

УДК 539.3 + 532.51

© 1991 г.

Н. А. Остапенко

**ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ЦИКЛИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

Излагается метод отыскания оригинала решения задачи проникания тонкого тела со звездообразным поперечным сечением, полученного [1] в рамках линейной динамической теории упругости. Обсуждаются основные особенности решения. Приводятся примеры расчета проникания в сжимаемую жидкость.

1. Нахождение оригинала решения. С использованием принципа угловой суперпозиции решений более простых линейных задач было построено [1] решение задачи проникания тонкого тела, состоящего из n симметричных циклов, в упругое полупространство. В случае проникания конического звездообразного тела с плоскими гранями и четным числом циклов n решение конструируется при помощи решения задачи проникания с постоянной скоростью v_0 тонкого крыла с ромбовидным профилем (фиг. 1). Точное решение указанной задачи было построено [1] в изображениях искомых функций. В частности, изображение по Лапласу компоненты σ_{yy} тензора напряжений может быть записано в виде

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho a^2} = -\frac{k}{p\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{i\infty} \Phi(r, \varphi) [\operatorname{ch}(\psi_1) + \operatorname{ch}(\psi_2)] r dr \right\} d\varphi \quad (1.1)$$

$$\psi_{1,2} = prR_1 \sin(\varphi \pm \theta), \quad R_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y/z$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & cB_1(r) \Delta_3^{-1} \Delta_4^{-1} - d[(s^2 - m) f(M^{-1}) + \\ & + q^2 f_1 R^{-1} f(\Delta_1)] \Delta_3^{-1} \Delta_4^{-1} - e[(s^2 - m_1) f(M^{-1}) + \\ & + q^2 M^{-1} \Delta_2^{-1} f(\Delta_2)] \Delta_4^{-1} \Delta_5^{-1} + 2[1 - 2\gamma^2(1 - q^2)] f_2 R^{-1} f(\Delta_1) - \\ & - 2\gamma^2 q^2 f_3 R^{-1} f(\Delta_2), \quad s = r \sin \varphi, \quad q = r \cos \varphi \end{aligned}$$

$$B_1(r) = f(M^{-1}) - f(\Delta_1) f_1 R^{-1}, \quad f(w) = \exp(-pxw), \quad \Delta_1 = \sqrt{1 - r^2}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{\gamma^{-2} - r^2}, \quad \Delta_3 = r^2 - m, \quad \Delta_4 = 1 - M_t^2 s^2, \quad \Delta_5 = r^2 - m_1$$

$$f_1 = q_1 q_2 + 4M^{-1} r^2 \Delta_2, \quad q_1 = \gamma^{-2} - 2r^2, \quad q_2 = \gamma^{-2} - 2m$$

$$f_i = f_{i1} + f_{i2} \Delta_4^{-1} \quad (i = 2, 3), \quad R = q_1^2 + 4r^2 \Delta_1 \Delta_2$$

$$\begin{aligned} f_{21} = & -2M_c^2 q_3 s_2^{-1}, \quad f_{22} = -2(M_s^2 q_3 + \gamma^2 q_1) s_2^{-1}, \quad f_{31} = 2M^{-1} M_c^2 (q_1 \Delta_2^{-1} - \\ & - 4\Delta_1 \Delta_2^{-1}), \quad f_{32} = 2M[\gamma^2 m_2 \Delta_2 (q_2 - 2s_1 M^{-2}) s_1^{-1} + \sin^2 \beta q_1 \Delta_2^{-1} - \\ & - 4M_1^{-2} \Delta_1 (M_{1s}^2 + s_2 - 1) s_2^{-1}] \end{aligned}$$

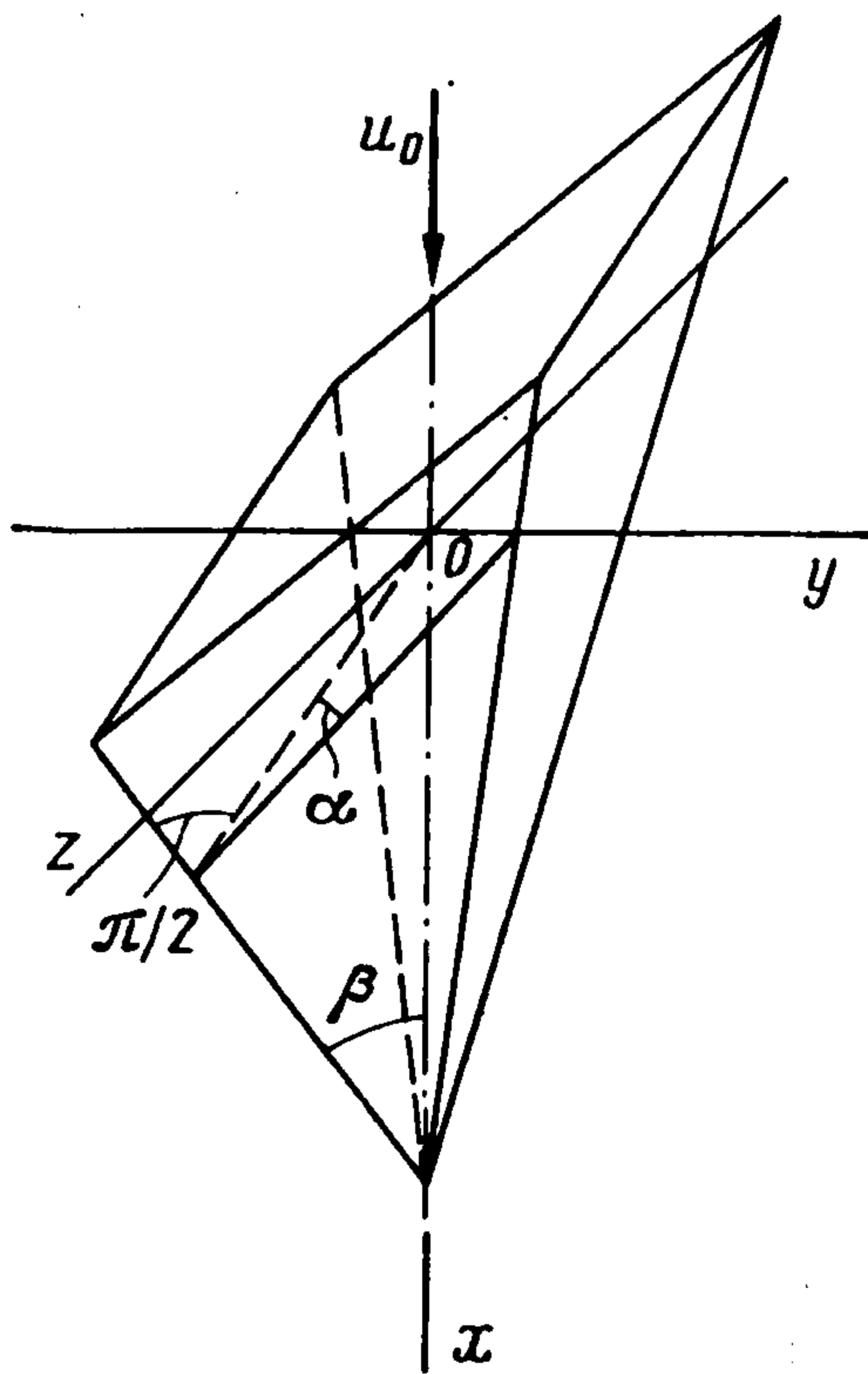
$$s_{1,2} = 1 + M\Delta_{1,2}, \quad q_3 = r^2 + M^{-1} \Delta_2, \quad M_c = M \cos \beta, \quad \gamma = ba^{-1}$$

$$m = \frac{M^2 - 1}{M^2}, \quad m_1 = \frac{M_1^2 - 1}{M^2}, \quad m_2 = M_{1s}^2 - 2, \quad M = \frac{v_0}{a}, \quad M_1 = \frac{v_0}{b}$$

