

В. А. Кошнарева, Ю. А. Мельников

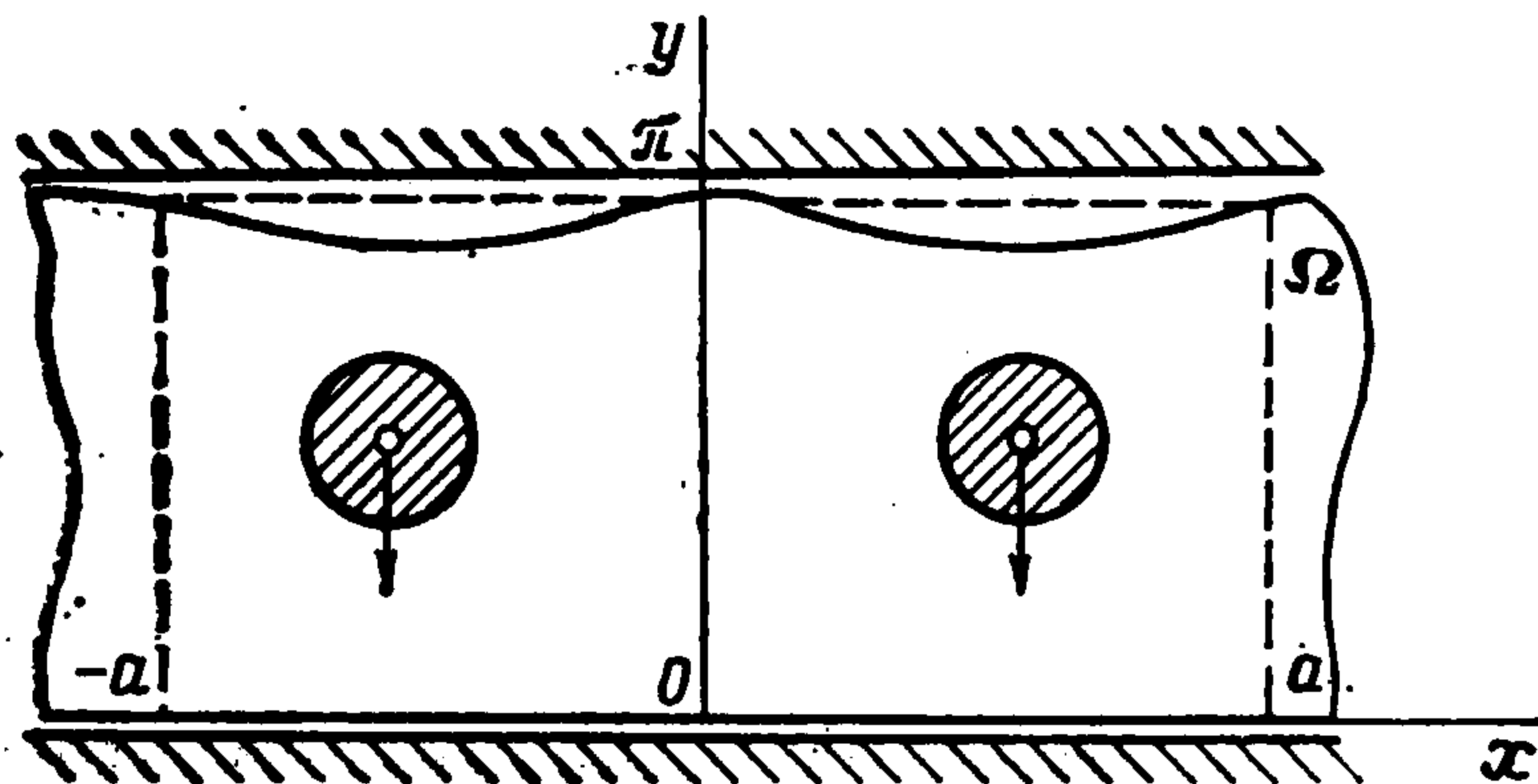
**ОБ ОТСТАВАНИИ ОТ ОСНОВАНИЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ**

Рассматривается задача теории упругости для полосы, содержащей жесткие включения. Полоса опирается без трения своими гранями на жесткие основания, включения нагружены усилиями, перпендикулярными граням полосы, это приводит к появлению участка отставания полосы от одного из оснований, и задача становится собственно смешанной. Используется метод, развитый ранее [1] для несмешанных задач в случае неканонических областей. Он основан на построении матриц — функций Грина соответствующих более простых классических краевых задач для канонических областей с последующим сведением краевых задач для неканонических областей к решению интегральных уравнений.

