

УДК 539.375

© 1991 г.

А. Б. Мовчан, С. А. Назаров

## ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ НЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ПРИ РОСТЕ ТРЕЩИНЫ

При помощи процедуры осреднения строятся два члена асимптотики напряженно-деформированного состояния плоского тела с быстро осциллирующей границей  $\Gamma_0(h)$ , имитирующей шероховатую поверхность. При исследовании пограничного слоя появляются новые краевые условия на предельном, гладком, контуре  $\Gamma_0 = \Gamma_0(0)$ . Предлагаются две постановки задачи, учитывающие вдали от  $\Gamma_0$  поправочный член асимптотики и дающие приближение, например, к потенциальной энергии деформации с повышенной точностью  $O(h^2)$ . Рассмотрена задача о деформации области с сильно извилистой трещиной (в предположении об отсутствии контакта ее берегов). Вблизи концов трещины возникает дополнительный угловой пограничный слой, который, в частности, приводит к необходимости задания в вершинах предельной трещины — математического разреза — продольных сжимающих сосредоточенных сил (погрешность в такой модели извивающейся трещины составляет всего  $O(h^2)$ ). Энергетический баланс (в рамках гипотезы Гриффитса) при развитии трещины доставляет критерий разрушения, в котором фигурирует величина нагружения (сжатия) вдоль трещины.

**1. Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи шероховатой поверхности.** Пусть  $\Omega$  — область на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с границей  $\partial\Omega$ , состоящей из контуров  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_J$ . Пусть еще  $\Gamma_0$  — простая замкнутая гладкая (класса  $C^\infty$ ) дуга длиной  $l_0$  и  $(n, s)$  — связанные с ней естественные локальные координаты. Обозначим через  $N$  большое натуральное число и положим  $\Gamma_0(h) = \{(n, s): s \in [0, l_0], n = h\gamma(s, h^{-1}s)\}$ , где  $h = l_0 N^{-1}$  — малый параметр,  $\gamma \in C^\infty([0, l_0] \times [0, 1])$  — периодическая по обоим переменным  $s$  и  $t = h^{-1}s$  функция с периодами  $l_0$  и  $1$  соответственно. Область  $\Omega(h)$ , ограниченная контурами  $\Gamma_0(h)$  и  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$ , имеет быстро осциллирующую, шероховатую, границу. Масштабированием характерный размер области  $\Omega$  сведем к единичному; при этом декартовы координаты  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , координаты  $(n, s)$  и величины  $l_0, h$  станут безразмерными.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости

$$\mathbf{L}(\nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \equiv \mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega(h) \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^h; \mathbf{x}) = -\mathbf{p}^i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, J \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(nh)}(\mathbf{u}^h; \mathbf{x}) = -\mathbf{p}^0(s, h^{-1}s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0(h) \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{u}^h$  — вектор смещений,  $\nabla_{\mathbf{x}} = \text{grad}$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)$  — тензор напряжений,  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внутренней (по отношению к  $\Omega$ ) нормали к  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$ ,  $\mathbf{n}_h$  — единичный вектор нормали к  $\Gamma_0(h)$ ,  $\mathbf{p}^0$  и  $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^J$  — внешние нагрузки (их общие главные вектор и момент равны нулю),  $\mathbf{p}^0 \in C^\infty([0, l_0] \times [0, 1])$  — периодическая функция.

Найдем асимптотику решения  $\mathbf{u}^h$  при  $h \rightarrow 0$  с помощью известного метода осреднения (см. [1–3] и др.). Вдали от контура  $\Gamma_0(h)$  решение представимо в виде ряда  $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) + h\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) + \dots$ . Вблизи  $\Gamma_0(h)$  возникает яв-

ление экспоненциального пограничного слоя, определяемого посредством решения задачи в области  $\Pi(s) = \{\eta \in \mathbb{R}^2: \eta_1 \in (0, 1), \eta_2 > \gamma(s, \eta_1)\}$ , параметрически зависящей от переменной  $s \in [0, l_0]$ . Погранслоем ищется в виде ряда  $hw^1(s, \eta) + h^2w^2(s, \eta) + \dots$ , где  $\eta_1 = h^{-1}s$ ,  $\eta_2 = h^{-1}n$ . Функции  $v^k$  подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} L(\nabla_x) v^{(k)}(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\ \sigma^{(n)}(v^{(k)}; x) &= -\delta_{k,0} p^i(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (1.4)$$

Краевые условия на  $\Gamma_0$  для  $v^k$  получаются при исследовании задачи о пограничном слое. Подставим сумму  $v^0 + hw^1$  в уравнения (1.1) и (1.3). Собирая множители при  $h^{-1}$  в (1.1) и при  $h^0$  в (1.3), получим следующие соотношения, которые дополним условиями периодичности  $w^1$  по переменной  $\eta_1 \in [0, 1]$ :

$$L(\nabla_\eta) w^1(s, \eta) = 0, \quad \eta \in \Pi(s) \quad (1.5)$$

$$\tau^{(v)}(w^1; s, \eta) = -p^0(s, \eta) - \sigma(v^0, s, 0) v(s, \eta), \quad \eta \in \pi(s) \quad (1.6)$$

$$(\partial^k w^1 / \partial \eta_1^k)(s, 0, \eta_2) = (\partial^k w^1 / \partial \eta_1^k)(s, 1, \eta_2), \quad \eta_2 \geq \gamma(s, 0), \quad k = 0, 1 \quad (1.7)$$

Здесь  $v$  — единичный вектор внутренней нормали к торцу  $\pi(s) = \{\eta: \eta_1 \in [0, 1], \eta_2 = \gamma(s, \eta_1)\}$  «полуполосы»  $\Pi(s)$ ,  $\tau(w^1)$  — тензор напряжений, вычисленный при рассмотрении координат  $\eta$  как декартовых,  $\sigma(v^0; s, 0)$  — значения напряжений  $\sigma(v^0; x)$  на контуре  $\Gamma_0$ . Условия существования экспоненциально исчезающего на бесконечности решения задачи (равенство нулю главного вектора нагрузок) имеют вид

$$\sigma^{(n)}(v^0; s) = -P^0(s), \quad x \in \Gamma_0 \quad (1.8)$$

Здесь  $P^0(s)$  — главный вектор  $p^0(s, \cdot)$  на дуге  $\pi(s)$ .