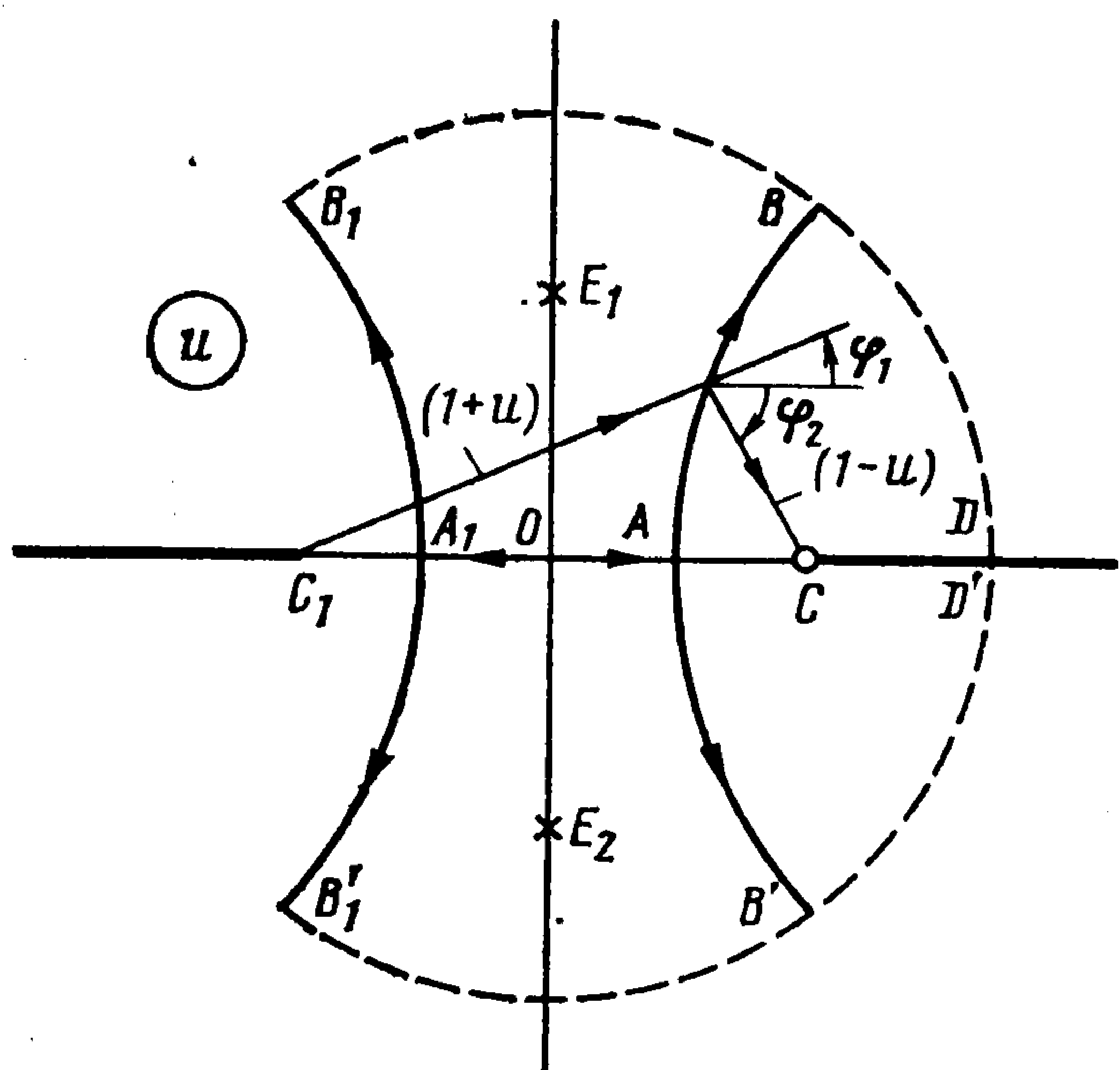
$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad k = \frac{2\alpha}{\cos \beta}, \quad M_t = M \operatorname{tg} \beta, \quad M_{1s} = \frac{M_s}{\gamma},$$

$$M_s = M \sin \beta$$

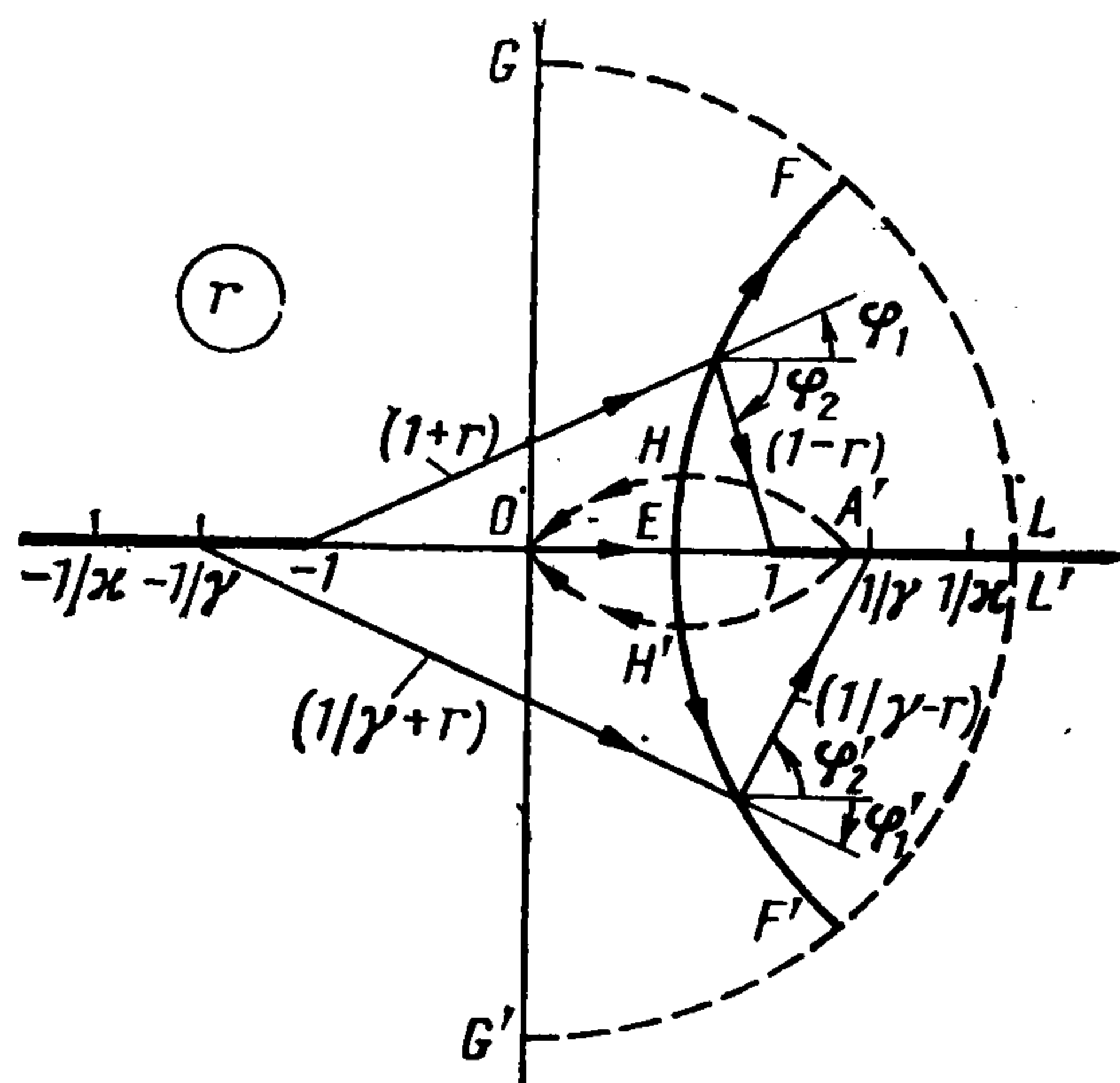
$$c = \gamma^2 (1 - 2\gamma^2) m_2, \quad d = 2\gamma^4 m_2, \quad e = 4\gamma^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь a и b — соответственно скорости продольных и поперечных волн, λ и μ — коэффициенты Ламе для изотропной среды. Члены в функции $\Phi(r, \varphi)$ сгруппированы таким образом, чтобы показать, что при $\Delta_3 = \Delta_5 = 0$ полюса у $\Phi(r, \varphi)$ отсутствуют в силу структуры функции B_1 и квадратных скобок. Первое слагаемое в $\Phi(r, \varphi)$ с обратным знаком при $\gamma = 0$ отвечает решению задачи проникания тела в сжимаемую жидкость, остальные слагаемые при этом равны нулю.