Впервые этот метод был обсужден на примере собственно смешанных задач для уравнения Лапласа, затем он применялся к контактным задачам теории упругости, в том числе при заранее неизвестных зонах контакта.

1. Пусть однородная изотропная упругая полоса

$\bar{\Omega} (-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq \pi)$  (фиг. 1) с коэффициентами Ламе материала  $\lambda$  и  $\mu$  покоится между двумя недеформируемыми полуплоскостями



Фиг. 1

$y < 0$  и  $y > \pi$ . Предполагается, что трение по линиям контакта отсутствует. Верхняя граница полосы частично отстает от полуплоскости  $y > \pi$  в результате вертикального смещения содержащейся в ней пары абсолютно жестких включений.

В силу симметрии поставленной задачи относительно оси  $x = 0$  вектор смещений точек полуполосы  $\Omega (0 \leq x < \infty; 0 \leq y \leq \pi)$ :

$$U(x, y) = [u_1(x, y), u_2(x, y)]^T$$

определяется системой уравнений Ламе и соответствующими граничными условиями

$$LU = 0 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = 0; u_2 = 0, \tau_{yx} = 0 \text{ при } y = 0 \\ u_2 = 0 \text{ при } x \geq a; \sigma_y = 0 \text{ при } x < a, \tau_{yx} = 0 \text{ при } y = \pi \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$u_1 = 0, u_2 = H = \text{const при } (x, y) \in \Gamma$$

( $L$  — линейный дифференциальный оператор Ламе плоской задачи теории упругости,  $\Gamma$  — контур включения). При этом точка  $x = a$  смены типа граничных условий на верхней кромке полуполосы неизвестна и подлежит определению наряду с компонентами ее напряженно-деформирован-

ного состояния.

Вопросы разрешимости собственно смешанных краевых задач теории упругости для полосы, дифференциальные свойства решений, поведение решений на бесконечности и в точках смены типа граничных условий исследованы [2]. Решение задачи (1.1), (1.2) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно всюду в  $\Omega$ , за исключением, естественно, точки смены типа граничных условий.

Будем решать поставленную задачу в два этапа. Сначала рассмотрим соответствующую задачу при фиксированном значении  $a$ , а затем определим параметр  $a$ , например, из условия непрерывности компоненты  $\sigma_y$  тензора напряжений в этой точке

$$\sigma_y(a_-, \pi) = \sigma_y(a_+, \pi) = 0 \quad (1.3)$$

Итак, доопределим компоненту  $u_2$  вектора  $U$  при  $y = \pi$  на интервале  $[0, a)$  некоторой непрерывной трижды дифференцируемой функцией  $\varphi(x)$ , что приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } x = 0 \\ u_2 &= 0, \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad u_2 = \Phi(x), \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{при } y = \pi \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = H = \text{const} \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma \\ \Phi(x) &= \varphi(x) [1 - \delta_0(x - a)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

( $\delta_0(x - a)$  — функция Хевисайда).

Очевидно, для выполнения условий  $u_x'(0, y) = 0$  и  $u_2(x, \pi) = 0$  при  $a \leq x < \infty$  необходимо положить соответственно

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(a) = 0 \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.4) для системы (1.1) далее представим в виде

$$\begin{aligned} U &= V + S \quad V = V(x, y) = [v_1(x, y); v_2(x, y)]^T \\ S &= S(x, y) = [-y\Phi'(x)/(2\pi); y\Phi(x)/\pi]^T \end{aligned} \quad (1.6)$$

что позволяет, положив  $\varphi'(a) = 0$ , записать для вектора  $V$

$$LV = F \quad v_1 = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.7)$$

$$v_2 = 0, \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = \pi \quad (1.8)$$

$$v_1 = y\Phi(x)/(2\pi), \quad v_2 = H - y\Phi(x)/\pi \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma$$

где  $F = F(x, y)$  — вектор-функция с компонентами

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2\pi)^{-1} (\lambda + 2\mu) y^2 \{ \varphi''(x) [1 - \delta_0(x - a)] - \\ &\quad - \varphi''(a) \delta(x - a) \} - \pi^{-1} \lambda \varphi'(x) [1 - \delta_0(x - a)] \\ f_2(x, y) &= \pi^{-1} \lambda y \{ \varphi''(x) [1 - \delta_0(x - a)] \} \end{aligned}$$

( $\delta(x - a)$  — дельта-функция Дирака).

