}f_{01,j}$$

$$U_{ij}^*=c_2^{-2}\delta_{ij}f_{02}(r,x_3)+c^{-2}(f_{21}(r,x_3)-f_{22}(r,x_3))_{,ij}$$

Выполняя дифференцирование, получим формулы, совпадающие с формулами работы [2], выведенными прямым обращением трансформант решений

$$U_{11}^*=\frac{1}{4\pi c_2^2}\left[\frac{1}{V_2^+}+\frac{x_3^2x_1^2}{r^4M_2^2}\left(\frac{v}{V_1^+}-\frac{1}{V_2^+}\right)-\frac{x_2^2}{M_2^2r^4}(V_1^+-V_2^+)\right]$$

$$U_{22}^*=\frac{1}{4\pi c_2^2}\left[\frac{1}{V_2^+}+\frac{x_3^2x_2^2}{r^4M_2^2}\left(\frac{1}{V_1^+}-\frac{1}{V_2^+}\right)-\frac{x_1^2}{M_2^2r^4}(V_1^+-V_2^+)\right]$$

$$U_{33}^*=\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{V_1^+}-m_2^2\frac{1}{V_2^+}\right)$$

$$U_{j3}^*=-\frac{x_jx_3}{4\pi c^2r^2}\left(\frac{1}{V_1^+}-\frac{1}{V_2^+}\right),\quad j=1,2$$

$$U_{12}^*=\frac{x_1x_2}{4\pi c^2r^4}\left[(V_1^+-V_2^+)+x_3^2\left(\frac{1}{V_1^+}-\frac{1}{V_2^+}\right)\right]$$

Поскольку при $r \to 0$, $x_3 \neq 0$

$$V_1^+ - V_2^+ \sim 0{,}5r^2(m_1^2 - m_2^2)|x_3|^{-1}, \quad \left(\frac{1}{V_1^+} - \frac{1}{V_2^+}\right) \sim \frac{r^2(m_1^2 - m_2^2)}{2|x_3|^3}$$

$$\frac{x_1 x_3}{r^4}\left(\frac{1}{V_1^+} - \frac{1}{V_2^+}\right) - \frac{x_2^2}{r^4}(V_1^+ - V_2^+) \sim \frac{1}{2|x_3|}(m_1^2 - m_2^2)$$

тензор U_{ij}^* имеет устранимые особенности на оси $r = 0$, кроме точки $x = 0$. При $R \to 0$ имеем $U_{ij}^* \sim \mathrm{const}/R$, $T_{ij}^* \sim \mathrm{const}/R^2$, $R = \|x\|$, и можно показать, что интегралы в (2.9) существуют для $\mathbf{x} \in S_+$ либо существуют в смысле главного значения для $\mathbf{x} \in S$. Построение ГИУ в этом случае аналогично таковому в статической теории упругости и может быть осуществлено предельным переходом в (2.9).

Сверхзвуковые нагрузки. При $c > c_j$ ($\mathrm{M}_j > 1$) нужно найти оригиналы функций

$$\bar{g}_{0j} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 - m_j^2\xi_3^2)^{-1}$$

Ясно, что носитель g_{0j} должен принадлежать отрицательной полуоси $x_3 < 0$, так как нагрузка опережает распространение возмущений в среде. Используя фундаментальное решение волнового уравнения [5], получим

$$g_{0j}(r, x_3) = \frac{H(-x_3 - m_j r)}{2\pi V_j^-}, \quad g_{1j} = -H(-x_3)\int_{x_3}^{0} g_{0j}(r, y)\,dy =$$

$$= -\frac{H(-x_3 - m_j r)}{2\pi}\ln\left(\frac{|x_3| + V_j^-}{m_j r}\right), \quad g_{2j} = -H(-x_3) \times$$

$$\times \int_{x_3}^{0} g_{1j}(r, y)\,dy = -\frac{H(-x_3 - m_j r)}{2\pi}\left(|x_3|\ln\left(\frac{|x_3| + V_j^-}{m_j r}\right) - V_j^-\right)$$

В результате для межзвуковой (трансзвуковой) скорости ($c_2 < c < c_1$):

$$U_{ij}^* = \delta_{ij}c_2^{-2}g_{02}(r, x_3) + c^{-2}(f_{21}(r, x_3) - g_{22}(r, x_3))_{,ij} \tag{4.5}$$

Для сверхзвуковых скоростей ($c > c_1$) в формуле (4.5) следует заменить f_{21} на g_{21}.

Как следует из формул, в этих случаях возникают фронты, совпадающие с поверхностью конусов: $|x_3| = m_j r$, $x_3 < 0$, $j = 1, 2$.

Для трансзвуковых скоростей такой фронт один, перед ним распространяется только объемная деформация, за ним добавляется сдвиговая. Для сверхзвуковых скоростей ($c > c_1$) фронтов два, перед передним фронтом среда покоится. Скорости распространения фронтов равны c_1, c_2 соответственно.

Звуковые нагрузки. При $c = c_j$ имеем $m_j = 0$, тогда

$$h_0(r, x_3) = F^{-1}_{\xi_1\xi_2\xi_3}[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}] = -(2\pi)^{-1}\delta(x_3)\ln r$$

Здесь использовано фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа [5]. Аналогично, следуя (3.7), получим

$$h_1(r, x_3) = (2\pi)^{-1}\delta(x_3)\ln r *_{x_3} H(-x_3) = (2\pi)^{-1}H(-x_3)\ln r$$

$$h_2(r, x_3) = -(2\pi)^{-1}H(-x_3)\ln r *_{x_3} H(-x_3) = (2\pi)^{-1}x_3 H(-x_3)\ln r$$

При $c = c_2$:

$$U_{ij}^* = c_2^{-2}\delta_{ij}h_0(r, x_3) + c^{-2}(f_{21}(r, x_3) - h_2(r, x_3))_{,ij}$$

При $c = c_1$:

$$U_{ij}^* = c_2^{-2}\delta_{ij}g_{02}(r, x_3) + c^{-2}(h_2(r, x_3) - g_{22}(r, x_3))_{,ij}$$

Для звуковых скоростей фронт волны, соответствующий $c = c_j$, перпендикулярен оси x_3 и совпадает с плоскостью x_1x_2 в подвижной системе координат.

Для вывода интегрального аналога формулы Сомильяны и ГИУ в сверхзвуковом случае следует использовать формулы (2.7), так как интегралы в соотношениях (2.9) не существуют не только для граничных точек ($\mathbf{x} \in S$), но и для внутренних ($\mathbf{x} \in S_+$). Последнее связано с наличием неинтегрируемых особенностей ядра T_{ij} на фронтах, что требует нетривиальной регуляризации интегралов в (2.7), прежде чем осуществлять их дифференцирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А.* Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука, 1989. 239 с.
2. *Eason G., Fulton J., Sneddon I. N.* The Generation of Waves in an Infinite Elastic Solid by Variable Body Forces // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1956. V. 248. N 955. P. 575—607.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Петрашень Г. И.* Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. Л.: Наука, 1978. С. 193—206.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1958. 439 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
3.V.1990