Второй член  $v^{(1)}$  внешнего разложения удовлетворяет соотношениям (1.4), а краевые условия на контуре  $\Gamma_0$  получаются при рассмотрении слагаемого  $w^2$  типа пограничного слоя. Предположим для упрощения формул, что контур  $\Gamma_0(h)$  свободен от напряжений (т. е.  $p^0 = 0$  в (1.3)). Тогда при учете однородных условий (1.3) находим, что соотношение (1.6) принимает вид  $\tau^{(v)}(w^1) = -\sigma_{ss}(v^0)(v_1, 0)$  на  $\pi(s)$ . Обозначим через  $W(s, \eta)$  решение системы (1.5), удовлетворяющее условиям (1.7) и равенству

$$\tau^{(v)}(W; s, \eta) = -(\mu v_1(s, \eta), 0), \quad \eta \in \pi(s) \quad (1.9)$$

Очевидно, что  $w^1 = \mu^{-1} W \sigma_{ss}(v^0)$ . Введем неотрицательную величину

$$\begin{aligned} E(W; \Pi(s)) &= - \int_{\pi(s)} \tau^{(v)}(W) \cdot W \, dl_\eta \equiv \mu^2 A^{-1} b(s) \\ b(s) &= \mu^{-2} (2\mu + \lambda)^{-1} \sum_{j, k=1}^2 \int_{\Pi(s)} \{2(\mu + \lambda) \tau_{jk}(W)^2 - \lambda \tau_{jj}(W) \tau_{kk}(W)\} \, d\eta \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$A = 4\mu(\mu + \lambda)(2\mu + \lambda)^{-1}$$

Введем также матричные дифференциальные операторы  $L^1$ ,  $T$  и  $B$  равенствами ( $k(s)$  — кривизна контура в точке  $s$ )

$$\begin{aligned} L^1 &= \begin{vmatrix} 2(\lambda + 2\mu) D\partial_1 - \mu k\partial_2 & (\lambda + \mu)(D\partial_2 - k\partial_1) \\ (\lambda + \mu)(D\partial_2 + k\partial_1) & 2\mu D\partial_1 - (\lambda + 2\mu)k\partial_2 \end{vmatrix} \\ B &= \begin{vmatrix} \mu\gamma\partial_n^2 - (2\mu + \lambda)\gamma_s\partial_s & \mu\gamma\partial_s\partial_n - \gamma_s(\lambda\partial_n - (2\mu + \lambda)k) \\ \lambda\gamma\partial_s\partial_n - \mu\gamma_s(\partial_n + k) & (2\mu + \lambda)\gamma\partial_n(\partial_n - k) - \lambda\gamma k\partial_n - \mu\gamma_s\partial_s \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mu k (1 - \gamma \partial_2) - (2\mu + \lambda) \gamma_1 k + \mu \partial_s - \lambda \gamma_1 \partial_2 & \\ - (2\mu + \lambda) (\gamma_1 D - \gamma_s \partial_1) & \\ \lambda \partial_s - \mu (\gamma_1 k + \gamma_s \partial_2) & - \lambda k - (2\mu + \lambda) k \gamma \partial_2 - \\ & - \mu (\gamma_1 D + \gamma_s \partial_s) \end{vmatrix}$$

$$\partial_n = \frac{\partial}{\partial n}, \quad \partial_s = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{D} = \partial_s + \eta_2 k \partial_1, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial \eta_j}, \quad \gamma_s = \partial_s \gamma, \quad \gamma_1 = \partial_1 \gamma$$

Подставим сумму  $v^0 + h(v^1 + w^1) + h^2 w^2$  в (1.1), (1.3) и соберем множители при степенях  $h^0, h^1$  соответственно. При учете (1.4)–(1.8) получаем, что вектор  $w^2$  следует подчинить соотношениям (1.7) и уравнениям

$$\mathbf{L}(\nabla_\eta) w^2(s, \eta) = -\mathbf{L}^1(\eta, s, \nabla_\eta, \partial_s) w^1(s, \eta), \quad \eta \in \Pi(s) \quad (1.11)$$

$$\tau^{(v)}(w^2; s, \eta) = -\mathbf{T}(\eta, s, \nabla_\eta, \partial_s) w^1(s, \eta) - \sigma(v^1; s, 0) v(s, \eta) + \\ + B(\eta, s, \partial_s, \partial_\eta) v^0(s, 0) \quad (1.12)$$

При помощи формулы Бетти устанавливается, что задача (1.11), (1.12), (1.7) разрешима в классе исчезающих на бесконечности функций в том случае, если поле  $v^{(1)}$  удовлетворяет таким краевым условиям:

$$\sigma^{(n)}(v^{(1)}; x) = \partial_s \{ (m(s) + b(s)) \sigma_{ss}(v^0; x) s \}, \quad x \in \Gamma_0 \quad (1.13)$$

$$m(s) = \int_0^1 \gamma(s, \eta_1) d\eta_1 \quad (1.14)$$

Здесь  $s$  — единичный вектор касательной, отвечающий положительному обходу контура  $\Gamma_0$ ,  $b$  — величина (1.10).

Для определения величины  $b(s)$  приходится решать задачу (1.5), (1.7), (1.9) о деформации области  $\Pi(s)$ . Если  $\gamma(s, \eta) = \delta \gamma_0(s, \eta)$ , где  $0 < \delta$  — малый параметр, и значит,  $\Pi(s)$  мало отличается от полуполосы, то можно вывести асимптотическую формулу

$$b(s) = \delta \lambda \sum_{j=1}^{\infty} [2\pi j (2\mu + \lambda)]^{-1} (c_{1j}^2 + c_{2j}^2) + O(\delta^2)$$

в которой  $c_{1j}$  и  $c_{2j}$  — коэффициенты ряда Фурье по  $\cos j\eta_1$  и  $\sin j\eta_1$  функции  $\eta_1 \mapsto (\partial \gamma_0 / \partial \eta_1)(s, \eta_1)$ .