Вектор  $V$  при помощи матрицы Грина

$$G(x, y; \xi, \eta) = (G_{ij}(x, y; \xi, \eta)) \quad (i, j = 1, 2)$$

однородной краевой задачи, соответствующей (1.7), (1.8), можно представить суммой потенциалов

$$V(x, y) = \iint_{(\Omega)} G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) N(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \quad (1.9)$$

второе слагаемое которой учитывает влияние включения.

Плотность контурного потенциала

$$\mathbf{N}(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$$

— вектор неизвестных интегрируемых на  $\Gamma$  функций. Выражения для элементов  $G_{ij}$  матрицы Грина получены в [3].

Проинтегрировав по  $\eta$  первое слагаемое в правой части равенства (1.9), представим компоненты вектора  $\mathbf{U}$  в соответствии с соотношением (1.6) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & - \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda}{\pi} g_{11}^0 \varphi'(\xi) [1 - \delta_0(\xi - a)] - \left[ \frac{\pi\beta}{6} g_{11}^0 + \right. \right. \\ & + \frac{2\beta}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{k^2} g_{11}^n \cos ky \left. \right\} \left\{ \varphi'''(\xi) [1 - \delta_0(\xi - a)] - \varphi''(a) \delta(\xi - a) \right\} + \\ & + \frac{2\lambda}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{k} g_{12}^n \cos ky \varphi''(\xi) [1 - \delta_0(\xi - a)] \Big\} d\xi + I_1 - (2\pi)^{-1} \Phi^1(x) y^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = & - \int_0^\infty \left\{ - \frac{2\beta}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{k^2} g_{21}^n \sin ky \times \right. \\ & \times \left\{ \varphi'''(\xi) [1 - \delta_0(\xi - a)] - \varphi''(a) \delta(\xi - a) \right\} + \\ & \left. + \frac{2\lambda}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{k} g_{22}^n \sin ky \varphi''(\xi) [1 - \delta_0(\xi - a)] \right\} d\xi + I_2 \end{aligned}$$

$$I_i = \int_{\Gamma} [G_{i1}(x, y; \xi, \eta) v_1(\xi, \eta) + G_{i2}(x, y; \xi, \eta) v_2(\xi, \eta)] d\Gamma(\xi, \eta), \quad i = 1, 2$$

Здесь  $g_{ij}^n = g_{ij}^n(x, \xi)$  — коэффициенты разложений элементов  $G_{ij}$  матрицы Грина в тригонометрические ряды [3],  $\beta = \lambda + 2\mu$ , суммирование ведется по  $k$  от  $k = 0$  до  $k = \infty$ . Если проинтегрировать по частям слагаемые выражений (1.10), содержащие  $\varphi'(\xi)$  и  $\varphi'''(\xi)$ , и просуммировать там, где это удастся, тригонометрические ряды, можно получить выражение

$$\mathbf{U}(x, y) = \int_0^a \mathbf{R}(x, y, \xi, a) \varphi''(\xi) d\xi + \int_{\Gamma} \mathbf{G}(x, y; \xi, \eta) \mathbf{N}(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, \xi, a) = \begin{pmatrix} r_1(x, y, \xi, a) \\ r_2(x, y, \xi, a) \end{pmatrix}$$

$$r_1(x, y, \xi, a) = T_1(x, y, \xi) + T_1(x, y, -\xi) + T_2(x, \xi) + T_3(x, y, \xi, a)$$

$$r_2(x, y, \xi, a) = T_4(x, y, \xi) + T_4(x, y, -\xi) + \pi^{-1} K_1(x, \xi, a) y$$

$$T_1(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} (x + \xi) [ |x + \xi| - \ln(2(\operatorname{ch}|x + \xi| + \cos y)) ] + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{sign}(x + \xi) \sum \frac{(-1)^k \cos ky}{k^2} e^{-k|x+\xi|} \right\};$$

$$T_2(x, \xi) = \begin{cases} \pi/6 - \lambda\xi^2/(2\pi\beta), & \xi \leq x \\ 0, & \xi > x \end{cases}$$