Найдем оригинал решения в первой четверти плоскости переменных y, z ($x > 0$), так как возмущенное движение среды имеет две плоскости симметрии $y = 0$ и $z = 0$ (фиг. 1). Возможны различные пути приведения правой части соотношения (1.1) к виду, совпадающему с прямым преобразованием Лапласа соответствующих функции [2], а именно

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho a^2} = \int_0^{\infty} (\dots) e^{-p\tau} d\tau \quad (1.2)$$

где $\tau = at$ (t — время) [1].

Здесь выбран подход, при котором волновые структуры, сопутствующие различным режимам проникания тела, выделяются в явном виде. В дальнейшем, без ограничения общности исследования [3], будем считать параметр преобразования Лапласа $p > 0$.

На примере первого слагаемого функции $\Phi(r, \varphi)$ рассмотрим методику сведения выражения (1.1) к виду (1.2), обозначив часть изображения σ_{yy} , доставляемую этим слагаемым через I . Введем новую переменную интегрирования

$$u = \sin \varphi, \Delta_4^{-1} d\varphi = A(r, u) du, A(r, u) = [\sqrt{1 - u^2} (1 - M_t^2 r^2 u^2)]^{-1} \quad (1.3)$$

Тогда

$$I = -\frac{kc}{p\pi^2} \int_0^{i\infty} \left\{ B(r) \int_0^1 A(r, u) [\operatorname{ch}(\psi_3) + \operatorname{ch}(\psi_4)] du \right\} dr \quad (4.4)$$

$$B(r) = B_1(r) C(r), C(r) = r\Delta_3^{-1}, \psi_{3,4} = pr(y\sqrt{1 - u^2} \pm zu)$$

Последовательно деформируя контуры интегрирования в плоскостях комплексных переменных u и r , приведем выражение (1.4) к виду (1.2). Найдем в плоскости переменной u контуры, вдоль которых в соответствии с выражениями для ψ_3 и ψ_4 (1.4) выполняется соотношение

$$y\sqrt{1 - u^2} \pm zu = w > 0 \quad (1.5)$$

Из (1.5) найдем

$$u = \pm (wz - y\sqrt{R_1^2 - w^2}) R_1^{-2}, y \leq w \leq R_1 \quad (1.6)$$

$$u = \pm (wz \pm iy\sqrt{w^2 - R_1^2}) R_1^{-2}, R_1 < w < +\infty \quad (1.7)$$

На фиг. 2 качественно изображены кривые, вдоль которых выполняется соотношение (1.5). Отрезки OA и OA_1 отвечают зависимости (1.6), кривые AB , AB' и A_1B_1 , A_1B_1' — зависимости (1.7), при этом $u_A = z/R_1 \leq 1$. Стрелками указано направление увеличения параметра w . Точки C и C_1 с координатами ± 1 соответствуют началам разрывов, направленных вдоль действительной оси и отвечающих радикалу $\sqrt{1 - u^2}$, аргумент которого вычисляется по формуле

$$\arg(\sqrt{1 - u^2}) = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 \quad (1.8)$$

Угловые коэффициенты асимптот гипербол $B'AB$ и $B_1'A_1B_1$, согласно (1.7), таковы:

$$k' = \pm y/z \quad (1.9)$$

Точки E_1 и E_2 (фиг. 2) с координатами $u_{1,2} = \mp(M_tr)^{-1}$ соответствуют полюсам функции $A(r, u)$ (1.3).

Внутренний интеграл в (1.4) берется по отрезку OC действительной полуоси плоскости комплексной переменной u . Разбивая его на четыре интеграла для каждой экспоненты, входящей в квадратные скобки подынтегрального выражения, аргументами $\mp\psi_3$ и $\mp\psi_4$ и, замыкая контуры интегрирования для каждого из них соответственно на $OCDBAO$, $OCD'B'AO$, $OCDBB_1A_1O$, $OCD'B'B_1'A_1O$ (фиг. 2), где CD и CD' — верхний и нижний берега разреза с началом в точке C , найдем, что сумма интегралов по отрезкам OA , OA_1 и CD , CD' при учете (1.8) равна нулю. Равны нулю и интегралы по дугам DB , DB_1 , $D'B'$, $D'B_1'$ окружности с радиусом, стремящимся к бесконечности, так как при любом $r \in (0, +i\infty)$ при учете (1.8), (1.9) на них выполняются соотношения

$$\operatorname{Re}(\pm\psi_3) > 0, |\psi_3| \rightarrow \infty; \operatorname{Re}(\pm\psi_4) > 0, |\psi_4| \rightarrow \infty$$

В результате указанных преобразований, меняя порядок интегрирования, найдем следующее выражение для I (1.4):

$$I = -\frac{kc}{2p\pi^2} \left\{ \int_{AB} [I_1(u) - I_2(u)] du + \int_{AB'} [I_2(u) - I_1(u)] du + I_3 \right\} \quad (1.10)$$

$$I_1(u) = \int_0^{i\infty} D(r, u) dr, I_2(u) = \int_0^{-i\infty} D(r, u) dr, I_3 = 2\pi i \int_0^{i\infty} B(r) [\operatorname{res} f(u_1) - \operatorname{res} f(u_2)] dr$$

$$\operatorname{res} f(u_{1,2}) = \mp i (1 - M_t^2 r^2)^{-1/2} \exp[-p(\pm iy\sqrt{1 - M_t^2 r^2} + z)/M_t]/2$$

$$D(r, u) = A(r, u) B(r) \exp(-prw)$$

В (1.10) w определяется по (1.5) со знаком плюс, $\operatorname{res} f(u_1)$ и $\operatorname{res} f(u_2)$ — вычеты подынтегральных функций в полюсах u_1 и u_2 (точки E_1 и E_2 на фиг. 2).

Найдем в плоскости комплексной переменной r контуры, вдоль которых выполняется соотношение

$$x\Delta_1 + rw = \tau > 0 \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует

$$r = (\tau w - x \sqrt{\tau_0^2 - \tau^2}) \tau_0^{-2}, \quad x \leq \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \sqrt{w^2 + x^2} \quad (1.12)$$

$$r = (\tau w \pm ix \sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}) \tau_0^{-2}, \quad \tau_0 < \tau < +\infty \quad (1.13)$$

На фиг. 3 качественно изображены кривые, вдоль которых выполняется соотношение (1.11). Отрезок OE отвечает зависимости (1.12), ветви гиперболы $F'EF$ — (1.13). Стрелками указано направление увеличения параметра τ . Точка E имеет координату

$$r_e = w\tau_0^{-1} \leq 1 \quad (1.14)$$

Там же показаны разрезы, направленные вдоль действительной оси, с началами в точках с координатами ± 1 и $\pm \gamma^{-1}$, отвечающие радикалам Δ_1 и Δ_2 , входящим в f_1 и R (1.1), и полюсы $\pm \kappa^{-1}$ подынтегральной функции $D(r, u)$, отвечающие нулю уравнения Релея $R = 0$. Согласно фиг. 3, аргументы радикалов Δ_1 и Δ_2 вычисляются по формулам

$$\arg \Delta_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \quad \arg \Delta_2 = (\varphi_1' + \varphi_2')/2 \quad (1.15)$$

Перейдем от интегрирования по мнимым полюсам OG (OG') во внутренних интегралах (1.10) к интегрированию по действительной полуоси OL (OL') с подынтегральными функциями, содержащими $\exp[-p(x/M + rw)]$, и по контурам OEF (OEF') — для подынтегральных функций, содержащих $\exp[-p(x\Delta_1 + rw)]$. Это можно сделать, так как в первом случае на дугах окружности GL ($G'L'$) $\operatorname{Re}(x/M + rw) > 0$, во втором — на дугах окружности GF ($G'F'$) $\operatorname{Re}(x\Delta_1 + rw) > 0$ и при стремлении радиуса последней к бесконечности интегралы по ним от соответствующих функций равны нулю. При указанной деформации контуров интегрирования следует учитывать существование в правой полуплоскости полюса функции $C(r)$ (на фиг. 3 не обозначен)

$$r_0 = \sqrt{m}, \quad M > 1 \quad (1.16)$$

и линий полюсов функции $A(r, u)$

$$r_{1,2} = (M_t u)^{-1} \quad (1.17)$$

Последние обозначены на фиг. 3 штриховыми линиями. Точка A' является образом точки A (фиг. 2) и имеет координату

$$r_a = (M_t \cos \theta)^{-1} \quad (1.18)$$

В (1.17) принято обозначение r_1 для кривой $A'HO$, являющейся образом кривой AB' (фиг. 2) и r_2 — для кривой $A'H'O$, являющейся образом кривой AB . Стрелками на $A'HO$ и $A'H'O$ указано направление увеличения параметра w .

