

УДК 532.546 + 532.135

© 1991 г.

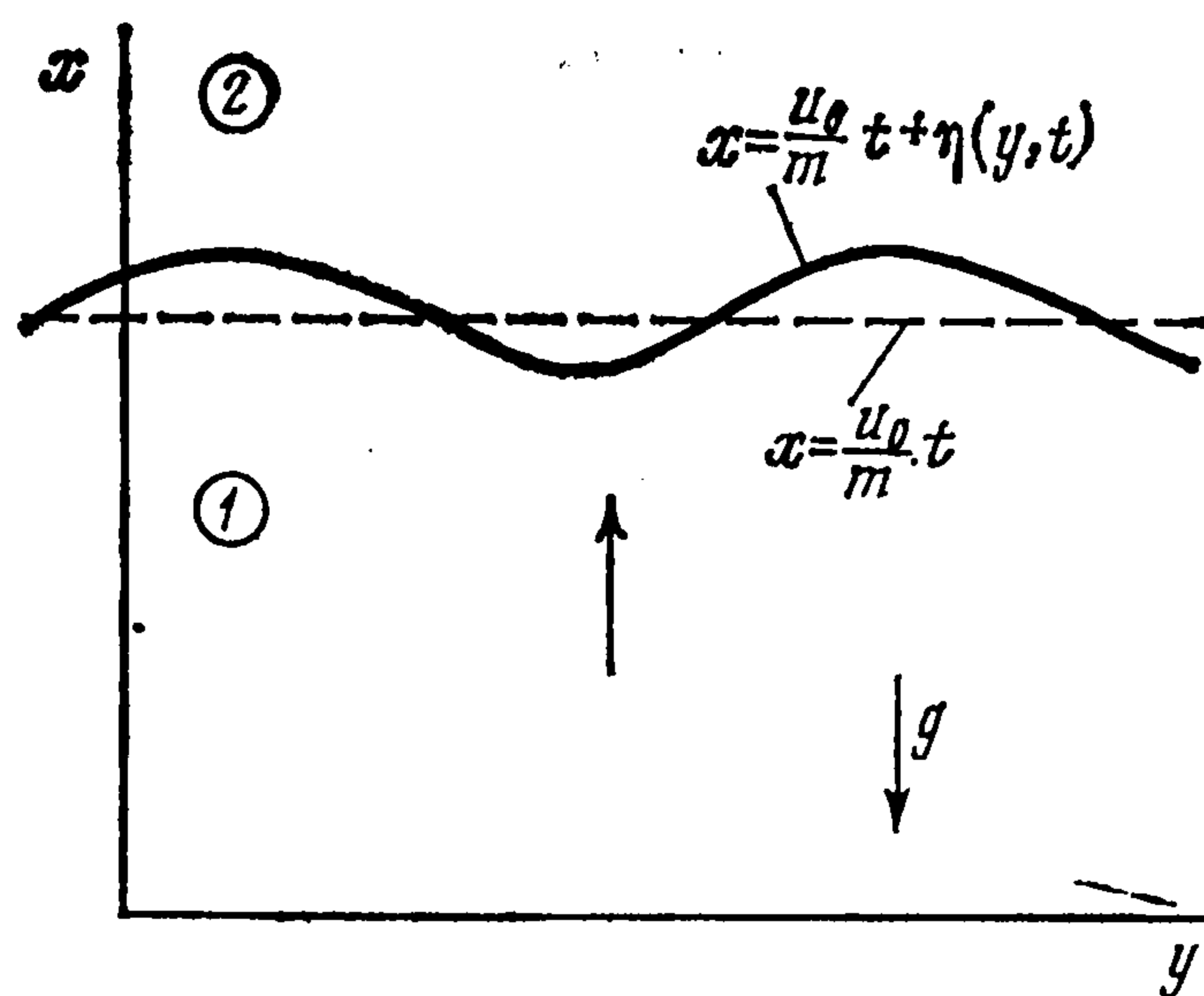
И. М. Аметов, И. Ш. Ахатов, В. А. Байков