$$\alpha = \lambda + \mu$$

$$T_3(x, y, \xi, a) = \begin{cases} T_5(x, y, \xi) - \lambda x K_1(x, \xi, a)/(\pi\beta), & x < a \\ \lambda a^2/(2\pi\beta), & x > a \end{cases}$$

$$T_4(x, y, \xi) = - \frac{1}{\pi\beta} \left[ \alpha |x + \xi| \operatorname{arctg} \frac{\sin y}{\cos y + e^{|x+\xi|}} + \right.$$

$$\left. + \mu \sum \frac{(-1)^k \sin ky}{k^2} e^{-k|x+\xi|} \right]$$

$$T_5(x, y, \xi) = \begin{cases} (\lambda x^2/\beta - y^2)/2\pi, & x \geq \xi; \\ 0, & x < \xi; \end{cases} \quad K_1(x, \xi, a) = \begin{cases} x - a, & x \geq \xi \\ \xi - a, & x < \xi \end{cases}$$

Используем далее подстановку  $\varphi''(x) = \psi(x)$  и удовлетворим представлением (1.11) последним трем граничным условиям из (1.2), после чего получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^a [\lambda r_{1x}(x, \pi, \xi, a) + \beta r_{2y}(x, \pi, \xi, a)] \psi(\xi) d\xi + J_1 + J_2 = 0 \quad (1.12)$$

$$\left( J_i = \int_{\Gamma} \left\{ \left[ \lambda \frac{\partial G_{1i}}{\partial x}(x, \pi, \xi, \eta) + \beta \frac{\partial G_{2i}}{\partial y}(x, \pi, \xi, \eta) \right] v_i(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right\} \right.$$

$$\left. \int_0^a r_i(x, y, \xi, a) \psi(\xi) d\xi + I_i = H \delta_{i2}, (x, y) \in \Gamma, \quad i = 1, 2 \right.$$

$$\left( \delta_{i2} = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 1, & i = 2 \end{cases} \right)$$

относительно неизвестных функций  $\psi(x)$ ,  $v_i(x, y)$ . При этом используются обозначения, введенные ранее, и, кроме того, введены новые:

$$r_{1x}(x, y, \xi, a) = T_{1x}(x, y, \xi) + T_{1x}(x, y, -\xi) - \lambda (\pi\beta)^{-1} K_1(x, \xi, a)$$

$$r_{2y}(x, y, \xi, a) = T_{2y}(x, y, \xi) + T_{2y}(x, y, -\xi) + \pi^{-1} K_1(x, \xi, a)$$

$$T_{1x}(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi\beta} \left\{ \alpha(x + \xi) \left[ 1 - \frac{\text{sh} |x + \xi|}{\text{ch} |x + \xi| + \cos y} \right] - \mu M(x, y, \xi) \right\}$$

$$T_{2y}(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi\beta} \left\{ \alpha |x + \xi| \frac{1 + e^{|x+\xi|} \cos y}{1 + 2 \cos y e^{|x+\xi|} + e^{2|x+\xi|}} - \mu M(x, y, \xi) \right\}$$

$$M(x, y, \xi) = |x + \xi| - \ln [2 (\text{ch} |x + \xi| + \cos y)]$$

Ядра уравнений системы (1.12) имеют слабую особенность, что позволяет применить при ее решении метод естественной регуляризации, основанный на выделении особенности в ядре с использованием метода Крылова — Боголюбова [4]. Параметром регуляризации в этом случае является шаг  $h$  разбиения множества интегрирования, величина которого выбиралась в результате проведения вычислительного эксперимента.

