

УДК 539.3

© 1991 г.

П. И. Перлин

ОБ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНИЧЕСКИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ

Строятся одномерные интегральные уравнения второго рода для определения асимптотик решений краевых задач теории потенциала и теории упругости в окрестности конических точек граничной поверхности. Описывается алгоритм их решения и приводятся результаты расчетов для модельных примеров.

В результате изучения решений краевых задач для уравнений эллиптического типа в окрестности конических точек граничной поверхности было показано [1], что в этих областях решение представимо в виде сумм бесконечно дифференцируемой функции и асимптотического ряда, каждое слагаемое которого — решение однородной краевой задачи для бесконечного конуса, образованного полукасательными в конической точке. Указанные решения (собственные функции) определяются лишь локальной структурой конической поверхности и типом краевых условий, а множители при них зависят, естественно, от общей конфигурации области и значений краевых условий. Очевидно, что построение таких решений требует меньших усилий, чем решение всей краевой задачи и поэтому их предварительное определение и включение в той или иной форме в расчетные схемы позволит существенно облегчить решение исходной краевой задачи.

Отметим, что в задачах, имеющих физическое содержание, необходимо отказаться от собственных функций, приводящих к неограниченной энергии. Основным интерес в математическом отношении представляют собственные функции, производные которых присутствующие в расчетных схемах, обращаются в бесконечность. В ряде приложений (например, в механике хрупкого разрушения) имеют большое значение множители при собственных функциях, первые производные которых обращаются в бесконечность.

Ограничимся далее задачами для уравнений Лапласа и теории упругости. При определении собственных функций для конусов принято вводить сферическую систему координат r , φ и θ и использовать метод неполного разделения переменных. Зададим поверхность конуса уравнениями и неравенствами

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \theta = \theta(\varphi)$$

Для уравнения Лапласа исходя из представления решения в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = r^\lambda U(\theta, \varphi) \quad (1)$$

получаем двумерную краевую задачу на собственные значения для функции $U(\theta, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda(\lambda + 1)U + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2)$$

при однородных краевых условиях.

Для уравнений Ламе исходят из представлений компонент смещений в сферической системе координат в виде

$$u_r(r, \theta, \varphi) = r^\lambda U_r(\theta, \varphi), \quad u_\theta = r^\lambda U_\theta(\theta, \varphi), \quad u_\varphi = r^\lambda U_\varphi(\theta, \varphi) \quad (3)$$

Заметим, что далее будут использоваться проекции вектора смещений на декартовы оси координат, имеющие аналогичную структуру.

На основании описанного подхода получены решения [2—5] ряда конкретных задач.

Ниже предлагается иной прием, базирующийся на аппарате теории потенциала и сводящий задачу к одномерному интегральному уравнению (ИУ) на контуре, расположенном на конической поверхности.

Как известно, основные пространственные задачи теории потенциала и теории упругости редуцируются к двумерным ИУ (регулярным и сингулярным) на граничной поверхности. Эти уравнения получаются на основе представления искомых функций в виде потенциалов простого или двойного слоев (непрямой подход), а также на основе формул Грина и Бетти (см., например, [6, 7], прямой подход).

Начнем с задачи Неймана для уравнения Лапласа. Согласно (1), на граничной поверхности конуса имеет место представление

$$u[r, \theta(\varphi), \varphi] = r^\lambda U^*(\varphi) \quad (4)$$

Обратимся к интегральному уравнению, получаемому из формулы Грина (прямой подход)

$$u(q) - \frac{1}{2\pi} \int_S u(q) \frac{d}{dn_{q_1}} \left[\frac{1}{R(q, q_1)} \right] dS_{q_1} = 0, \quad R = |q - q_1| \quad (5)$$

Здесь S — поверхность конуса, q и q_1 — точки на конусе с координатами r, φ и $\theta(\varphi)$ и r_1, φ_1 и $\theta(\varphi_1)$ ($r \neq 0$).

Преобразуем уравнение (5) согласно соотношению (4) к виду

$$r^\lambda U^*(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^*(\varphi_1) \cos \theta(\varphi_1) \left\{ \int_0^\infty r_1^{\lambda+1} \frac{d}{dn_{q_1}} \left[\frac{1}{R(q, q_1)} \right] dr_1 \right\} d\varphi_1 = 0 \quad (6)$$

Это уравнение должно выполняться на всей поверхности конуса, однако достаточно требовать его выполнение в одной точке на каждой образующей, т. е. фактически на каком-либо контуре, расположенном на поверхности и охватывающем коническую точку. Это утверждение следует из того факта, что структура решения ИУ (по радиусу) известна, а определению подлежит функция одного аргумента $U^*(\varphi)$. Не представляется целесообразным привести развернутое представление полученного одномерного ИУ. Отметим, что при традиционном подходе решалась краевая задача в фиксированной области (часть сферы, заключенная внутри конуса) а для ИУ допускается достаточно произвольный выбор контура, что можно использовать при упрощении численной реализации.