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Исследуется устойчивость движения границы раздела вязкоупругих жидкостей в пористой среде, обусловленная неравновесностью фильтрационных потоков. Рассматриваются два этапа развития неустойчивости: первый — развитие малых возмущений на поверхности первоначально невозмущенного фронта вытеснения, второй — эволюция малых возмущений поверхности «языков» вытесняющей жидкости, прорвавшихся после развития неустойчивости на первом этапе. Проведенный теоретический анализ показывает, что использование вязкоупругих жидкостей для вытеснения нефти из пластов должно приводить к повышению устойчивости процесса вытеснения. В случае вязкоупругих жидкостей с релаксацией по градиенту давления устойчивость вытеснения обусловлена стабилизацией собственно границы раздела жидкостей, а с релаксацией по потоку достигается за счет неустойчивости прорвавшихся «языков» вытесняющей жидкости.

При вытеснении жидкости с повышенной вязкостью менее вязкой жидкостью или газом имеет место вязкостная неустойчивость фронта вытеснения в пористой среде. Изучению возникновения такой неустойчивости и развития образующихся при этом «языков» вытесняющей жидкости посвящено большое количество работ (см., например, обзоры [1, 2]). Экспериментальные исследования процесса вытеснения вязкоупругих жидкостей в пористой среде выявили ряд качественно новых особенностей [3, 4]. Одна из них — тенденция к повышению устойчивости фронта вытеснения даже при неблагоприятном соотношении подвижностей. Эксперименты в ячейке Хил-Шоу показали, что при одинаковых условиях замена вытесняющей вязкой жидкости на вязкоупругую может привести к стабилизации фронта вытеснения [3]. Показана [4] возможность снижения коэффициента нефтеотдачи с увеличением температуры, что объясняется ослаблением вязкоупругих свойств вытесняемой нефти.

1. Устойчивость фронта вытеснения. Рассматривается вертикальное движение с постоянной скоростью плоской границы раздела двух вязко-



Фиг. 1

упругих жидкостей с различными реологическими характеристиками (фиг. 1). Распределение скоростей фильтрации и давлений при этом имеет вид

$$u_{j0} = u_0, v_{j0} = 0, p_{j0} = p_0 - (K_j^{-1}u_0 + \rho_j g) (x - m^{-1}u_0 t)$$

$$K_j = k_j / \mu_j, j = 1, 2$$

где m — пористость; u_j, p_j, μ_j, k_j — скорость фильтрации, давление, вязкость, проницаемость j -й фазы; индекс $j = 1$ соответствует вытесняющей, а $j = 2$ — вытесняемой жидкостям.

Система линеаризованных уравнений двумерной фильтрации вязкоупругих жидкостей, описывающая эволюцию возмущений основного потока, включает уравнения неразрывности и уравнения фильтрации [5]

$$\frac{\partial u_j'}{\partial x} + \frac{\partial v_j'}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{R}_j u_j' = -K_j \mathbf{Q}_j \frac{\partial p_j'}{\partial x}, \quad \mathbf{R}_j v_j' = -K_j \mathbf{Q}_j \frac{\partial p_j'}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$u_j' = u_j - u_{j0}, \quad v_j' = v_j - v_{j0}, \quad p_j' = p_j - p_{j0}$$

$$\mathbf{R}_j = 1 + \tau_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_0}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \mathbf{Q}_j = 1 + \theta_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_0}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

(\mathbf{R}_j и \mathbf{Q}_j — дифференциальные операторы, записанные в линейном приближении, τ_j и θ_j — времена релаксации).