**2. «Эквивалентная» задача в области с регулярно возмущенной границей.** Предположим, что функция  $\gamma$  не зависит от быстрой переменной  $h^{-1}s$ , т. е.  $\gamma(s, h^{-1}s) = \gamma_*(s)$  и рассмотрим область с регулярно (без осцилляции) возмущенной границей. Все вычисления предыдущего раздела остаются в силе, но упрощаются: отсутствуют слагаемые типа пограничного слоя. В частности, величины (1.10) и (1.14) равны 0 и  $\gamma_*(s)$  соответственно. Таким образом, в краевом условии (1.13) сумма  $m + b$  заменяется величиной  $\gamma_*$ . Как и в [4], этот факт позволяет найти асимптотически эквивалентную задаче (1.1)–(1.3) (с точностью  $O(h^2)$ ) задачу в области с регулярно возмущенной границей; иными словами, учесть шероховатость поверхности, построив в некотором смысле эквивалентную гладкую поверхность.

Обозначим через  $\Omega_*$  область, ограниченную контурами  $\Gamma_{0h} = \{x: s \in [0, l_0), n = h(m(s) + b(s))\}$  и  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$ , и рассмотрим задачу о деформации области  $\Omega_*$  под действием нагрузки  $p^0 = 0, p^1, \dots, p^J$  (контур  $\Gamma_0(h)$  и  $\Gamma_{0h}$  предполагаются свободными от напряжений). Согласно сказанному выше, решение  $u^*$  названной задачи вне окрестности контура  $\Gamma_0$  совпадает с решением  $u^h$  задачи (1.1)–(1.3) с точностью  $O(h^2)$ . Отсюда,

в частности, вытекает соотношение для энергии деформации:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{u}^h; \Omega(h)) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{u}^h; \Omega(h)) - \int_{\partial\Omega(h)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^h ds = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega(h)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^h ds = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_*} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* ds + O(h^2) = U(\mathbf{u}^*; \Omega_*) + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это соотношение в свою очередь означает, что частоты  $\omega_1(h) \leq \leq \omega_2(h) \leq \dots$  и  $\omega_1^* \leq \omega_2^* \leq \dots$  собственных колебаний тел  $\Omega(h)$  и  $\Omega_*$  удовлетворяют неравенствам  $|\omega_j(h) - \omega_j^*| \leq c_j h^2$ , где  $j = 1, 2, \dots$

Другой способ построения задачи, объединяющей два члена асимптотики, заключается в предписании поверхности  $\Gamma_0$  дополнительной энергии деформации. Покажем, как это делается. Поскольку  $\sigma^{(n)}(\mathbf{v}^0) = 0$  на  $\Gamma_0$ , то равенство (1.13) преобразуется в следующее:

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{v}^{(1)}; \mathbf{x}) = A \partial_s \{ (m(s) + b(s)) (\partial_s v_s^0(\mathbf{x}) - k(s) v_n^0(\mathbf{x})) \mathbf{s} \}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0.$$

Теперь поле  $\mathbf{v}^*$ , приближающее сумму  $\mathbf{v}^{(0)} + h\mathbf{v}^{(1)}$  с погрешностью  $O(h^2)$ , определяется как решение уравнений (1.4), где  $k = 0$ , подчиненное краевому условию

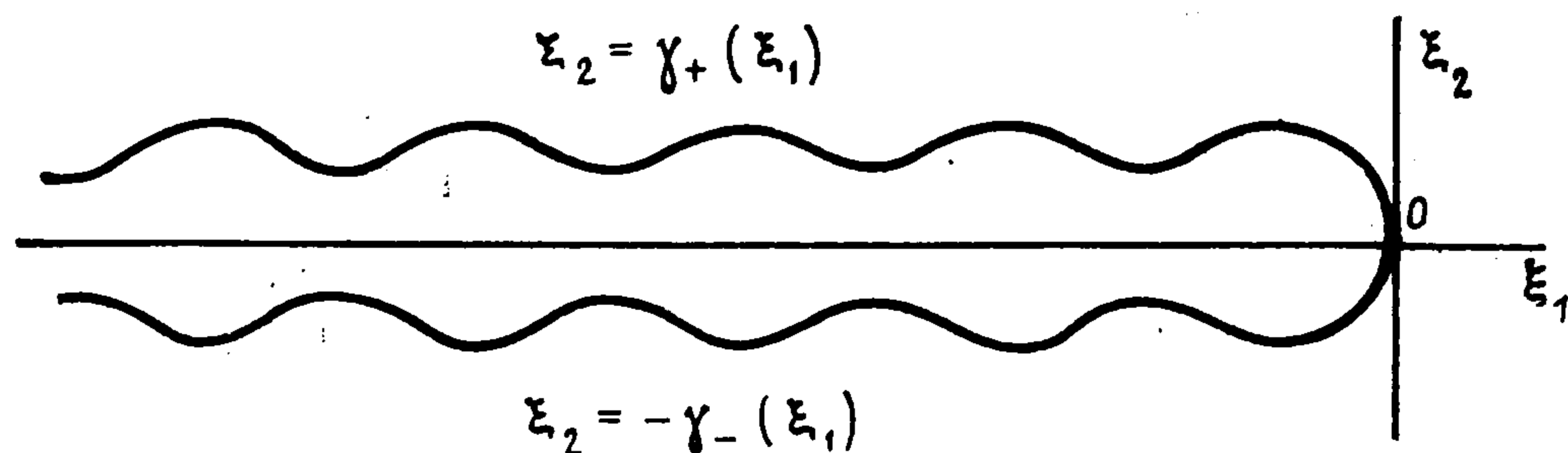
$$\begin{aligned} \sigma^{(n)}(\mathbf{v}^*; \mathbf{x}) - Ah \partial_s \{ (m(s) + b(s)) (\partial_s v_s^*(x) - k(s) v_n^*(x)) \mathbf{s} \} = \\ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Интегрируя по частям в  $\Omega_0$  и на  $\Gamma_0$ , выводим, что задача (1.4), (2.2) эквивалентна отысканию на подпространстве  $\{\mathbf{v}^* \in W_2^1(\Omega_0): \partial_s v_s^* - k v_n^* \in \in L_2(\Gamma_0)\}$  минимума функционала

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{v}^*; \Omega_0) + \frac{1}{2} Ah \int_{\Gamma_0} (m + b) |\partial_s v_s^* - k v_n^*|^2 ds - \int_{\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}^* ds \quad (2.3)$$

Для корректности задачи о минимуме функционала нужно потребовать неотрицательности второго слагаемого в (2.3) — так появляется ограничение  $m + b \geq 0$  на  $\Gamma_0$ , сужающее применение второй постановки объединенной задачи. Разумеется, возможна комбинация обоих приемов: регулярного возмущения границы и задания дополнительной энергии деформации, сосредоточенной на  $\Gamma_0$ .