Из структуры подынтегрального выражения во внутреннем интеграле следует, что для сходимости интеграла необходимо ввести ограничения на допускаемые значения λ ($0 < \lambda < 1$). Эти ограничения не существенны, поскольку тогда собственные функции имеют суммируемые с квадратом неограниченные первые производные (именно те, которые представляют наибольший интерес).

Таким образом, задача свелась к определению значений параметра λ , при котором однородное уравнение (6) имеет нетривиальное решение. Воспользовавшись тем или иным численным методом решения ИУ, подбором и интерполяцией, определим требуемые значения параметра. При использовании, например, метода механических кубатур необходимо разбить всю поверхность конуса пучком лучей на элементарные дольки и, положив функцию $U^*(\varphi)$ постоянной в пределах каждой из них, произвести интегрирование по какой-либо кубатурной формуле, придавая точкам q

поочередно положения в середине (по углу) долек на каком-либо расстоянии от вершины. В результате будет получена система алгебраических уравнений. Вычисляем определитель, и если он (в пределах заданной точности) отличен от нуля, то переходим к другому значению параметра. После определения параметра переходим к построению собственной функции ИУ. Для этого необходимо выразить все значения функции U^* (φ) (в дискретных точках q_j) через одно из них. Алгоритм завершается построением собственной функции краевой задачи. Воспользуемся формулой Грина (при учете того, что нормальная производная обращается в нуль)

$$u(r, \theta, \varphi) = r^\lambda U(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_S r_1^\lambda U^*(\varphi_1) \frac{d}{dn_{q_1}} \left[\frac{1}{R(q, q_1)} \right] dS_{q_1} \quad (7)$$

Остановимся на специфике решения задачи Неймана, используя ИУ, получаемое на основе непрямого подхода. Выше решение ИУ являлось сужением решения краевой задачи, и поэтому порядки асимптотик краевой задачи и ИУ совпадали, а собственная функция ИУ приводила, согласно (7), к собственной функции краевой задачи. Для ИУ, получаемых на основе потенциала простого слоя, установлено [8], что его асимптотики определяются как асимптотиками решения краевой задачи для исходного конуса, так и дополнительного. Поэтому оказывается необходимым после определения собственной функции ИУ произвести проверку краевого условия для собственной функции краевой задачи.

Аналогичные затруднения возникают и при решении задачи Дирихле на основе потенциала двойного слоя.

Изложенный выше подход удастся распространить на задачи теории упругости. Остановимся на построении собственных вектор-функций для второй основной задачи. Будем исходить из сингулярного ИУ, получаемого посредством формул Бетти (прямой подход). Имеем уравнение

$$\mathbf{u}(q) + \int_S \Gamma_2(q, q_1) \mathbf{u}(q_1) dS_{q_1} = 0 \quad (8)$$

Здесь $\Gamma_2(q, q_1)$ — ядро упругого потенциала двойного слоя, вектор-функция $\mathbf{u}(q)$ — значения смещений на поверхности конуса. Согласно (3) введем представления для компонент смещений в декартовых координатах в виде

$$u = r^\lambda U^*(\varphi), \quad v = r^\lambda V^*(\varphi), \quad w = r^\lambda W^*(\varphi) \quad (9)$$

По сравнению с гармоническими задачами возникают затруднения, связанные с необходимостью вычислять двумерные сингулярные интегралы. Для их вычисления предлагается использовать так называемые регулярные представления [9], преобразующие их к несобственным. Правда, поскольку здесь граничная поверхность незамкнута, нужно воспользоваться модификацией регулярных представлений [10]. Пусть S_1 — та часть поверхности конуса, по которой фактически и осуществляется интегрирование. Введем поверхность S_2 , дополняющую поверхность S_1 до замкнутой. Тогда регулярное представление можно записать в виде

$$\int_{S_1} \Gamma_2(q, q_1) \mathbf{u}(q_1) dS_{q_1} = -\mathbf{u}(q) + \int_{S_1} \Gamma_2(q, q_1) [\mathbf{u}(q_1) - \mathbf{u}(q)] dS_{q_1} - \\ - \mathbf{u}(q) \int_{S_2} \Gamma_2(q, q_1) dS_{q_1} \quad (10)$$

Для иллюстрации эффективности предложенного способа были проведены расчеты для задач, решения которых получены традиционным путем. Так, в результате расче-