Уравнение границы раздела жидкостей $x - m^{-1}u_0 t = \eta(y, t)$ связано с полем скоростей кинематическими соотношениями

$$m \partial \eta / \partial t - u_j' = 0 \quad (1.2)$$

Динамическое условие равенства давлений на границе раздела дает

$$p_1' - p_2' = [(\rho_1 - \rho_2)g + (K_1^{-1} - K_2^{-1})u_0] \eta \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.1) следует, что возмущения давлений удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому решение задачи (1.1)–(1.3) удобно представить в виде

$$\eta = A \exp(\delta t + i\kappa y)$$

$$p_j' = B_j \exp \psi_j, \quad u_j' = C_j \exp \psi_j, \quad v_j' = D_j \exp \psi_j$$

$$\psi_j = \delta t + i\kappa y - (-1)^j \kappa (x - m^{-1}u_0 t)$$

где κ — волновое число, δ — инкремент нарастания возмущений. Подстановка этих выражений в (1.1)–(1.3) приводит к дисперсионному уравнению

$$\delta \left(K_1^{-1} \frac{1 + \tau_1 \delta}{1 + \theta_1 \delta} + K_2^{-1} \frac{1 + \tau_2 \delta}{1 + \theta_2 \delta} \right) + \frac{\kappa}{m} N = 0 \quad (1.4)$$

$$N = (K_1^{-1} - K_2^{-1}) u_0 + (\rho_1 - \rho_2) g$$

В случае фильтрации двух вязких ньютоновских жидкостей уравнение (1.4) дает выражение для инкремента нарастания [6]

$$\delta_0 = -N\kappa / [m (K_1^{-1} + K_2^{-1})]$$

из которого следует устойчивость процесса вытеснения только при $N > 0$. Наличие у жидкостей релаксационных свойств приводит к возможности устойчивого вытеснения и в случае $N < 0$, т. е. когда подвижность вытесняющей жидкости больше, чем у вытесняемой.

Рассмотрим сначала частный случай $\tau_1 = \tau_2 = 0$, тогда уравнение (1.4) переписывается в виде

$$a\delta^2 + b\delta + c = 0 \quad (1.5)$$

$$a = K_1^{-1}\theta_2 + K_2^{-1}\theta_1 + m^{-1}\kappa N\theta_1\theta_2$$

$$b = K_1^{-1} + K_2^{-1} + m^{-1}\kappa (\theta_1 + \theta_2) N, \quad c = m^{-1}\kappa N$$

Очевидно, что если $N > 0$, то все коэффициенты уравнения (1.5) положительны. Если корни этого уравнения действительны, то оба они отрицательны, а если комплексны, то действительная часть их отрицательна и положение фронта устойчиво. Если $N < 0$ ($c < 0$), то возможны три случая:

1) $a > 0, b > 0$; один из корней (δ_+) положителен, что соответствует неустойчивому фронту вытеснения;

2) $a < 0, b > 0$; если корни уравнения действительны, то оба они положительны, а если комплексны, то действительная часть их положительна и положение фронта неустойчиво;