Введем параметризацию точек  $(x, y)$  контура  $\Gamma$  при помощи соотношений

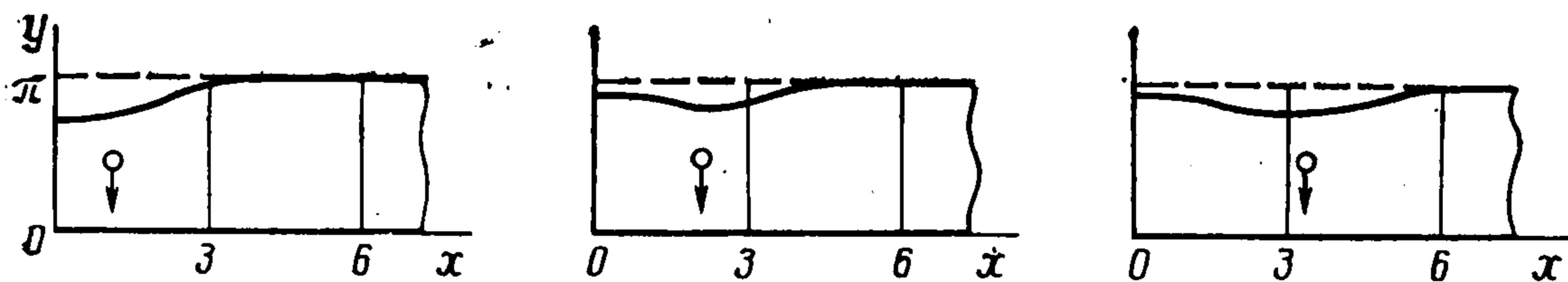
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \xi = x(\tau), \quad \eta = y(\tau), \quad t_1 \leq t, \quad \tau \leq t_2$$

Тогда, разбивая интервал  $[0, a)$  и контур  $\Gamma$  соответственно на  $p$  и  $m$  равных частей, аппроксимируем систему (1.12) регулярной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений  $z_j$  неизвестных функций  $\psi(x)$ ,  $v_1(x, y)$ ,  $v_2(x, y)$  в средних точках интервалов разбиений

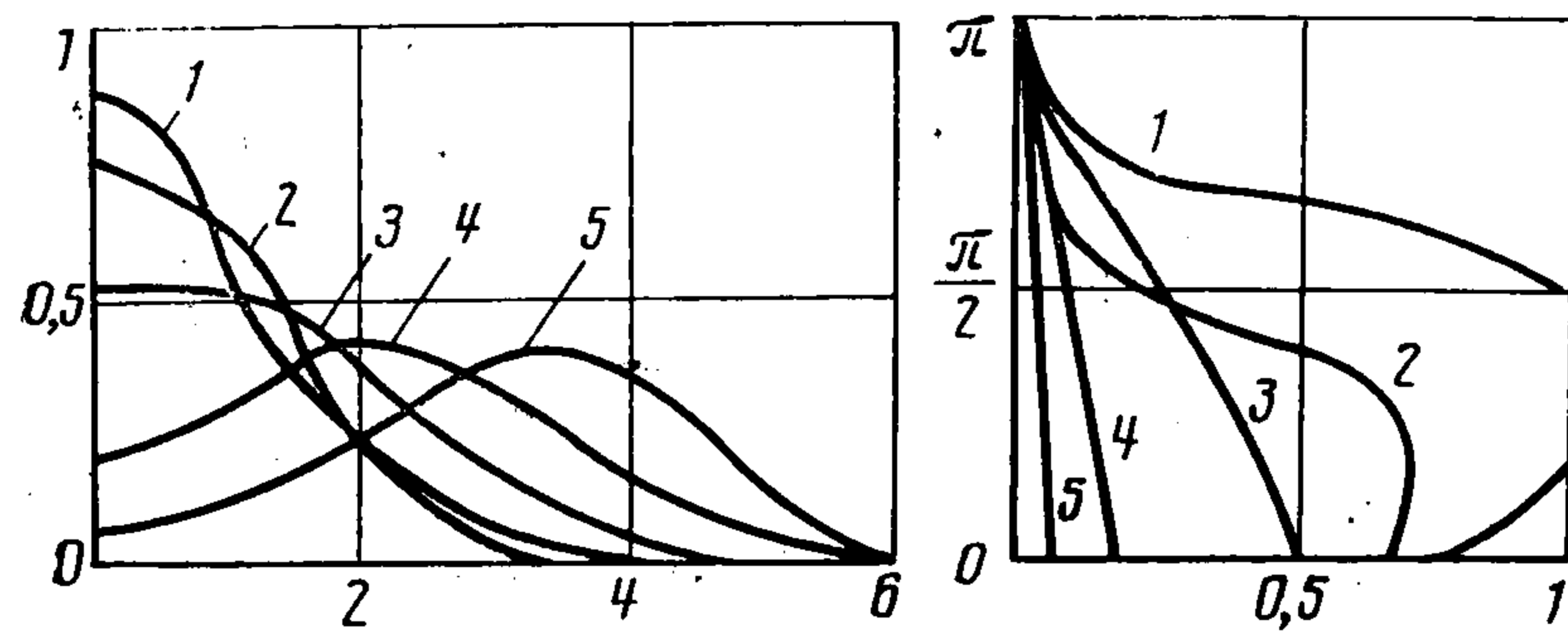
$$\sum_{j=1}^{p+2m} B_{ij} z_j = q_i \quad (1.13)$$