Таким образом, при замене пути интегрирования OG (OG') на OL (OL'), если $u \in AB'$ (AB) (см. (1.10)), а также OG (OG') на OEF (OEF') следует учитывать вычеты соответствующих подынтегральных функций в полюсах (1.17), причем в первом случае для всех $w \in [R_1, +\infty)$, во втором — для $w \in [w_1, +\infty)$. Значения параметров $w = w_1$ и $\tau = \tau_1$ соответствуют точке H (H') пересечения кривых EF (EF') (1.13), $A'HO$ ($A'H'O$) (1.7), (1.17) и определяются выражениями

$$\begin{aligned} w_1^2 &= y^2 + R_1^2(z^2 - y^2 + \sqrt{R_1^4 + 4M_t^2 x^2 z^2})(y^2 + M_t^2 x^2)^{-1/2} \\ \tau_1 &= z(w_1^2 + x^2)(w_1^2 - y^2)^{-1}/M_t \end{aligned} \quad (1.19)$$

Точка H (H') будет существовать, если $r_e < r_a$, что согласно (1.7), (1.14) и (1.18) приводит к условию

$$\rho_2 \equiv \rho_1/z > M_t, \quad \rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.20)$$

Заметим, что интегралы вдоль OL (OL') и OE в соответствии с (1.10) и (1.15) берутся от действительных функций и имеют разные знаки. Поэтому они взаимно уничтожаются (см. (1.10)), за исключением первых, если полюс r_0 (1.16) располагается справа от точки E (фиг. 3), что отвечает согласно (1.14) и (1.16) неравенству

$$w < xm_3, \quad m_3 = \sqrt{M^2 - 1} \quad (1.21)$$

При выполнении неравенства (1.21) разность интегралов по OL и OL' будет давать вычет подынтегральной функции в полюсе r_0 (в этом случае в контуры OL и OL' следует

включить дуги полуокружностей с центром в точке r_0 и с радиусом, стремящимся к нулю).

После проведения перечисленных преобразований, учитывая условия (1.16), (1.20), (1.21), найдем следующее выражение для I (1.10):

$$I = -\frac{kc}{2p\pi^2} \left\{ \int_{AB} [I_4(w) - I_5(w)] dw + \int_{AB'} [I_5(w) - I_4(w)] dw + \right. \\ \left. + \pi i \left[\int_{AB'} [E_1(u) - E_2(u) + E_3(u)] du - \int_{AB} [E_1(u) - E_2(u) + E_3(u)] du \right] + I_3 \right\} \quad (1.22)$$

$$I_4(w) = \int_{EF'} E(w, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad I_5(w) = \int_{EF} E(w, \tau) e^{-p\tau} d\tau$$

$$E(w, \tau) = H(w - R_1) H(\tau - \tau_0) C(r) A(r, u) f_1 R^{-1} (du/dw) (dr/d\tau)$$

$$E_1(u) = H(M - 1) H(w - R_1) H(xm_3 - w) A(r_0, u) \exp[-p(x + wm_3)/M]$$

$$E_2(u) = H(w - R_1) A(r_0, u) \exp[-p(xM^{-1} + (y\sqrt{1 - u^2}/u + z) M_t^{-1})]$$

$$E_3(u) = [H(\rho_3) H(w - R_1) + H(-\rho_3) H(w - w_1)] A(r_0, u) f_1(r_1) \times \\ \times R^{-1}(r_1) \exp[-p(xM^{-1}\sqrt{1 - r_1^2} + (y\sqrt{1 - u^2}/u + z) M_t^{-1}), \rho_3 = M_t - \rho_2$$

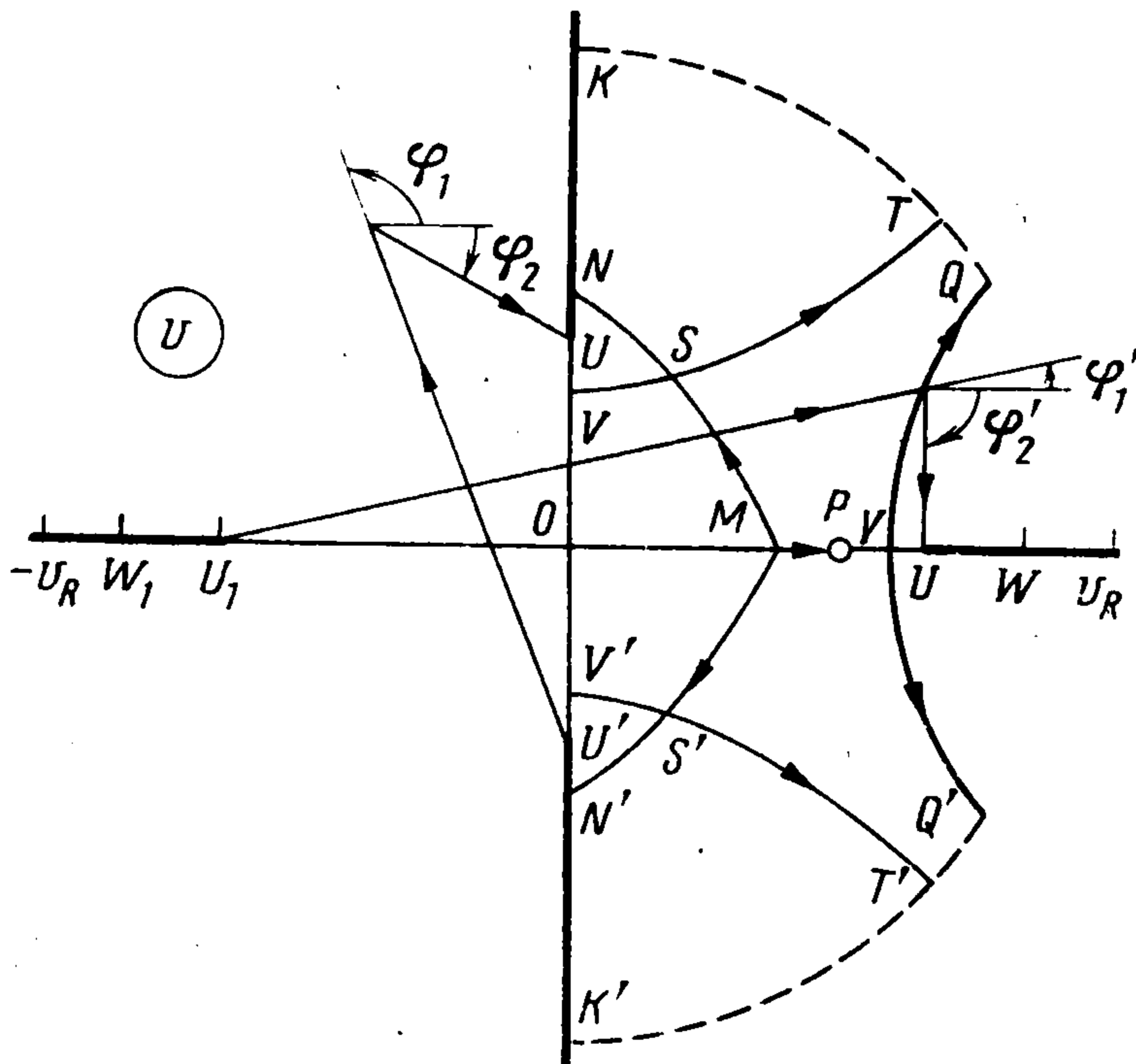
Не приводя выкладок, отметим, что однократные интегралы, содержащие функции $E_2(u)$, $E_3(u)$ и $B(r)$, после перехода к новой переменной интегрирования v согласно связям

$$\sqrt{1 - u^2}/u = v, \quad i\sqrt{1 - M_t^2 r^2} = v \quad (1.23)$$

могут быть сведены к разности двух пар интегралов от следующих двух функций:

$$E_4(v) = E_6(v) \exp[-p(xM^{-1} + (yv + z) M_t^{-1})], \quad E_6(v) = (1 - mM_t^2 + v^2)^{-1} \\ E_5(v) = E_6(v) f_1(v) R^{-1}(v) \exp[-p(x\sqrt{M_t^2 - 1 - v^2} + yv + z)/M_t] \quad (1.24)$$