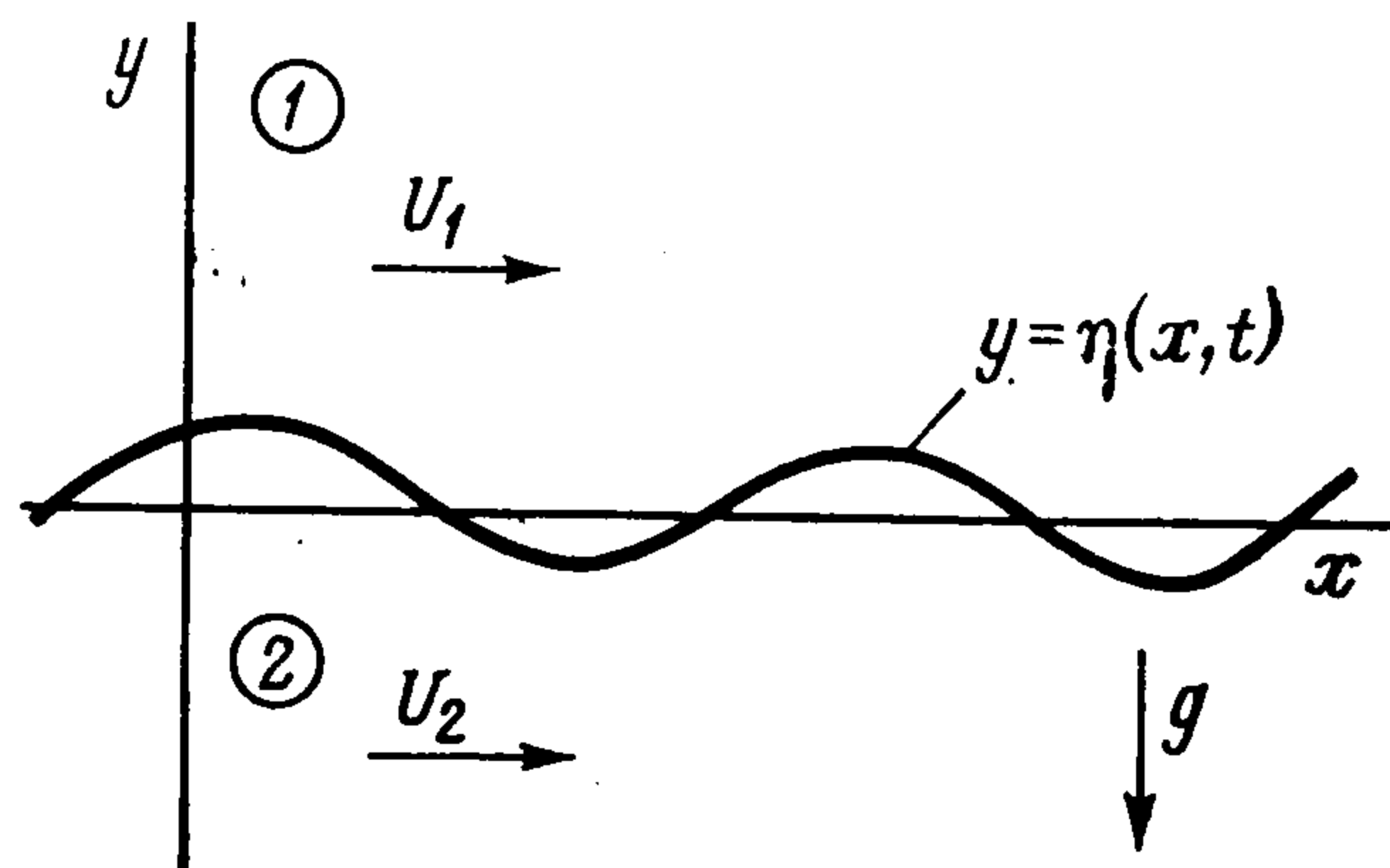
3) $a < 0, b < 0$; этот случай аналогичен случаю $N > 0$, когда все коэффициенты уравнения (1.5) положительны, и сводится к нему заменой $a \mapsto -a, b \mapsto -b, c \mapsto -c$; положение фронта устойчиво.

Можно показать, что критерий устойчивости в терминах волновых чисел имеет вид

$$\kappa > \kappa_c = m (K_1^{-1}\theta_2 + K_2^{-1}\theta_1) / [\theta_1\theta_2 (-N)] \quad (1.6)$$

Полный анализ корней уравнения (1.4) показывает, что рассмотренный выше частный случай является единственным в своем роде. Поэтому устойчивый режим вытеснения для $N < 0$ возможен только при наличии релаксаций по градиентам давления в обеих жидкостях ($\theta_1\theta_2 \neq 0$) и отсутствии релаксаций по потокам ($\tau_1 = \tau_2 = 0$). Соответствующий критерий устойчивости имеет вид (1.6). Оценки показывают, что для жидкостей с временами релаксаций $10^2 \text{ с} < \theta < 10^4 \text{ с}$ и при $m \approx 0,3, k_1\mu_2 / (k_2\mu_1) \approx 2, \rho_1 \approx \rho_2, u_0 \approx 10^{-5} \text{ м/с}$ критическое значение длины волны ($\lambda_c = 2\pi/\kappa_c$) изменяется в пределах $1 \text{ см} < \lambda_c < 1 \text{ м}$.

2. Устойчивость поверхности «языков» вытесняющей жидкости. Развита стадия неустойчивости вытеснения характеризуется существенной деформацией фронта, сопровождающейся прорывом вытесняющей жидкости в виде отдельных «языков». Поэтому дальнейшее решение задачи об устойчивости вытеснения связано с исследованием сдвиговой устойчивости фильтрационных потоков.