$$z_j = \begin{cases} \psi(\xi_j); & j = 1, 2, \dots, p \\ v_1(x(\tau_{j-p}), y(\tau_{j-p})), & j = p+1, p+2, \dots, p+m \\ v_2(x(\tau_{j-p-m}), y(\tau_{j-p-m})), & j = p+m+1, \\ & p+m+2, \dots, p+2m \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, p+m \\ H, & i = p+m+1, p+m+2, \dots, p+2m \end{cases}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При вычислении диагональных элементов  $B_{ij}$  матрицы системы (1.13) возникают несобственные интегралы вида

$$\int_{x_i-h/2}^{x_i} \ln(1 - \exp(-|x_i - \xi_j|)) d\xi$$

которые вычисляем, аппроксимируя аргумент логарифма линейной частью его ряда Тейлора.

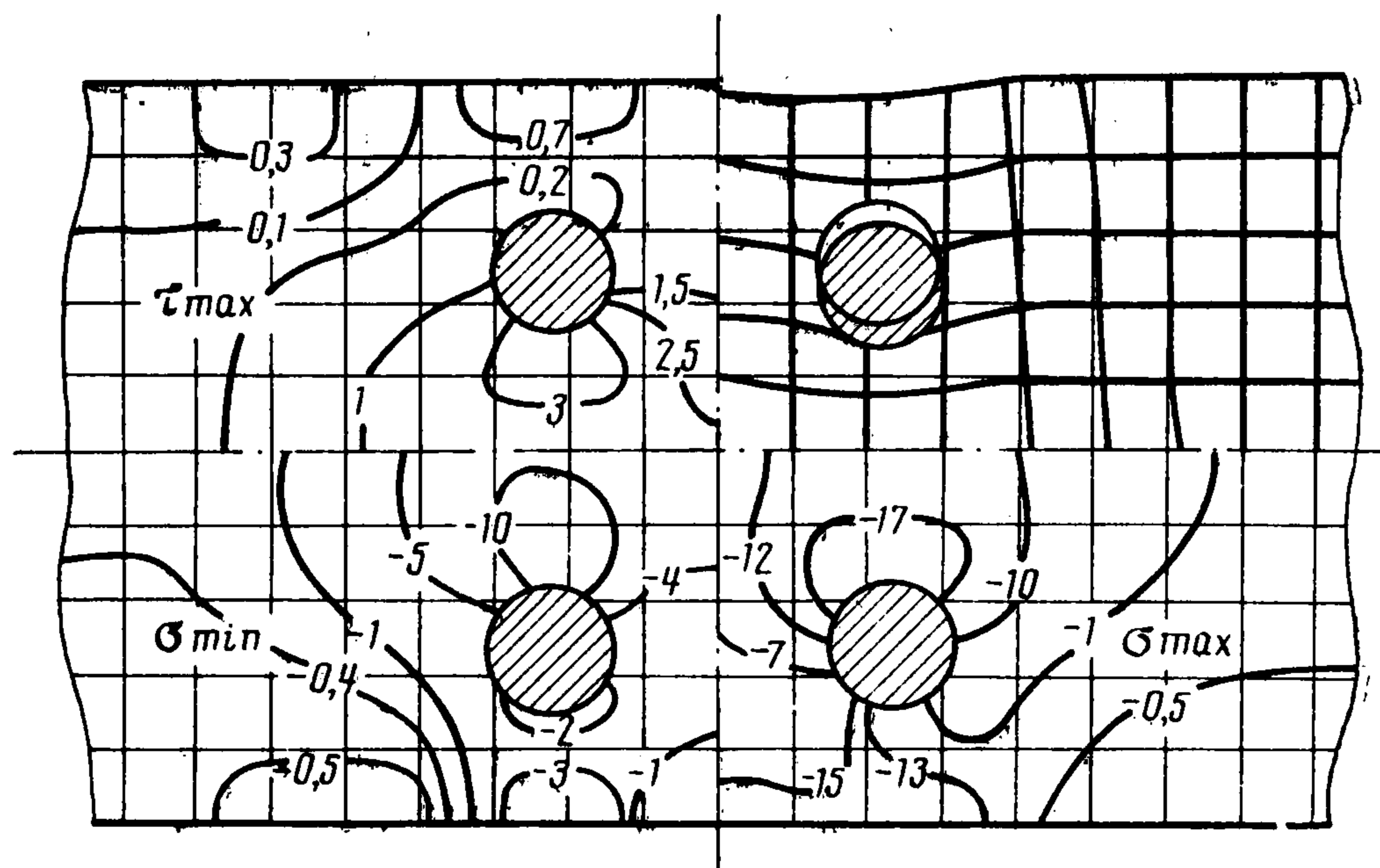
Рассчитав при помощи приближенного решения системы уравнений (1.12) характеристики напряженно-деформированного состояния полуполосы  $\Omega$  и определив при помощи соотношения (1.3) координату  $x = a$  точки отставания полуполосы от основания, окончательно получаем картину напряженно-деформированного состояния исследуемой полуполосы.