**3. Область с трещиной, имеющей шероховатые (неконтактирующие) берега.** В предыдущем разделе считалось, что  $\Gamma_0$  — контур с гладкой границей. Теперь будем считать, что  $\Gamma_0$  — отрезок  $\{\mathbf{x}: x_2 = 0, |x_1| \leq \frac{1}{2} l_0\}$ ; берега отрезка обозначим  $\Gamma_0^\pm$ . Опишем контур  $\Gamma_0(h)$ . Вне окрестности вершин  $P^\pm$  отрезка  $\Gamma_0$  этот контур образован дугами  $\Gamma_0^\pm(h) = \{\mathbf{x}: x_2 =$



Фиг. 1

$= \pm h \gamma_\pm(h^{-1} x_1)\}$ , где  $\gamma_\pm \in C^\infty([0, 1])$  — 1 — периодические функции, причем  $0 \leq \gamma_0(t) \equiv \gamma_+(t) + \gamma_-(t)$  — ширина (начальное раскрытие) трещины. Вблизи точек  $P^\pm$  контур  $\Gamma_0(h)$  получается сжатием в  $h^{-1}$  раз границы области  $\Xi^\pm$  (увеличенная концевая зона, см. фиг. 1). Область  $\Xi^+$  получается удалением из плоскости  $\mathbf{R}^2$  некоторой области, совпадающей вне круга большого радиуса  $R_0$  с множеством  $\{\xi = h^{-1}(x_1 - \frac{1}{2} l_0, x_2): \xi_1 < 0, \xi_2 \in [-\gamma_-, \gamma_+]\}$ ; аналогично определяется  $\Xi^-$ . Если трещина

развивалась без выкрашивания материала, лишь извиваясь, то  $\Xi^\pm$  — плоскость с вырезанной полубесконечной периодической дугой.

Величины (1.14) и (1.10), отвечающие верхнему и нижнему берегам  $\Gamma_0^\pm(h)$  трещины, обозначим  $m_\pm$  и  $b_\pm$ . Равенства (1.13) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(v^{(1)}; x_1, \pm 0) &= (m_\pm + b_\pm) \sigma_{11}(\partial v^0/\partial x_1; x_1, \pm 0) \\ \sigma_{22}(v^{(1)}; x_1, \pm 0) &= 0, \quad x \in \Gamma_0\end{aligned}\quad (3.1)$$

Поскольку поле напряжений  $\sigma(v^0)$  имеет корневые особенности в точках  $P^\pm$ , правая часть (3.1), вообще говоря, растет как  $r_\pm^{-3/2}$  при  $r_\pm \rightarrow 0$ ; здесь  $(r_\pm, \varphi_\pm)$  — полярные координаты с центром  $P^\pm$ ,  $\varphi_\pm \in (-\pi, \pi)$ . Это обстоятельство вынуждает уточнить асимптотику решения  $u^h$  и построить дополнительный пограничный слой вблизи точек  $P^\pm$ :

$$z^{0\pm} + h^{1/2}z^{1\pm} + hz^{2\pm} + \dots \quad (3.2)$$

Ограничимся рассмотрением окрестности точки  $P^+$  и не будем указывать индексы  $\pm$ . Решение  $v^0$  допускает разложение

$$\begin{aligned}v^0(x) &= (c_1 - c_0x_1, c_2 + c_0x_2) + \sigma^0 A^{-1}(x_1, -\alpha x_2) + r^{1/2}(K_1 \Phi^1(\varphi) + \\ &+ K_2 \Phi^2(\varphi)) + O(r^{3/2}), \quad r \rightarrow 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь первое слагаемое — жесткое смещение,  $\sigma^0$  — некоторая постоянная,  $K_j$  — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН),

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda(2\mu + \lambda)^{-1}, \quad \kappa = (3\mu + \lambda)(\mu + \lambda)^{-1}, \\ (\Phi_r^1, \Phi_\varphi^1)(\varphi) &= (4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}((2\kappa - 1)\cos^{1/2}\varphi - \cos^{3/2}\varphi, \sin^{3/2}\varphi - (2\kappa + \\ &+ 1)\sin^{1/2}\varphi), \quad (\Phi_r^2, \Phi_\varphi^2)(\varphi) = (4\mu)^{-1}(2\pi)^{-1/2}(3\sin^{3/2}\varphi - \\ &- (2\kappa - 1)\sin^{1/2}\varphi, 3\cos^{3/2}\varphi - (2\kappa + 1)\cos^{1/2}\varphi)\end{aligned}$$

Пользуясь методом сращиваемых разложений (см., например, [5]) и сравнивая (3.2), (3.3), находим, что

$$\begin{aligned}z^0 &= (c_1, c_2), \quad z^1(\xi) = K_1 Z^1(\xi) + K_2 Z^2(\xi), \\ z^2(\xi) &= c_0(-\xi_2, \xi_1) + \sigma_0 Z^0(\xi)\end{aligned}\quad (3.4)$$

Вектор-функции  $Z^{(k)}(\xi)$  являются решениями задач

$$L(\nabla_\xi) Z^{(k)}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad \sigma^{(v)}(Z^{(k)}; \xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi \quad (3.5)$$

$$Z^{(q)}(\xi) = \rho^{1/2} \Phi^{(q)}(\varphi) + o(1), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad q = 1, 2 \quad (3.6)$$

$$Z^{(0)}(\xi) = A^{-1}(\xi_1, -\alpha\xi_2) + o(\rho^{1/2}), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Уточним асимптотические представления (3.6), (3.7). Сначала рассмотрим вектор-функцию  $Z^{(0)}$ . Модификация рассуждений из разд. 1 доставляет формулу

$$Z^{(0)}(\xi) = A^{-1}(\xi_1, -\alpha\xi_2) + B_0 T^{(1)}(\rho, \varphi) + \chi(\xi_1) \sum_{\pm} \mu^{-1} W^\pm(\xi) + o(1) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}T^{(1)}(\xi) &= (T_r^{(1)}, T_\varphi^{(1)}) = [8\pi\mu]^{-1}((\kappa + 1) \ln r (\cos \varphi, -\sin \varphi) + \\ &+ ((\kappa - 1) \varphi \sin \varphi, (\kappa - 1) \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi))\end{aligned}\quad (3.9)$$

Здесь  $B_0$  — постоянная,  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$  — срезка, равная 1 при  $\xi_1 < -2R_0$  и 0 при  $\xi_1 > -R_0$ ,  $W^\pm$  — решения задачи (1.5), (1.7), (1.9) в области  $\Pi^\pm = \{\xi : \xi_1 \in (0, 1), \pm \xi_2 > \gamma_\pm(\xi_1)\}$ .