Фиг. 2

Рассматриваются две несжимаемые вязкоупругие жидкости различной плотности, движущиеся в пористой среде с различными, но постоянными, скоростями (фиг. 2). Распределение скоростей фильтрации и давлений для невозмущенного движения имеет вид

$$u_{j0} = U_j, v_{j0} = 0, p_{j0} = p_0 - K_j^{-1}U_j x - \rho_j g y, j = 1, 2 \\ (K_1^{-1}U_1 = K_2^{-1}U_2)$$

Эволюция возмущений основного потока описывается системой (1.1). Кинематические и динамические условия на границе раздела жидкостей $y = \eta(x, t)$ приводят к соотношениям

$$m \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_j' = 0, j = 1, 2; p_1' - p_2' = (\rho_1 - \rho_2) g \eta \quad (2.1)$$

Исследование сдвиговой устойчивости параллельных фильтрационных потоков сводится к анализу устойчивости элементарного волнового пакета.

$$\begin{aligned}\eta &= A \exp(-i\omega t + i\kappa x) \\ p_j' &= B_j \exp \psi_j, \quad u_j' = C_j \exp \psi_j, \quad v_j' = D_j \exp \psi_j \\ \psi_j &= -i\omega t + i\kappa x + (-1)^j \kappa y, \quad j = 1, 2\end{aligned}$$

Соответствующее дисперсионное уравнение задачи (1.1), (2.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}K_1 K_2 g (\rho_2 - \rho_1) \kappa F_1 (\omega) F_2 (\omega) - \\ - i K_1 m \Omega_2 F_1 (\omega) G_2 (\omega) - i K_2 m \Omega_1 F_2 (\omega) G_1 (\omega) = 0\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$F_j (\omega) = 1 - i\theta_j \Omega_j, \quad G_j (\omega) = 1 - i\tau_j \Omega_j, \quad \Omega_j = \omega - m^{-1} U_j \kappa, \quad j = 1, 2$$

В частном случае фильтрации двух вязких ньютоновских жидкостей решение уравнения (2.2) выписывается в явном виде

$$\begin{aligned}\omega_0 &= v_f \kappa - i\delta_0 \\ v_f &= \frac{K_2 U_1 + K_1 U_2}{m(K_1 + K_2)}, \quad \delta_0 = -\frac{K_1 K_2 g (\rho_2 - \rho_1)}{m(K_1 + K_2)} \kappa\end{aligned}\quad (2.3)$$

Отсюда следует, что фазовая скорость v_f распространения возмущений вдоль границы раздела есть постоянная величина, а инкремент их нарастания δ_0 не зависит от скоростей фильтрационных потоков, причем при $\rho_1 > \rho_2$ имеет место неустойчивость типа Релея—Тейлора.

Оценки, произведенные для значений $\rho_2 - \rho_1 \approx -10^2 \text{ кг/м}^3$, $k_j \approx 0,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $\mu_j \approx 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ показывают, что характерное время развития неустойчивости волн с $\lambda \approx 10^{-2} \text{ м}$ составляют приблизительно 1 час, а с $\lambda \approx 1 \text{ м}$ — 100 час.

В разд. 1 показано, что прорыв вытесняющей жидкости в виде отдельных «языков» наиболее вероятен при отсутствии релаксаций по градиентам давления и наличии релаксаций по потокам. В этом случае ($\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\tau_1 \tau_2 \neq 0$) уравнение (2.2) переписывается в виде

$$K_2 \tau_1 \Omega_1^2 + K_1 \tau_2 \Omega_2^2 - K_1 K_2 g (\rho_2 - \rho_1) m^{-1} \kappa = i (K_1 \Omega_2 + K_2 \Omega_1) \quad (2.4)$$

При малых временах релаксации ($\tau_j \omega \ll 1$) инкремент нарастания возмущений вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\delta = \delta_0 + \frac{K_1 K_2 \kappa^2}{(K_1 + K_2)^3} [V^2 (\tau_1 K_1 + \tau_2 K_2) - K_1 K_2 m^{-2} g^2 (\rho_2 - \rho_1) (\tau_1 K_2 + \tau_2 K_1)], \\ V = \frac{U_2 - U_1}{m}\end{aligned}$$

Отсюда видно, что при незначительной разности плотностей жидкостей ($\rho_1/\rho_2 \approx 1$) инкремент нарастания δ существенно положителен и боковая поверхность «языка» неустойчива.