Первая пара интегралов от функции $E_4(v)$ берется по контурам MNK и $MN'K'$ (фиг. 4), где кривая MN (MN') является, согласно (1.23), образом кривой



Фиг. 4

AB' (AB) в плоскости комплексной переменной v . При этом $v_N = i$ — координата точки N , а координата точки M и уравнения кривых MN и MN' определяются соотношениями

$$v_M = y/z, \quad v = a_1 \pm ib_1 \\ a_1 = yz/(w^2 - y^2), \quad b_1 = w\sqrt{w^2 - R_1^2}/(w^2 - y^2) \quad (1.25)$$

Стрелками на фиг. 4 указано направление увеличения параметра $w \in [R_1, +\infty)$. Разность этих интегралов дает вычет функции $E_4(v)$ в полюсе P функции $E_6(v)$ (1.24) при его расположении справа от точки M :

$$v_P > v_M, \quad v_P = m_s/\cos \beta, \quad m_s = \sqrt{M_s^2 - 1}, \quad M_s > 1 \quad (1.26)$$

Вторая пара интегралов от функции $E_5(v)$ (1.24) берется в соответствии с аргументами функций Хевисайда в $E_3(u)$ (1.22) либо по контурам SNK и $S'N'K'$ при $\rho_2 > M_t$, где точка S (S') является образом точки H (H') (фиг. 3), либо по контурам MNK и $MN'K'$ при $\rho_2 < M_t$.

Функция $E_5(v)$ содержит радикалы $r_3 \equiv \sqrt{M_t^2 - 1 - v^2}$ и $r_4 \equiv \sqrt{M_{1t}^2 - 1 - v^2}$ ($M_{1t} = \gamma^{-1}M_t$). Если, например, $M_t < 1$, то разрезы, соответствующие первому радикалу, располагаются на мнимой оси с началами в точках U и U' на отрезке NN' . Правило вычисления аргумента радикала вынесено в левую полуплоскость (фиг. 4): $\arg(r_3) = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Отсюда следует, что для согласования соотношений (1.15), (1.23) указанный радикал берется со знаком минус, если v принадлежит первой четверти. То же относится и к случаю $M_{1t} < 1$. При $M_t > 1$ разрезы, отвечающие обоим радикалам, располагаются на действительной оси с началами в точках U (U_1) и W (W_1) (фиг. 4 с координатами $\pm m_t$ и $\pm m_{1t}$ ($m_t = \sqrt{M_t^2 - 1}$, $m_{1t} = \sqrt{M_{1t}^2 - 1}$) соответственно. Согласно приведенному на фиг. 4 правилу вычисления аргумента $\arg(r_3) = (\varphi_1' + \varphi_2')/2$, что приводит к результату, согласующемуся с соотношениями (1.15), (1.23), и значит, при указанной условии оба радикала берутся со знаком плюс. На фиг. 4 нанесено также положение полюса v_R функции $F_5(v)$, соответствующего нулю уравнения Релея $R(v) = 0$,

$$v_R = \sqrt{M_R^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1}, \quad M_R = M/\kappa$$

Для приведения разности интегралов от функции $E_5(v)$ к виду (1.2) найдем в плоскости переменной v кривые, вдоль которых выполняется соотношение

$$xr_3 + yv + z = M_t \tau > 0 \quad (1.27)$$

Из (1.27) найдем

$$v = (ys_3 - x\sqrt{m_t^2 R_1^2 - s_3^2}) R_1^{-2}, \quad s_3 = M_t \tau - z$$

$$M_t > t, \quad (xm_t + z)/M_t \leq \tau \leq \tau_2, \quad \tau_2 = (z + m_t R_1)/M_t \quad (1.28)$$

$$v = (ys_3 \pm ix\sqrt{s_3^2 - (M_t^2 - 1) R_1^2}) R_1^{-2}$$

$$M_t > 1, \quad \tau_2 < \tau < +\infty; \quad M_t < 1, \quad z/M_t < \tau < +\infty \quad (1.29)$$

При $M_t < 1$ соотношению (1.29) отвечают ветви гиперболы VT и $V'T'$ (фиг. 4), проходящие, как показывает исследование, через точки S и S' , где параметры w и τ , согласно (1.25) и (1.29), принимают значения, совпадающие с (1.19). Это же имеет место и при $M_t > 1$, если точка Y ($\tau = \tau_2$) с координатой

$$v_Y = ym_t/R_1 \leq m_t \quad (1.30)$$

располагается слева от точки M , что, согласно (1.25), (1.30), отвечает условию (1.20). В этом случае от интегрирования функции $E_5(v)$ по контурам SNK и $S'N'K'$ можно перейти к интегрированию по контурам ST и $S'T'$ ($\tau_1 \leq \tau < +\infty$), так как интегралы по дугам KT , $K'T'$ окружности с радиусом, стремящимся к бесконечности, равны нулю.

При нарушении условия (1.20) точка Y располагается справа от точки M (фиг. 4). При этом от интегрирования по контурам MNK и $MN'K'$ можно перейти к интегрированию по контурам MYQ , MYQ' с обходом полюса P функции $E_6(v)$ (1.24), если выполняются условия (1.26):

$$v_P < v_Y \quad (1.31)$$

Следовательно, при выполнении неравенств (1.26), (1.31) разность интегралов от функции $E_5(v)$ по контурам MNK и $MN'K'$ равна сумме вычета функции $E_5(v)$ в полюсе P и разности интегралов по контурам YQ и YQ' (1.29).

Введением обозначения

$$(x + wm_3)/M = \tau, \quad \tau > (x + R_1 m_3)/M \equiv \tau_3 \quad (1.32)$$

в соответствии с видом аргумента экспоненты в функции $E_1(u)$ (1.22) оканчиваются необходимые преобразования (1.22), позволяющие непосредственно найти оригинал I . Остается отметить, что у всех пар интегралов подынтегральные функции принимают комплексно-сопряженные значения при равных величинах параметра интегрирования τ . Поэтому их разность будет равна удвоенной мнимой части одного из интегралов.

Преобразования остальных слагаемых функции $\Phi(r, \varphi)$ (1.1) не носят принципиальных отличий.

В итоге оригинал σ_{yy} имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{yy}}{\alpha \rho a^2} = & -H(M_{s1}) H(v_P - v_M) H(v_Y - v_P) H(\tau - \tau_4) \frac{\gamma^2 m_2^2}{M_{1s}^2 m_s} - \\
& -H(M'_{s1}) H(v_{P'} - v_M) H(v_{Y'} - v_{P'}) H(\tau - \tau_4') \frac{m_s'}{M_{1s}^2} - H(M - 1) H(\tau - \\
& - \tau_3) k_0 \int_{\tau_3}^{\tau} H(Mx - \tau') [cF_1(c_1) + dr_0^2 F_2(c_1)] \left(\frac{dw}{d\tau'}\right) d\tau' - H(M_1 - 1) \times \\
& \times H(\tau - \tau_3') k_1 \int_{\tau_3'}^{\tau} H(M_1 x - \tau') F_2(c_2) \left(\frac{dw'}{d\tau'}\right) d\tau' - \\
& - k_0 \operatorname{Im} [H(\rho_3) H(\tau - \tau_2) I_6(\tau_2) + H(-\rho_3) H(\tau - \tau_1) I_6(\tau_1)] - \\
& - k_2 \operatorname{Im} [H(\rho_3') H(\tau - \tau_2') I_7(\tau_2') + H(-\rho_3') H(\tau - \tau_1') I_7(\tau_1')] - \\
& - \frac{2k_0}{\pi} \operatorname{Im} \left[H(\tau - \rho_1) \int_{R_1}^{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \left[\int_{\tau_0}^{\tau} F_5(r, w) \left(\frac{dr}{d\tau'}\right) d\tau' \right] dw + \right. \\
& \left. + 2\gamma^2 H(\gamma\tau - \rho_1) \int_{R_1}^{\sqrt{\gamma^2 \tau^2 - x^2}} \left[\int_{\tau_0'}^{\tau} F_6(r', w) \left(\frac{dr'}{d\tau'}\right) d\tau' \right] dw \right] - \\
& - \frac{4\gamma^2 k_0}{\pi} \operatorname{Im} [H(R_1 - x_1) H(\tau - R_1 - x_3) I_8(R_1) + \\
& + H(x_1 - R_1) H(\tau - x_2) I_8(x_1)] - H(M_t - 1) H(\rho_3') H(M_t y - m_t x_1) \times \\
& \times \operatorname{Im} [H(m_t - v_M) H(\tau - \tau_5) I_9(\tau_5) + H(v_M - m_t) H(\tau - \tau_6) I_9(\tau_6)] \quad (1.33)
\end{aligned}$$