Вычислим постоянную  $B_0$ . С этой целью подставим векторы  $Z^{(0)}$  и  $e^1$  в формулу Бетти для области  $Q_{q,t} \cap \Xi$ , где  $Q_{q,t}$  — квадрат  $\{\xi : |\xi_j| < q + t\}$ ,  $q$  — большое натуральное число. В результате, учитывая уравнения (3.5), получаем, что

$$\int_{\partial Q_{q,t} \cap \Xi} \sigma^{(n)}(Z^{(0)}; \xi) \cdot e^1 ds_\xi = 0 \quad (3.10)$$

Проинтегрируем равенство (3.10) дополнительно по  $t \in (0, 1)$ , перейдем к пределу при  $q \rightarrow +\infty$  и, пользуясь асимптотикой (3.8), отбросим бесконечно малые величины. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= - \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^1 dt \int_{\partial Q_{q,t} \cap \Xi} e^{\lambda \xi} \cdot \left\{ \sigma^{(n)}(\rho^{\lambda} \Phi^{(0)}; \xi) + B_0 \sigma^{(n)}(\mathbf{T}^{(1)}; \xi) + \chi \sum_{\pm} \sigma^{(n)}(\mathbf{W}^{\pm}; \xi) \right\} ds_{\xi} = \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ - \int_0^1 dt \int_{\partial Q_{q,t}} e^{\lambda \xi} \cdot \sigma^{(n)}(\rho^{\lambda} \Phi^{(0)} + B_0 \mathbf{T}^{(1)}) ds_{\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dt \int_{-\gamma_-( -q-t)}^{\gamma_+( -q-t)} \sigma_{11}(\rho^{\lambda} \Phi^{(0)}) d\xi_2 - \mu^{-1} \sum_{\pm} \int_0^1 dt \int_{\pm \gamma_{\pm}(-q-t)}^{\pm \infty} \sigma_{11}(\mathbf{W}^{\pm}) d\xi_2 \right\} \end{aligned}$$

Найдем каждый из интегралов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_{\pm}$  в последней формуле:

$$I_1 = \int_0^1 dt \int_{Q_{q,t}} L(\rho^{\lambda} \Phi^{(0)} + B_0 \mathbf{T}^{(1)}) \cdot e^{\lambda \xi} d\xi = -B_0 \int_0^1 dt \int_{Q_{q,t}} \delta(\xi) d\xi = -B_0$$

$$I_2 = \int_0^1 \{ \gamma_+(\xi_1) + \gamma_-(\xi_1) \} d\xi_1 = \int_0^1 \gamma_0(\xi_1) d\xi_1 \equiv m_0 = m_+ + m_-$$

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \pm I_{\pm} &= \sum_{\pm} \int_{\Pi_{\pm}} \sigma_{11}(\mathbf{W}^{\pm}) d\xi = -\mu^{-1} \sum_{\pm} \int_{\pi_{\pm}} \{ (2\mu + \lambda) W_1^{\pm} v_1^{\pm} + \\ &\quad + \lambda W_2^{\pm} v_2^{\pm} \} ds_{\xi} \equiv b_0 = b_+ + b_- \end{aligned}$$

В результате приходим к равенству  $B_0 = m_0 + b_0$ .

Уточненная асимптотика решений  $\mathbf{Z}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(k)}(\xi) &= \rho^{\lambda/2} \Phi^{(k)}(\varphi) + \rho^{-\lambda/2} (B_{k1} \Psi^{(1)}(\varphi) + B_{k2} \Psi^{(2)}(\varphi)) + \\ &\quad + \delta_{k,2} \left\{ \mu^{-1} \chi(\xi_1) \sum_{\pm} (m_{\pm} + b_{\pm}) W^{\pm}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sigma_{11}(\rho^{\lambda/2} \Phi^{(2)}(\varphi)) \Big|_{\varphi=\pm\pi} + \right. \\ &\quad \left. + 1/2 \rho^{-\lambda/2} [(b_0 + m_+ - m_-) \Upsilon^{(1)}(\ln \rho, \varphi) + (m_0 + b_+ - b_-) \Upsilon^{(2)}(\varphi)] \right\} + O(\rho^{-2}), \quad \rho \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $B_{kj}$  — некоторые зависящие от  $\Xi$  постоянные, образующие  $(2 \times 2)$  — матрицу  $B$

$$\begin{aligned} (\Psi_r^{(1)}, \Psi_{\varphi}^{(1)})(\varphi) &= (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} (3 \cos^{1/2} \varphi - (2\kappa + 1) \cos^{3/2} \varphi, (2\kappa - 1) \sin^{3/2} \varphi - \\ &\quad - 3 \sin^{1/2} \varphi); (\Psi_r^{(2)}, \Psi_{\varphi}^{(2)}) = (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} ((2\kappa + 1) \sin^{3/2} \varphi - \sin^{1/2} \varphi, \\ &\quad (2\kappa - 1) \cos^{3/2} \varphi - \cos^{1/2} \varphi); (\Upsilon_r^{(1)}, \Upsilon_{\varphi}^{(1)})(\ln r, \varphi) = [2(2\pi)^{3/2} \mu]^{-1} \{ -2 \ln r \times \\ &\quad \times (\sin^{1/2} \varphi - (2\kappa + 1) \sin^{3/2} \varphi, \cos^{1/2} \varphi - (2\kappa - 1) \cos^{3/2} \varphi) + (4(\kappa \sin^{3/2} \varphi - \sin^{1/2} \varphi) - \\ &\quad - \varphi (\cos^{1/2} \varphi + (2\kappa + 1) \cos^{3/2} \varphi), 4(\kappa \cos^{3/2} \varphi - \cos^{1/2} \varphi) + \varphi (\sin^{1/2} \varphi + (2\kappa - \\ &\quad - 1) \sin^{3/2} \varphi) \}; (\Upsilon_r^{(2)}, \Upsilon_{\varphi}^{(2)})(\varphi) = [4\mu(2\pi)^{1/2}]^{-1} (-\cos^{1/2} \varphi - \\ &\quad - (2\kappa + 1) \cos^{3/2} \varphi, \sin^{1/2} \varphi + (2\kappa - 1) \sin^{3/2} \varphi) \end{aligned}$$

При помощи формулы Бетти в области  $Q_{q,t} \cap \Xi$ , примененной к векторам  $\mathbf{Z}^{(k)}$  и  $\mathbf{Z}^{(j)}$ , устанавливается симметричность матрицы  $B$ .