При условии $\tau_j \Omega_j \gg 1$ уравнение (2.4) приводится к виду

$$Z_0 (\Omega_1, \kappa) = iF \quad (2.5)$$

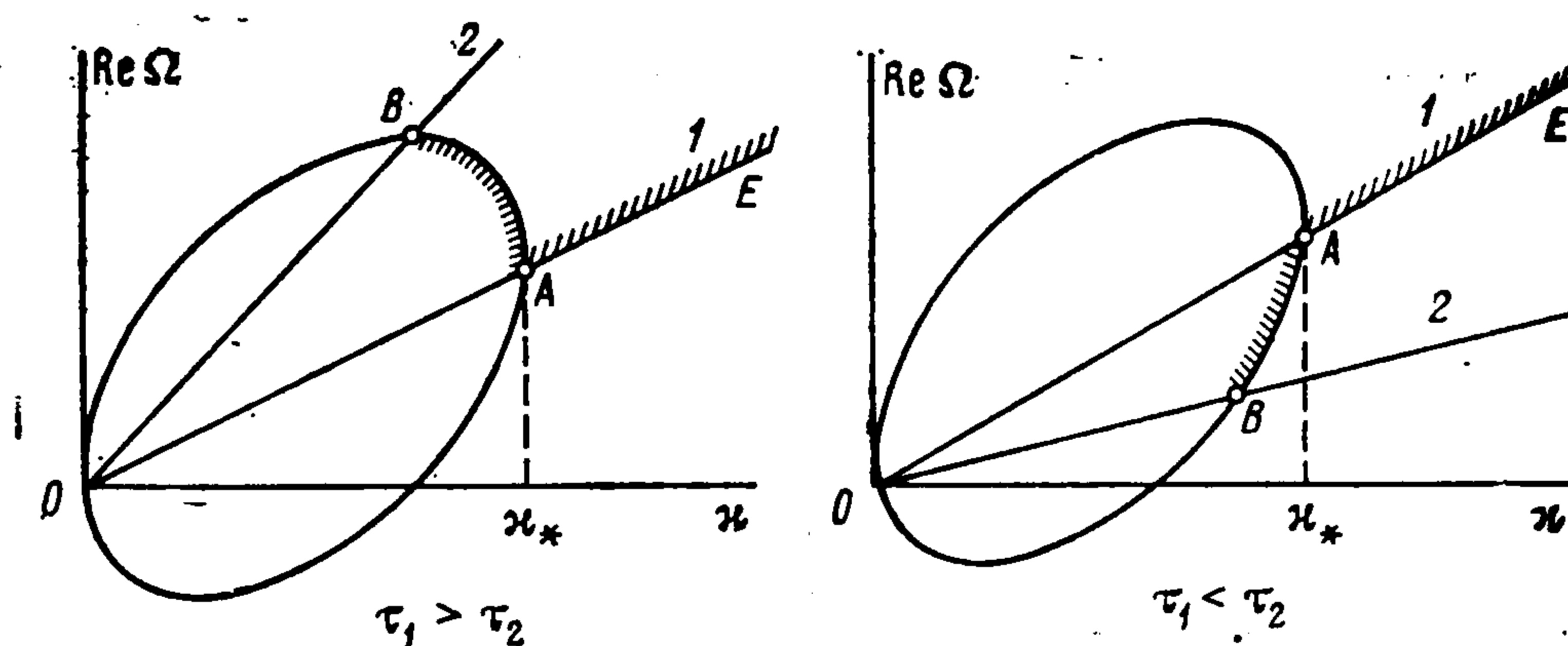
$$Z_0 \equiv a\Omega_2^2 + \Omega_1^2 - gb(1-s)\kappa, \quad a = \tau_2 K_1 / (\tau_1 K_2)$$

$$F \equiv -K_1 (K_2^{-1} \Omega_2 + K_1^{-1} \Omega_1) / \tau_1, \quad b = K_1 \rho_2 / (m\tau_1), \quad s = \rho_1 / \rho_2$$