$$I_6(u) = \int_u^{\tau} F_3(v) \left(\frac{dv}{d\tau'}\right) d\tau', \quad I_7(u) = \int_u^{\tau} F_4(v') \left(\frac{dv'}{d\tau'}\right) d\tau'$$

$$I_8(u) = \int_u^{\tau - x_3} \left[\int_{u+x_3}^{\tau} H(\tau_0' - \tau') F_7(r', w) \left(\frac{dr'}{d\tau'}\right) d\tau' \right] dw,$$

$$I_9(u) = \int_u^{\tau} H(\tau_2' - \tau') F_8(v') \left(\frac{dv'}{d\tau'}\right) d\tau'$$

$$\tau_4 = xM^{-1} + (yv_P + z)M_t^{-1}, \quad M_{s1} = M_s - 1, \quad k_0 = \frac{k}{\pi\alpha},$$

$$k_1 = 4\gamma^4 k_0 m_1, \quad k_2 = 2\gamma^4 k_0 M_t^{-4}$$

$$\tau_5 = (ym_t + z)M_t^{-1} + x_3, \quad \tau_6 = (x\sqrt{M_{1t}^2 - R_1^2/z^2} + R_1^2/z)M_t^{-1}$$

$$F_1(u) = A_1(w) A_2(u) (ue_1 + e_2^2), \quad F_2(u) = A_1(w) A_2(u) [u(e_1 - 1) + e_2^2]$$

$$A_1(w) = -(da_1/dw) e_2^{-1}, \quad A_2(u) = (u^2 + e_2^2)^{-1}, \quad e_1 = 1 + a_1^2 - b_1^2, \\ e_2 = 2a_1 b_1$$

$$F_3(v) = \{(c + dv^2 M_t^{-2}) f_1(v) E_6(v) - 2[1 - 2\gamma^2(1 - v^2 M_t^{-2})] \times f_{22} \cdot \\ \cdot (v) M_t^{-2}\} R^{-1}(v)$$

$$F_4(v) = F_8(v) + 2\operatorname{tg} \beta M_{1t}^2 v^2 (1 - m_1 M_t^2 + v^2)^{-1} r_4^{-1}$$

$$F_5(r, w) = \{[cF_1(d_1) + dr^2 F_2(d_1)] C(r) f_1 - 2r[(1 - 2\gamma^2) F_1(d_1) + \\ + 2\gamma^2 r^2 F_2(d_1)] f_{22} + [(1 - 2\gamma^2) A_1(w) + 2\gamma^2 r^2 F_2(e_1)] f_{21}\} R^{-1},$$

$$F_6(r, w) = 2r^3 M_1^{-1} (r^2 - \gamma^2 m_1)^{-1} \Delta_1^{-1} F_2(d_2) + F_7(r, w)$$

$$F_7(r, w) = r^3 [f_{31}' F_2(e_1) + f_{32}' F_2(d_2)] \gamma^{-4} / R', \quad F_8(v) = v^2 \gamma^{-4} f_{32}'(v) / R'(v)$$

$$c_1 = e_1 - m M_t^2, \quad d_1 = e_1 - r^2 M_t^2, \quad x_1 = \gamma x / \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad x_2 = \gamma^{-2} x_1,$$

$$x_3 = x_2 (1 - \gamma^2)^{-1}$$

В (1.33) величины M_{s_1}' , ρ_3' , c_2 , d_2 имеют соответственно такие же выражения, как и M_{s_1} , ρ_3 , c_1 , d_1 , в которых M следует заменить на M_1 , а m_s' , v_n' , v_Y' , τ_1' , τ_2' , τ_3' , τ_4' , w' —, как и те же величины без штрихов, в которых указанная замена осуществляется под знаком радикала. Переменная r' определяется выражениями (1.12) для $\tau' \leq \tau_0' \equiv \gamma^{-1}\tau_0$ и (1.13) со знаком плюс для $\tau' > \tau_0'$, в которых τ следует заменить на $\gamma\tau'$, переменная v' — выражениями (1.28) для $\tau' \leq \tau_2'$ и (1.29) — со знаком плюс для $\tau' > \tau_1'$ и $\tau' > \tau_2'$, в которых следует в s_3 заменить τ на τ' и под знаком радикала M на M_1 . Функции f_{31}' , f_{32}' и R' аналогичны f_{31} , f_{32} и R , но их аргументом служит $\gamma^{-1}r$. В (1.33) r и v определяются выражениями (1.13). (1.29) со знаком плюс, а w в интеграле с множителем H ($M - 1$) — (1.32). Функции, входящие в (1.1) и записанные в (1.33) и выше от аргументов v либо v' , получены из исходных после замены (1.23) либо $v \sqrt{1 - M_{1t}^2 r^2} = v'$.

2. Анализ решения. Прежде всего заметим, что решение (1.33) зависит лишь от автомодельных переменных x/τ , y/τ , z/τ , что обусловлено конической формой проникающего тела.

Аргументы функций Хевисайда определяют условия (режимы движения) и области существования каждой части решения. Первая пара слагаемых отвечает сверхзвуковому характеру движения острых передних кромок тела соответственно по скорости продольных и поперечных волн и вносит постоянные составляющие в величину σ_{yy} .

Согласно выражениям для τ_4 и τ_4' (1.33), области определения этих составляющих ограничены плоскими волнами, присоединенными к передней кромке, а согласно аргументам других функций Хевисайда, — плоскостями, перпендикулярными указанным плоским фронтам и проходящими через оси x и z . Плоские волны касаются конических волн $\tau = \tau_3$, $\tau = \tau_2$ и $\tau = \tau_3'$, $\tau = \tau_2'$, определяющих совместно с другими аргументами функций Хевисайда области влияния членов, отвечающих сверхзвуковым режимам движения носика тела ($M > 1$, $M_1 > 1$) и его кромки по свободной поверхности ($M_t > 1$, $M_{1t} > 1$) как при сверхзвуковых, так и при дозвуковых передних кромках.

Слагаемые в (1.33), содержащие в аргументах функций Хевисайда τ_1 и τ_1' , можно отнести к влиянию движения передней кромки по свободной поверхности при дозвуковых скоростях ее перемещения по поверхности $x = 0$ и частично при сверхзвуковых, согласно аргументам сопутствующих функций Хевисайда.

Седьмое слагаемое в (1.33) описывает возмущенное движение внутри сферических фронтов продольных и поперечных волн. Остальные слагаемые определяют влияние поперечных волн, связанных с отражением продольных волн от свободной поверхности. Восьмое слагаемое обусловлено отражением сферической продольной волны от свободной поверхности. Границами его области существования будут коническая поперечная волна $\tau = R_1 + x_3$, касающаяся сферического фронта поперечной волны, и плоскость $\tau = x_2$, проходящая через указанную линию касания.

Последнее слагаемое в (1.33) имеет место лишь в случае $M_t > 1$ и обусловлено отражением конической продольной волны $\tau = \tau_2$, отвечающей этому режиму движения, от свободной поверхности. Границами области определения этой части решения будут плоская поперечная волна $\tau = \tau_5$, касающаяся конической поперечной волны $\tau = \tau_2'$, поверхность $\tau = \tau_6$, непрерывно продолжающая ее во внутреннюю область, и другие

поверхности, задаваемые аргументами сопутствующих функций Хевисайда.