Вернемся к рассмотрению поля  $v^{(1)}$ . Учитывая соотношения (3.4), (3.8), (3.11) и производя сращивание внутренних и внешних разложений, находим дополнительные условия, которым следует подчинить решения задачи (1.4), (3.1):

$$\begin{aligned} v^{(1)}(x) &= \sum_{j,k=1}^2 K_j^{\pm} B_{jk}^{\pm} r_{\pm}^{-\lambda/2} \Psi^{(k)}(\varphi_{\pm}) + \sigma_0^{\pm} (m_0 + b_0) \mathbf{T}^{(1)}(r_{\pm}, \varphi_{\pm}) + \\ &\quad + 1/2 K_2^{\pm} r_{\pm}^{-\lambda/2} [(b_0 + m_+ - m_-) \Upsilon^{(1)}(\ln r_{\pm}, \varphi_{\pm}) + \\ &\quad + (m_0 + b_+ - b_-) \Upsilon^{(2)}(\varphi_{\pm})] + O(1), \quad r_{\pm} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь и далее восстанавливаем индексы  $\pm$ , обозначающие вершины трещины  $\Gamma_0$ . Используя общие результаты [6, 7], можно проверить разрешимость задачи (1.4), (3.1), (3.12) (иными словами, нагрузка, в которую включены и сингулярные члены из правой части (3.12), является самоуравновешенной). Подчеркнем, что главный вектор гладкого нагружения (3.1) равен  $(b_0 + m_0)(\sigma_0^+ - \sigma_0^-)$  и компенсируется сосредоточенными силами, заданными согласно (3.12) в вершине трещины  $\Gamma_0$ .

Определим асимптотику потенциальной энергии деформации  $U(u^h; \Omega(h))$ . Аналогично разд. 2 находим, что

$$U(u^h; \Omega(h)) = U(v^0; \Omega) - \frac{1}{2}h \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}^1 ds_x + O(h^2)$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу Бетти в области  $\Omega$  с вырезанными кругами  $B_\delta^\pm$ , имеющими малые радиусы  $\delta$  и центры в точках  $P^\pm$ . Имеем

$$\int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} \sigma^{(n)}(v^0) \cdot v^1 ds_x = \sum_{\pm} \pm \int_{\delta^{-l_0/2}}^{-\delta+l_0/2} \sigma_{12}(v^1; x_1, \pm 0) v_1^0(x_1, \pm 0) dx_1 - \\ - \int_{\partial B_\delta^\pm} (\sigma^{(r)}(v^{(0)}; \mathbf{x}) \cdot v^{(1)} - \sigma^{(r)}(v^{(1)}; \mathbf{x}) \cdot v^{(0)}) ds_x$$

Используя соотношения (3.1), (3.3) и (3.13), окончательно получаем

$$U(u^h; \Omega(h)) = U(v^0; \Omega) - \frac{1}{2}h(m_0 + b_0) \left\{ \pi \sum_{\pm} \sigma_0^\pm c_1^\pm - \right. \\ \left. - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ A \int_{\delta^{-1/2}l_0}^{-\delta+1/2l_0} \left( \left| \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1}(x_1, +0) \right|^2 + \left| \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1}(x_1, -0) \right|^2 \right) dx_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 8\pi^{-1}A^{-1} \ln \delta \sum_{\pm} K_{2,\pm}^2 \right] \right\} + h \sum_{\pm} \sum_{p,q=1}^2 K_{p,\pm} K_{q,\pm} B_q$$

Здесь  $K_{p,\pm}$ ,  $\sigma_0^\pm$ ,  $c_1^\pm$  — величины из соотношения (3.3) для правого и левого концов трещины.

**4. Энергетический баланс при развитии трещины.** Рассмотрим упругую плоскость с извилистой трещиной  $\Gamma_0(h)$ , находящуюся в условиях двухосного нагружения на бесконечности, т. е. изучим задачу

$$\mathbf{L}(\nabla_x) \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0(h); \quad \sigma^{(n)}(\mathbf{u}^h; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0(h), \quad (4.1) \\ \sigma_{jj}(\mathbf{u}^h; \mathbf{x}) = p_j + o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad j = 1, 2, \quad \sigma_{12}(\mathbf{u}^h; \mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

Предположим, что верны неравенства  $p_2 > 0$  и  $p_1 < 0$ , и значит, реализуется растяжение поперек трещины и сжатие вдоль. При таком нагружении естественно считать, что берега трещины не контактируют.

Решение  $v^{(0)}$  предельной задачи известно (см. [8]); упомянем лишь, что

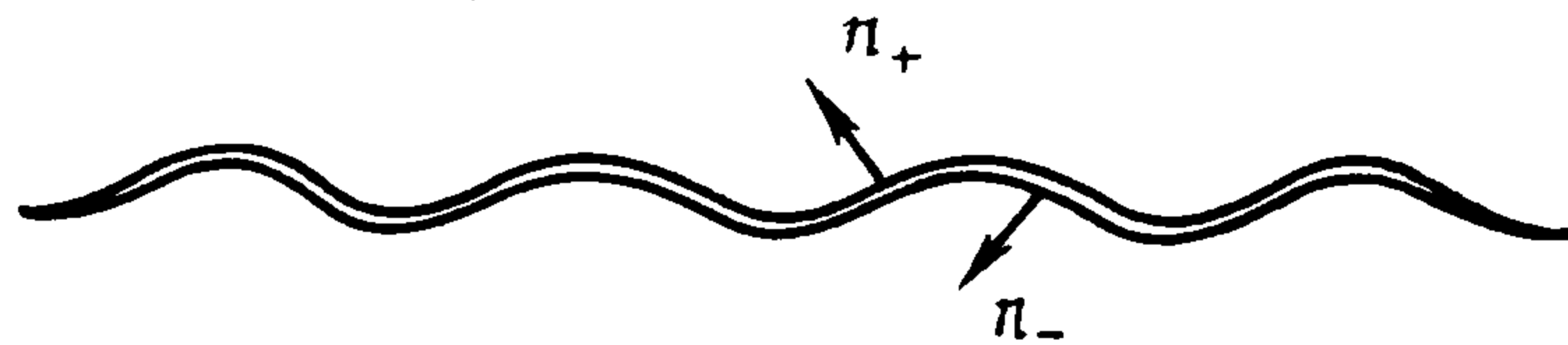
$$\sigma_{11}(v^{(0)}; x_1, \pm 0) = p_1 - p_2, \quad K_{1,\pm} = (\pi l_0)^{1/2} p_2, \quad K_{2,\pm} = 0, \quad \sigma_0^\pm = \\ = p_1 - p_2 \quad (4.3)$$