Отметим, что уравнение $Z_0 (\Omega_1, \kappa) = 0$ аналогично дисперсионному соотношению, описывающему сдвиговую неустойчивость в двухслойной идеальной жидкости [7]. Можно показать, что в этом случае в области коротких волн

$$\kappa > \kappa_* = (1 + a) bg (1 - s) / (aV^2)$$

имеет место неустойчивость типа Кельвина—Гельмгольца. Волны с $\kappa < \kappa_*$ нейтрально устойчивы.



Фиг. 3

Известно, что при сдвиговом течении двухслойной вязкой несжимаемой жидкости существуют так называемые «волны отрицательной энергии» (см. обзор [8]), которые в отсутствие вязкости нейтрально устойчивы, а при наличии вязкости теряют устойчивость (волны отрицательной энергии в гидродинамике вязкоупругих жидкостей изучены в работе [9]). Развивая аналогию с гидродинамикой двухслойной жидкости, проанализируем влияние правой части уравнения (2.5) на нейтрально устойчивые волны. Для инкремента нарастания получим выражение

$$\delta = - \frac{K_1}{2\tau_1} \frac{(K_1^{-1} + K_2^{-1})\Omega_0(\kappa) - K_2^{-1}V\kappa}{(a+1)\Omega_0(\kappa) - aV\kappa} \quad (2.6)$$

Здесь $\Omega_0(\kappa)$ — корень уравнения $Z_0(\Omega_0, \kappa) = 0$.

Знак δ зависит от взаимного расположения в плоскости (Ω_1, κ) прямых

$$\Omega_1^{(1)} = \frac{a}{a+1} V\kappa \text{ и } \Omega_1^{(2)} = \frac{a}{a + \tau_2/\tau_1} V\kappa$$

вдоль которых обращаются в нуль соответственно знаменатель и числитель выражения (2.6).

На фиг. 3 изображены две возможные ситуации ($\tau_1 > \tau_2$ и $\tau_1 < \tau_2$). Штриховкой отмечены области неустойчивости (линии AE соответствуют неустойчивости типа Кельвина—Гельмгольца, линии AB — неустойчивости, аналогичной диссипативной неустойчивости «волн отрицательной энергии»). Таким образом, в том случае, когда фронт вытеснения неустойчив ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), поверхность «языков» прорвавшейся жидкости также обнаруживает тенденцию к неустойчивости за счет неравновесности фильтрационных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац Р. М., Таранчук В. Б. Обзор работ по исследованию устойчивости фильтрационных течений // Динамика многофазных сред. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1981. С. 18—29.
2. Homsy G. M. Viscous fingering in porous media // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto Ca: Ann. Rev. Inc., 1987. V. 19. P. 271—311.
3. Аметов И. М., Шерстнев Н. М. Применение композитных систем в технологических операциях эксплуатации скважин. М.: Недра, 1989. 212 с.
4. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М. Прогнозирование промышленной эффективности методов теплового воздействия на нефтяные пласты. М.: Недра, 1983. 205 с.
5. Алишаев М. Г., Мирзаджанзаде А. Х. К учету явления запаздывания в теории фильтрации // Изв. вузов. Нефть и газ. 1975. № 6. С. 71—74.
6. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1958. V. 245. No 1242. P. 312—329.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
8. Островский Л. А., Рыбак С. А., Цимринг Л. Ш. Волны отрицательной энергии в гидродинамике // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. Вып. 3. С. 417—437.
9. Ахатов И. Ш. Сдвиговая неустойчивость в стратифицированных вязкоупругих и газожидкостных средах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 630—635.