тов для задачи Дирихле в случае кругового конуса ($\theta = \theta_0$) было показано [3], что показателю λ , лежащему в пределах от 0 до 1, соответствует осесимметричное решение. Это обстоятельство для упрощения было заложено в расчет согласно ИУ, получаемому на основе потенциала двойного слоя. Поэтому вычисление левой части интегрального уравнения проводилось только в одной точке поверхности (расположенной на единичном расстоянии от вершины и на направлении $\varphi = 0$ и $\theta = \theta_0$). ИУ принимает вид

$$1 - \frac{\cos \theta_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} I(\varphi_1) d\varphi_1 = 0, \quad I(\varphi_1) = \int_0^\infty \left[1 + r_1^2 - 2r_1 \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \right]^{-3/2} r_1^{\lambda+1} dr_1 \quad (11)$$

Для оценки точности вычисления внутреннего интеграла воспользовались тем, что он представляет собой преобразование Меллина от функции, вычисляемое посредством специальных функций [11]. Имеет место тождество

$$\int_0^\infty t^{s-1} (1 + 2t \cos \psi + t^2)^{-\nu} dt = 2^{\nu-1/2} (\sin \psi)^{\nu-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) \frac{\Gamma(s) \Gamma(2\nu - s)}{\Gamma(2\nu)} P_{s-\nu-1/2}^{\nu-1/2}(\cos \psi) \quad (12)$$

Интеграл в левой части при $\nu = 3/2$, $s = \lambda + 1$ и $\psi = \arccos(1/2 \cos^2 \varphi_1)$ совпадает с $I(\varphi_1)$. При этих значениях правая часть упрощается и принимает вид

$$\sin \psi \Gamma(\lambda - 2) \Gamma(1 - \lambda) P_\lambda^{-1}(\cos \psi)$$

Расчеты проводились при $\cos \psi = 0$ и $\lambda = 0,5$. Значение правой части тождества (12) по таблицам [12] оказалось равным 1,8541, а левой части (полученное численным интегрированием) — 1,8526.

В результате расчетов при различных λ были получены значения (Δ) левой части уравнения (11), представленные ниже при $\theta_0 = 3/4\pi$:

λ	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Δ	-1,12	-0,53	-0,23	-0,05	0,07	0,15

Интерполированием получено значение $\lambda = 0,46$ (по сравнению со значением 0,4634 [3]), соответствующее $\Delta = 0$.

Была рассмотрена также задача Неймана. Из известных результатов [3] следует, что в этом случае осесимметричному решению соответствует значение $\lambda > 1$, которое нельзя определить предлагаемым приемом. В требуемых пределах лежит решение, представимое в виде $U^*(\varphi) = \cos \varphi$. Это обстоятельство и было заложено в расчет, и поэтому по-прежнему требовалось выполнение ИУ в одной точке. Уравнение (6) приняло вид

$$1 + \frac{1}{2^{3/2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} I(\varphi_1) d\varphi_1 = 0 \quad (13)$$

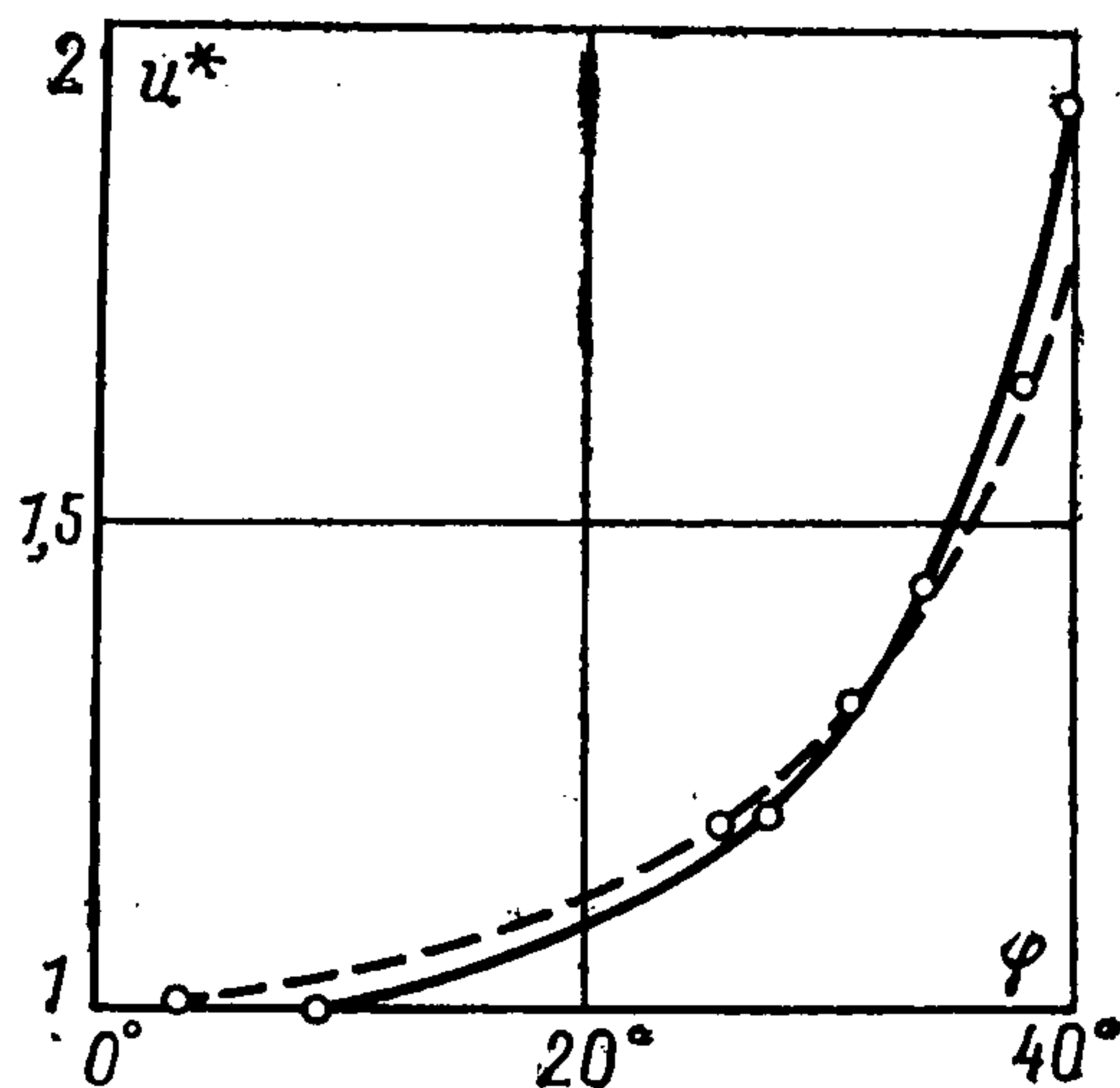
В результате расчетов при различных λ были получены значения (Δ) левой части уравнения (13), представленные ниже:

λ	0,80	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
Δ	0,493	0,260	0,200	0,127	0,065	-0,050	-0,15

Интерполированием получено значение $\lambda = 0,8653$ (по сравнению с 0,8564 [3]).

Изложенный алгоритм представляется возможным распространить на задачи, в которых граничная поверхность состоит из кусков гладких поверхностей, имеющих общую точку (т. е. особенность типа вершины многогранного угла). Исходим из тех же представлений для искомых функций и тех же ИУ. Осуществляем порознь дискретизацию каждого куска поверхности. При этом автоматически снимается вопрос о построении дискретных аналогов ИУ в точках, расположенных на ребрах.

Была рассмотрена задача Дирихле для трехгранного угла, образованного квадрантами (большой угол). Поскольку решение задачи Дирихле для кругового конуса, имеющее допускаемую методом асимптотику, осесимметрично, то предполагалось, что в данной задаче ребра конусов и биссектрисы квадрантов являются линиями симметрии, и поэтому все вычисления проводились в точках половины одного квадранта. Эти точки располагались на единичном расстоянии от вершины и при равномерном по



углу разбиении половины квадранта на N частей. При $N = 3, 4, 8$. Для показателя λ получены значения 0,4445, 0,4459 и 0,4510 (ранее [4] приводилось значение 0,455). Отметим, что для данной задачи были получены [13] верхняя и нижняя оценки: $0,433 < \lambda < 0,464$.

При $N = 4$ и $N = 8$ определялась и собственная функция ИУ. Ниже приводятся графики собственной функции с указанием угловой координаты соответствующей точки относительно биссектрисы квадранта (причем собственная функция нормируется единичным значением в ближайшей к биссектрисе точке).

На фигуре сплошной линией показана зависимость при $N = 4$, штриховой — при $N = 8$.

Автор благодарит В. Г. Мазью за постановку задачи и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
2. Рвачев В. Л. О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 169—171.
3. Bazant Z. P., Keer L. N. Singularities of elastic stress and of harmonic function at conical notches or inclusions // Intern. J. Solids and Struct. 1974. V. 10. № 9. P. 957—984.
4. Bazant Z. P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method // Intern. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 3. P. 221—244.
5. Матвеев В. Н., Минакова С. Г. Численный анализ сингулярности напряжений в вершине трехгранного угла // Механика и прикладная математика: Всесоюз. конфер. «Современные проблемы информатики, вычислительной техники и автоматизации». Тула: Приокск. кн. изд-во. 1988. С. 38—42.
6. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
7. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
8. Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 27. С. 132—228.
9. Перлин П. И. Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 366—371.
10. Курносое Н. В., Лиховцев В. М. Решение задач теории упругости для тел, ограниченных незамкнутыми поверхностями // Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: МИХМ, 1978. С. 45—48.
11. Диткин В. А., Прудников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
13. Фикера Г. Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. Вып. 3. С. 105—124.