Обратимся ко второму члену  $v^{(1)}$  внешнего разложения. В силу (3.1), (4.3) вектор  $v^{(1)}$  удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{L}(\nabla_x) v^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0, \quad \sigma_{12}(v^{(1)}; \mathbf{x}) = \sigma_{22}(v^{(1)}; \mathbf{x}) = 0, \\ \mathbf{x} \in \Gamma_0; \quad \sigma_{jk}(v^{(1)}; \mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad j, k = 1, 2 \quad (4.4)$$

Таким образом, слагаемое  $v^{(1)}$  отлично от нуля лишь вследствие асимптотических условий (3.12). Рассмотрим более подробно задачи (3.5) — (3.7)

о пограничном слое, зводя упрощающие предположения. Будем, во-первых, считать, что начальное раскрытие трещины нулевое, т. е.  $\gamma(t) \equiv \gamma_+(t) = -\gamma_-(t)$ . Пусть далее  $\gamma(t) = -\gamma(t + 1/2)$  — трещина изгибается симметрично относительно оси  $Ox_1$ . Введем зависящую от параметра  $t$  область  $\Xi(t) = \mathbb{R}^2 \setminus \{x: x_1 \leq t, x_2 = \gamma(x_1)\}$  (фиг. 2); соответствующий коэффициент  $B_{21}(t)$  в разложении (3.11) ввиду симметрии области



Фиг. 2

подчинен формуле  $B_{21}(t) = -B_{21}(t + 1/2)$ . Поэтому найдется число  $t_0 \in [0, 1)$ , для которого  $B_{21}(t_0) = 0$ ; фиксируем именно такое положение конца трещины. Теперь, вспоминая равенства  $m_+ = -m_-$  и  $b_+ = b_- = 1/2v_0$  заключаем согласно (4.3), (3.12), что формулы (4.4) следует дополнить условием

$$v^{(1)}(x) = B_{11}(\pi l_0)^{1/2} p_2 (2r_{\pm})^{-1/2} \Psi(\varphi_{\pm}) + b_0(p_1 - p_2) T^{(1)}(r_{\pm}, \varphi_{\pm}) + O(1), \quad r_{\pm} \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

Таким образом,  $v^{(1)} = (1/2\pi l_0)^{1/2} p_2 (\zeta^+ + \zeta^-) + (p_1 - p_2) \zeta_0$ , где  $\zeta^{\pm}$  — ограниченное вне любой окрестности точки  $(\pm 1/2 l_0, 0)$  решение однородной задачи (4.4), подчиненное требованию  $\zeta^{\pm}(x) = r_{\pm}^{-1/2} \Psi(\varphi_{\pm}) + o(1)$ ,  $r_{\pm} \rightarrow 0$  (иными словами,  $\zeta^{\pm}$  — весовые функции; см. [9, 7]),  $\zeta^0$  — решение той же задачи, подчиненное требованию  $\zeta^0(x) = T^{(1)}(r_{\pm}, \varphi_{\pm}) + O(1)$  в обеих вершинах трещины  $\Gamma_0$ . Вектор-функции  $\zeta^{\pm}, \zeta^0$  определяются [8] соотношениями вида

$$\zeta^{\alpha}(x) = \delta_{0,\alpha} [T^{(1)}(x_1 + 1/2 l_0, x_2) - T^{(1)}(x_1 - 1/2 l_0, x_2)] + 1/4 \mu^{-1} (\kappa - 1) \operatorname{Re} Z_I^{0,\alpha}(x) - 2x_2 \operatorname{Im} Z_I^{\alpha}(x), \quad (\kappa + 1) \operatorname{Im} Z_I^{0,\alpha}(x) - 2x_2 \operatorname{Re} Z_I^{\alpha}(x) \quad (4.6)$$

$$\alpha = 0, \pm; \quad z = x_1 + ix_2$$

$$Z_I^{0,\pm}(x) = \pm [(z \pm 1/2 l_0)^{1/2} - (z \mp 1/2 l_0)^{1/2}] (z \mp 1/2 l_0)^{-1/2}$$

$$Z_I^{\pm}(x) = \mp 1/2 l_0 (z \mp 1/2 l_0)^{-1} (z^2 - 1/4 l_0^2)^{-1/2}$$

$$Z_I^0 = \partial_z Z_I^{0,0}, \quad Z_I^0 = \frac{4}{\pi^2} \frac{\mu l_0}{\lambda + 2\mu} (4z^2 - l_0^2)^{-1/2} \int_{-1/2 l_0}^{1/2 l_0} (l_0^2 - 4\xi^2)^{-1/2} \frac{d\xi}{z - \xi}$$

Как и ранее в разд. 2, возможна постановка объединенной задачи, решение  $v^*$  которой вне окрестностей вершин трещины  $\Gamma_0$  отличается от суммы  $v^{(0)} + h v^{(1)}$  на величину  $O(h^2)$ . Эта постановка заключается в отыскании удовлетворяющего соотношениям (4.1), (4.2) в предельной области  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0$  поля смещений  $v^*$  из множества

$$D = \{v^*: v^* = v + h B_{11}(c_+ \zeta^+ + c_- \zeta^-) + h b_0 c_0 \zeta^0, \quad c_0, c_{\pm} \in \mathbb{R}\}$$

$$v_1(x) = v_1(x_1, -x_2), \quad v_2(x) = -v_2(x_1, -x_2), \quad c_0, c_{\pm} \in \mathbb{R}$$

$$v(x) = (a_1^{\pm}, \bullet) + c_{\pm} r_{\pm}^{1/2} \Phi(\varphi_{\pm}) + A^{-1} c_0(x_1, \alpha x_2) + O(r_{\pm}^{3/2}), \quad r_{\pm} \rightarrow 0$$

$$v(x) = (a_1^{\infty} x_1, a_2^{\infty} x_2) + o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty; \quad a_j^{\pm}, a_j^{\infty} \in \mathbb{R}$$

Подобную задачу можно рассматривать (см. [10, 11] и др.) как некоторое расширение в весовом классе оператора исходной задачи теории упругости для плоскости, ослабленной трещиной  $\Gamma_0$ . Это обстоятельство позволяет дать корректное определение функционала энергии для объединенной задачи (из-за особенностей решения обычное определение не годится), причем вершинам трещины предписывается дополнительный вклад в энергию. Однако здесь на излишне строгих определениях не останавливаем-

ся, так как используемые далее рассуждения интуитивно ясны и допускают очевидные механические интерпретации.