2. Приведем некоторые результаты расчетов по описанной методике.

На фиг. 2 изображены перемещения верхней границы упругой полосы, нагруженной двумя симметрично приложенными сосредоточенными массовыми силами, нормальными к ее горизонтальным границам, при различных расположениях точек приложения последних. Интересно отметить, что при удалении этих точек друг от друга по горизонтали на расстояние, превышающее две ширины полосы, взаимное влияние обеих сил практически исчезает (напомним, что ось  $y$  при такой постановке задачи является линией симметрии исследуемого поля, а это значит, что рассматривается упругая полоса, на которую действуют две силы). Другими словами, точки отрыва верхней кромки полосы для одной силы удалены от координаты точки ее приложения на расстояние, приближенно равное ширине полосы.

На фиг. 3, а приведены эпюры компоненты  $\sigma_y$  тензора напряжений на нижней кромке полосы при различных значениях  $x_0$  координаты точки приложения силы (кривые 1—5 соответствуют  $x_0 = 0; 0,5; 1; 2; 3$ ). Обращает на себя внимание следующий факт. Если для случаев достаточного удаления сил от оси  $y$  (кривые 4, 5) максимум эпюр приходится на точку, находящуюся под точкой приложения силы, то при сближении сил этот максимум смещается на ось симметрии. Эпюры компоненты  $\sigma_y$  тензора напряжений, имеющие место на линии  $x = 0$  для тех же случаев приложения сил, показаны на фиг. 3, б. Практическое отсутствие напряжений при  $x_0 = 3$  (кривая 5) еще раз убеждает в том, что взаимное влияние сил сказывается в той или иной степени лишь при их удалении друг от друга на расстояние, меньшее удвоенной ширины полосы.

Поля перемещений и напряжений, возникающие в упругой полосе, находящейся в условиях, моделируемых задачами (1.2), изображены на фиг. 4. На правом верхнем фрагменте показана деформированная координатная сетка полосы. Левый верхний, левый нижний и правый нижний фрагменты содержат изображения полей напряжений  $\tau_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  соответственно. Анализ этих полей позволяет сделать, в частности, вывод о том, что наиболее напряженной здесь оказывается зона, лежащая непосред-



Фиг. 4

ственно под включением, где, очевидно, и следует ожидать в первую очередь в реальных условиях появления зон пластичности или трещинообразования. Высокий уровень сжимающих напряжений имеет место и в окрестности начала координат. Можно отметить также, что хотя уровень напряжений над включением значительно ниже обсуждавшегося (и это, очевидно, естественно), характер их распределения интересен тем, что здесь присутствуют как зона сжимающих, так и растягивающих напряжений.

Таким образом, аппарат матриц Грина оказывается эффективным средством решения задач отрыва упругих тел от жестких оснований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Melnikov Yu. A. Some Applications of the Green's Functions Method in Mechanics // *Int. J. Solids and Structures*. 1977. V. 13, No. 11. P. 1045—1058.
2. Воронич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. Долгова И. М., Мельников Ю. А. Построение функций и матриц Грина для уравнений и систем эллиптического типа // *ПММ*. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 695—700.
4. Кошнарева В. А., Мельников Ю. А. К вопросу о регуляризации интегральных уравнений первого рода с логарифмическими ядрами // *Методы решения нелинейных задач и обработки данных*. Днепропетровск: ДГУ, 1986. С. 55—60.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
25.IV.1990