Рассмотрим характерные свойства компоненты тензора напряжений σ_{yy} в возмущенной области. Согласно структуре подынтегральных функций третьего, четвертого, пятого и шестого слагаемых в (1.33), σ_{yy} имеет логарифмическую особенность на передней кромке тела. Сравнительно просто этот вывод можно получить при режиме движения $M > 1$, $M_1 > 1$, поскольку третье и четвертое слагаемые интегрируются. При других режимах движения нужно рассматривать асимптотики соответствующих интегралов. Во всех случаях имеет место следующее предельное соотношение в плоскости $y = 0$:

$$M\tau - x \rightarrow z \operatorname{ctg} \beta$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho a^2} = \lim_{g \rightarrow \infty} \left\{ - \frac{\alpha \gamma^4}{2\pi M_s^2 \sqrt{1 - M_s^2}} [m_2^2 - 4 \sqrt{1 - M_s^2} \sqrt{1 - M_{1s}^2}] \ln g \right\} \quad (2.1)$$

Выражение в квадратных скобках является левой частью уравнения Релея от аргумента M_s^{-1} . Если $M_s < \kappa$ (κ , как и выше, безразмерная скорость поверхностных волн), то это выражение отрицательно, а в случае $M_s > \kappa$ положительно. Следовательно, при скорости передних кромок, меньшей скорости волн Релея, нормальные напряжения на поверхности тела в окрестности кромок принимают большие положительные значения, значит контакт проникающего тела со средой в окрестности передних кромок будет нарушен, и впереди них будут распространяться трещины. При $M_s > \kappa$ в окрестности передних кромок будут иметь место большие отрицательные нормальные напряжения и контакт тела со средой не нарушается.

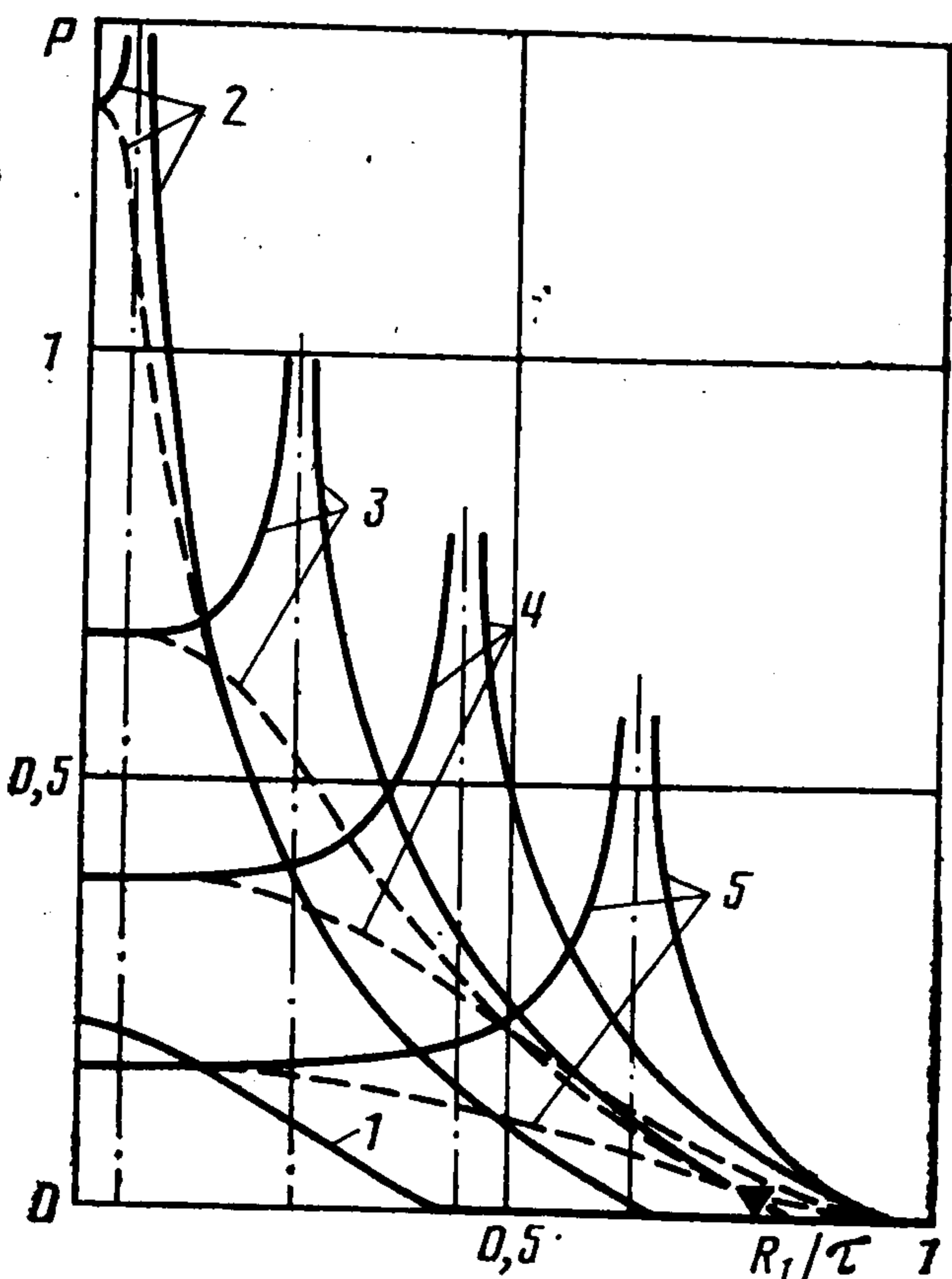
Решение (1.33), найденное для случая проникания тела (фиг. 1) в упругую среду, имеет еще одну логарифмическую особенность. При стремлении точки в возмущенной области к оси тела имеет место предельное соотношение

$$M\tau > x, \quad R_1 \rightarrow 0$$

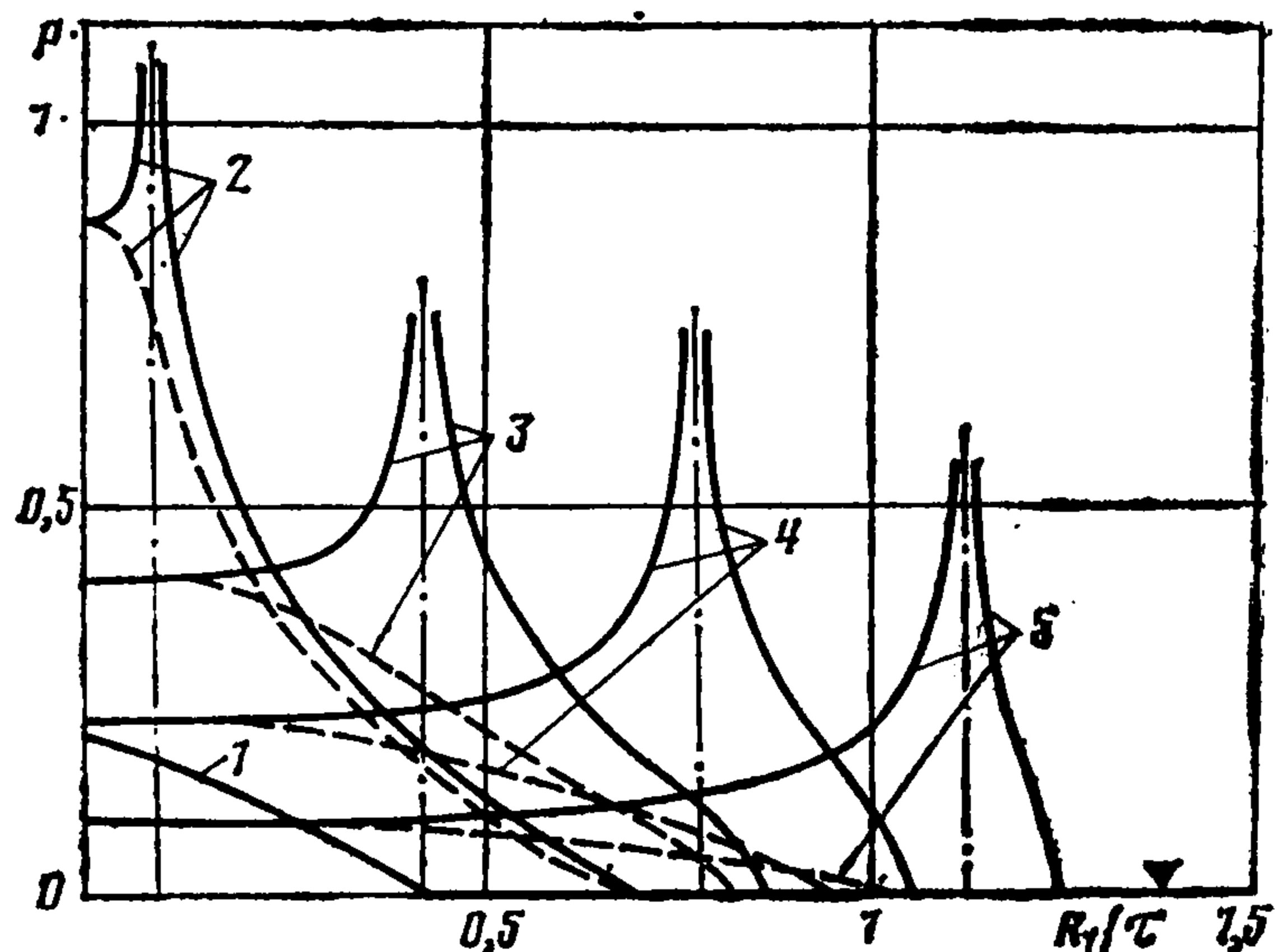
$$\sigma_{yy}/(\rho a^2) = \lim_{g \rightarrow \infty} \left\{ - (2\alpha \gamma^2 \cos \beta / \pi) \ln g \right\} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что в окрестности ребра проникающего тела ($z = 0$) возникают большие нормальные напряжения. Заметим, что к этому выводу можно прийти, непосредственно используя выражение (1.4), положив $y = z = 0$. Исследование компоненты тензора напряжений σ_{zz} показало, что при $R_1 \rightarrow 0$ $\sigma_{zz} \rightarrow -\infty$ по тому же закону, что и σ_{yy} (2.2). Существование такой особенности в решении обусловлено изломом упругого элемента среды на ребре тела в плоскости $z = 0$.