Рассмотрим задачу об удлинении трещины  $\Gamma_0(h)$  в обе стороны на величину  $h$  (период изгиба трещины). Структуру концевой зоны считаем неизменной. Увеличившуюся трещину обозначим через  $\Gamma_0'(h)$ , а решения соответствующих задач — через  $u^{h'}$ ,  $v'$  и т. д. Отношение  $|p_1 - p_2| / |p_2|$  считаем большим параметром, таким, чтобы влияния полей, растягивающего поперек и сжимающего вдоль, были одного порядка; иными словами,  $|p_1 - p_2| / |p_2| = O(h^{-1/2})$ . Примем гипотезу Гриффитса о балансе приращений поверхностной и потенциальной энергий. Поскольку функционалы  $U(u^h; \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0(h))$  и  $U(u^{h'}; \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0'(h))$  бесконечны, то, как и в задаче Гриффитса [12], рассмотрим круги  $D_R$  большого радиуса  $R$  и положим

$$\Delta U = \lim_{R \rightarrow \infty} \{U(u^h; D_R \setminus \Gamma_0'(h)) - U(u^h; D_R \setminus \Gamma_0(h))\}$$

В силу условий (4.2), формулы Бетти и сказанного ранее о приближении решения  $u^h$  задачи (4.1), (4.2) суммой  $v^{(0)} + hv^{(1)}$  (или решением  $v^*$  объединенной задачи) имеем

$$\begin{aligned} \Delta U &= -1/2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} (p_1 n_1, p_2 n_2) \cdot (u^h - u^{h'}) ds_x = \\ &= -1/2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} (p_1 n_1, p_2 n_2) \cdot (v^* - v^{*'}) ds_x + O(h^2) \end{aligned}$$

Подставляя сюда вычисленные ранее решения  $v^{(j)}$ ,  $v^{(j)'}$  (формулы (4.3), (4.6)), находим, что

$$\Delta U = - (8\mu)^{-1} h (1 + \kappa) (\pi l_0 p_2^2 + b_0 (p_1 - p_2)^2) + O(h^2)$$

По Гриффитсу, приращение  $\Delta\Pi$  поверхности энергии пропорционально величине  $h$  и равно  $4h\eta$ . Значит, энергетический критерий разрушения  $\Delta U + \Delta\Pi \leq 0$  (критерий начала роста трещины) эквивалентен неравенству

$$- (8\mu)^{-1} (1 + \kappa) (\pi l_0 p_2^2 + b_0 (p_1 - p_2)^2) + 4\eta \leq 0 \quad (4.7)$$

Обращаем внимание на присутствие в левой части (4.7) продольной составляющей внешней нагрузки. Если  $p_1 - p_2$  не велико и  $|p_1 - p_2| \ll \ll h^{-1/2} |p_2|$ , то названным слагаемым следует пренебречь; тогда формула (4.7) приобретает вид энергетического критерия Гриффитса. Тот же эффект — вхождение составляющей  $p_1 - p_2$  с малым множителем — присущ критерию В. В. Новожилова [13], заключающемуся в проверке неравенства

$$d^{-1} \max_{|\varphi| < \pi} \int_{\Gamma(d, \varphi)} \sigma_{\varphi\varphi} ds \leq \sigma_c \quad (4.8)$$

Здесь  $d$  — структурный параметр материала,  $\Gamma(d, \varphi_0)$  — отрезок  $\{x: r \in (0, d), \varphi = \varphi_0\}$ ,  $\sigma_c$  — теоретический предел прочности.

Известно, (см., например, [14]), что подстановка в (4.8) двух членов (порядков  $O(r^{-1/2})$  и  $O(1)$ ) асимптотики напряжений накладывает ограничение сверху на сумму  $p_2 + cd^{1/2} |p_1 - p_2|$ . Таким образом, соотношения (4.8) и (4.7) асимптотические эквивалентны, если  $d$  и  $h$  — величины одного порядка малости. Сказанное подтверждает устоявшееся мнение о том, что параметр  $d$  связан с размером  $\rho$  зерен материала: если трещина развивается, огибая эти зерна, то период  $h$  функции  $\gamma$  также пропорционален  $\rho$ .

При описании формы трещины считалось, что ее берега  $\Gamma_0^\pm(h)$  задаются уравнениями  $x_2 = \pm h\gamma_\pm(h^{-1}x_1)$  с гладкими функциями. Требование гладкости конечно же несущественно, а структура границы может быть более сложной. Например, все сказанное остается в силе для трещины, которая при развитии, ветвясь, периодически выпускает малые отростки.

Отметим, что постановка задачи об извивающейся трещине почерпнута авторами из доклада [15] на VI Всесоюзной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
2. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и  $G$  — сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. № 5. С. 65—133.
3. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642—650.
5. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Моск. матем. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. В. 76. S. 29—60.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
9. *Виескнер Н. Ф.* A novel principle for the computation of stress intensity factors // ZAMM. 1970. V. 50. N. 9. p. 529—546.
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984. 283 с.
11. *Назаров С. А.* Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 2. С. 224—241.
12. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1921. V. A221. № 2. P. 163—198.
13. *Новожилов В. В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797—812.
14. *Мовчан А. Б., Морозов Н. Ф., Назаров С. А.* О разрушении вблизи пикообразных включений при посадке с натягом // Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988. С. 137—145.
15. *Лавров Н. А., Слепян Л. И.* К задаче о распространении трещины при сжатии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. 4-й Всесоюз. конф. Ч. 1. Одесса: Одесск. ун-т, 1989. С. 194.

Ленинград

Поступила в редакцию  
1.VIII.1990