3. Проникание в жидкость. Решение для σ_{yy} (1.33) при $\mu = \gamma = 0$, взятое с обратным знаком, представляет собой возмущение давления в задаче проникания тела (фиг. 1) с постоянной скоростью в сжимаемую жидкость [3]. В этом случае однократные интегралы в (1.33), содержащие основные особенности решения, удается проинтегрировать. Опуская громоздкие выкладки, выпишем выражение для давления, отнесенного к безразмерной площади σ половины миделевого сечения S_M проникающего тела (сечения, совпадающего со свободной поверхностью жидкости $x = 0$): $\sigma = S_M(t)/(2v_0^2 t^2) = \alpha \operatorname{tg} \beta \sin \beta$, в автомодельных переменных $\bar{x} = x/\tau$,



Фиг. 5



Фиг. 6

$\bar{y} = y/\tau$, $\bar{z} = z/\tau$ (черта далее опущена)

$$\begin{aligned}
 P = & H(M_{s1}) H(v_P - v_M) H(v_Y - v_P) H(1 - \tau_4) \Pi + H(M - 1) \times \\
 & \times H(xm_3 - R_1) H(1 - \tau_3) \{H(-M_{s1}) \Pi_1 [H(M_x) \ln |\chi^+(1)/\chi^-(1)| + \\
 & + H(-M_x) \ln |\chi^+(Mx)/\chi^-(Mx)|] + H(M_{s1}) (\Pi/\pi) [H(M_x) \times \\
 & \times [f_4(p_{03}(1)) - f_4(p_{04}(1))] + H(-M_x) [f_4(p_{03}(Mx)) - f_4(p_{04}(Mx))]] + \\
 & + [H(\rho_3) H(1 - \tau_2) + H(-\rho_3) H(1 - \tau_1)] \times \\
 & \times \{H(-M_{s1}) \Pi_1 \ln |\chi_1^+(1)/\chi_1^-(1)| - H(M_{s1}) (\Pi/\pi) [f_4(p_{58}^{-1}(1)) + \\
 & + f_4(p_{59}^{-1}(1))]\} - H(-\rho_3) H(1 - \tau_1) \{H(-M_{s1}) \Pi_1 \ln |\chi_1^+(\tau_1)/\chi_1^-(\tau_1)| - \\
 & - H(M_{s1}) (\Pi/\pi) [f_4(p_{58}^{-1}(\tau_1)) + f_4(p_{59}^{-1}(\tau_1))]\} + \\
 & + H(1 - \rho_1) \frac{2k_0 \operatorname{ctg} \beta}{\pi \sin \beta} \operatorname{Im} \int_{R_1}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{\tau_0}^1 F_5(r, w) \left(\frac{dr}{d\tau'} \right) d\tau' \right] dw \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi = & M^2 v_p^{-1}, \quad \Pi_1 = M^2 / (2\pi \Pi_2), \quad \Pi_2 = \sqrt{1 - M_s^2} / \cos \beta \\
 \chi^\pm(\tau) = & [\chi_0(\tau) \pm \chi_1]^2 + \chi_2, \quad \chi_0(\tau) = [(M\tau - x)^2 - m_3^2 R_1^2]^{1/2} / (M\tau - x) \\
 \chi_1 = & \Pi_2 R_1^2 / (z^2 + y^2 \Pi_2^2), \quad \chi_2 = m_3^2 y^2 z^2 \operatorname{tg}^4 \beta / (z^2 + y^2 \Pi_2^2)^2 \\
 p_{ij}^k(\tau) = & \chi_i(\tau) \chi_j^k, \quad M_x = Mx - 1, \quad f_4(u) = \operatorname{arctg}(u) \\
 \chi_1^\pm(\tau) = & [\chi_5(\tau) \pm \chi_6]^2 + \chi_7, \quad \chi_{3,4} = (z \pm yv_P) / (y \mp zv_P), \quad \chi_6 = x\Pi_2 \\
 \chi_5(\tau) = & [s_3^2 + (1 - M_t^2) R_1^2]^{1/2}, \quad \chi_7 = y^2 \operatorname{tg}^2 \beta, \quad \chi_{8,9} = xv_P \mp y \operatorname{tg} \beta
 \end{aligned}$$

В (3.1) упрощения для $F_5(r, w)$ при $\gamma = 0$ опущены. При режиме движения $M_s > 1$, согласно выражениям χ_3 и χ_8 , возникает неопределенность при расчете давления в плоскостях $y - zv_P = 0$ и $xv_P - y \operatorname{tg} \beta = 0$. Соответствующие члены в (3.1) следует рассчитывать при стремлении точки поля с обеих сторон к указанным плоскостям. Такое рассмотрение совместно с первым слагаемым в (3.1) обеспечивает непрерывность P . Аналогичная ситуация имеет место и в (1.33) при $M_s > 1$ и $M_{1s} > 1$.

Отметим также, что при $\beta \rightarrow \pi/2$ решения (1.33), (3.1) переходят в решения, соответствующие прониканию клина в упругое полупространство и сжимаемую жидкость [4]. Решение (3.1) содержит в себе также и решение [5].

На фиг. 5, 6 представлены результаты расчета давления P при проникании в сжимаемую жидкость звездообразного тела с четырьмя симметричными циклами ($n = 4$) при $M = 0,8$; $\beta = \pi/4$ (фиг. 5) и $\beta = \pi/3$ (фиг. 6). Решение построено с использованием принципа суперпозиции [1] и (3.1) в качестве основного решения. Сплошные кривые отвечают распределению давления в плоскости $y = 0$, штриховые — $\theta = \pi/4$. Пары кривых 1—5 соответствуют сечениям $x = 0,9; 0,75; 0,55; 0,35; 0,15$. Вертикальными штрихпунктирными прямыми в тех же сечениях показано положение передней кромки, в окрестности которой давление имеет логарифмическую особенность. Темным треугольником отмечено положение передней кромки на свободной поверхности. В случае $\beta = \pi/3$ (фиг. 6) передняя кромка перемещается по свободной поверхности со сверхзвуковой скоростью ($M_t > 1$). Как видно, при этом режиме проникания имеет место наполненный профиль распределения давления непосредственно за фронтом волны в отличие от случая $\beta = \pi/4$ ($M_t < 1$) (фиг. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Остапенко Н. А. Проникание тонкого тела со звездообразным поперечным сечением в упругое полупространство // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 1. С. 62—66.
2. Cagniard L. Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques. Paris: Gauthier — Villars. 1939. 255 p.
3. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. Гонор А. Л. Движение тела с звездообразным поперечным сечением в сжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Проблемы современной механики. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 101—112.
5. Гонор А. Л., Поручиков В. Б. Проникание тел звездообразной формы в сжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 405—412.

Москва

Поступила в редакцию
6.IX.1990