

УДК 532.59 : 534

© 1991 г.

Б. А. Маломед, В. С. Митлин, В. Н. Николаевский

КОРОТКОВОЛНОВАЯ БИФУРКАЦИЯ В МОДЕЛИ СЕЙСМОАКТИВНОЙ СРЕДЫ И ДОМИНАНТНЫЕ ЧАСТОТЫ

Анализируется уравнение эволюции нелинейных сейсмических волн, обладающее ограниченным диапазоном частот нарастания амплитуд колебаний. Показано, что, согласно уравнению эволюции, сохраняется импульс системы, и исследованы свойства функционала энергии. Изучен пространственный период моды наибольшего усиления начального возмущения. Сохранение конвективной нелинейности приводит к устойчивым стационарным структурам, бегущим со скоростью нелинейных сейсмических волн.

1. Для математического изучения нелинейных сейсмических волн была предложена обобщенная модель вязко-упругого тела с внутренними осцилляторами [1, 2], сводящаяся в случае слабых одномерных плоских продольных волн к обобщенному уравнению Бюргерса — Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{n=2}^N (-1)^n A_n \frac{\partial^n v}{\partial x^n} \quad (1.1)$$

где v — скорость смещения, A_n — положительные числа. Уравнение (1.1) получено методом возмущений. Общность этого уравнения состоит в том, что рассмотрен случай $N = 6$. Кроме того, были выбраны такие коэффициенты A_n , чтобы существовал интервал частот колебаний, амплитуды которых нарастают во времени. Считалось, что соответствующие частоты играют роль доминантных для сейсмических волн в реальных геоматериалах.

Начнем обсуждения с некоторых свойств уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{n=1}^6 (-1)^n A_n \frac{\partial^n v}{\partial x^n} \quad (1.2)$$

к которому сводится уравнение (1.1) после линеаризации. Тем самым исследуется ранняя стадия выделения доминантной моды. Уравнение (1.2) будем рассматривать либо на прямой с условиями затухания v и всех требуемых производных при $|x| \rightarrow \infty$, либо в области $(0, L)$ с периодическими граничными условиями, что эквивалентно заданию начального условия в виде периодической по пространству функции. Такой выбор класса исследуемых задач связан с особенностями процедуры получения (1.1), в которой производился переход к бегущей координате и явно использовалась «безграничность» области решения.

Видно, что и в линейном, и в нелинейном вариантах величина суммарного импульса

$$M = \int v dx \quad (1.3)$$

по всей области движения сохраняется во времени.

Более сложно ведет себя величина

$$E = \int v^2 dx \quad (1.4)$$

интерпретируемая как энергия среды. Для выявления зависимости (1.4) от времени рассмотрим решения уравнения (1.2) для задачи с условиями затухания на бесконечности. Переход к фурье-компонентам v_q , таким что

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} v_q dq$$

сводит уравнение (1.2) к следующему обыкновенному:

$$v_q \dot{=} P(iq) v_q \quad (P(iq) = \sum_{n=1}^6 (-iq)^n A_n) \quad (1.5)$$

Из (1.5) находим

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(q) \exp [P(iq) t + iqx] dq, \quad C(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) e^{-iqx} dx$$

Одновременно с (1.5) рассмотрим сопряженное уравнение

$$v_{-q} \dot{=} P(-iq) v_{-q} \quad (1.6)$$

Домножим (1.5) на v_{-q} , (1.6) на v_q и сложим результаты. Тогда

$$d(v_q v_{-q}) / dt = Q(q) (v_q v_{-q}) \quad (1.7)$$

$$Q(q) = P(iq) + P(-iq) = 2q^2 (-A_6 q^4 + A_4 q^2 - A_2)$$

Отсюда следует возможность двух ситуаций (фиг. 1): либо амплитуды всех фурье-компонент затухают со временем (штриховая кривая), либо имеется интервал волновых чисел, в котором происходит рост амплитуд фурье-компонент. Видно также, что изменение амплитуды определяется только четными (диссипативными) членами уравнения (1.2).

Энергия системы, согласно равенству Парсеваля, равна

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (v_q v_{-q}) dq \quad (1.8)$$

Далее получим

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(q)|^2 \exp(Q(q)t) dq \quad (1.9)$$

Наиболее важен случай, когда $Q(q)$ имеет нули при ненулевых значениях q (сплошная кривая на фиг. 1). При этом асимптотика E при больших t дается при помощи метода Лапласа

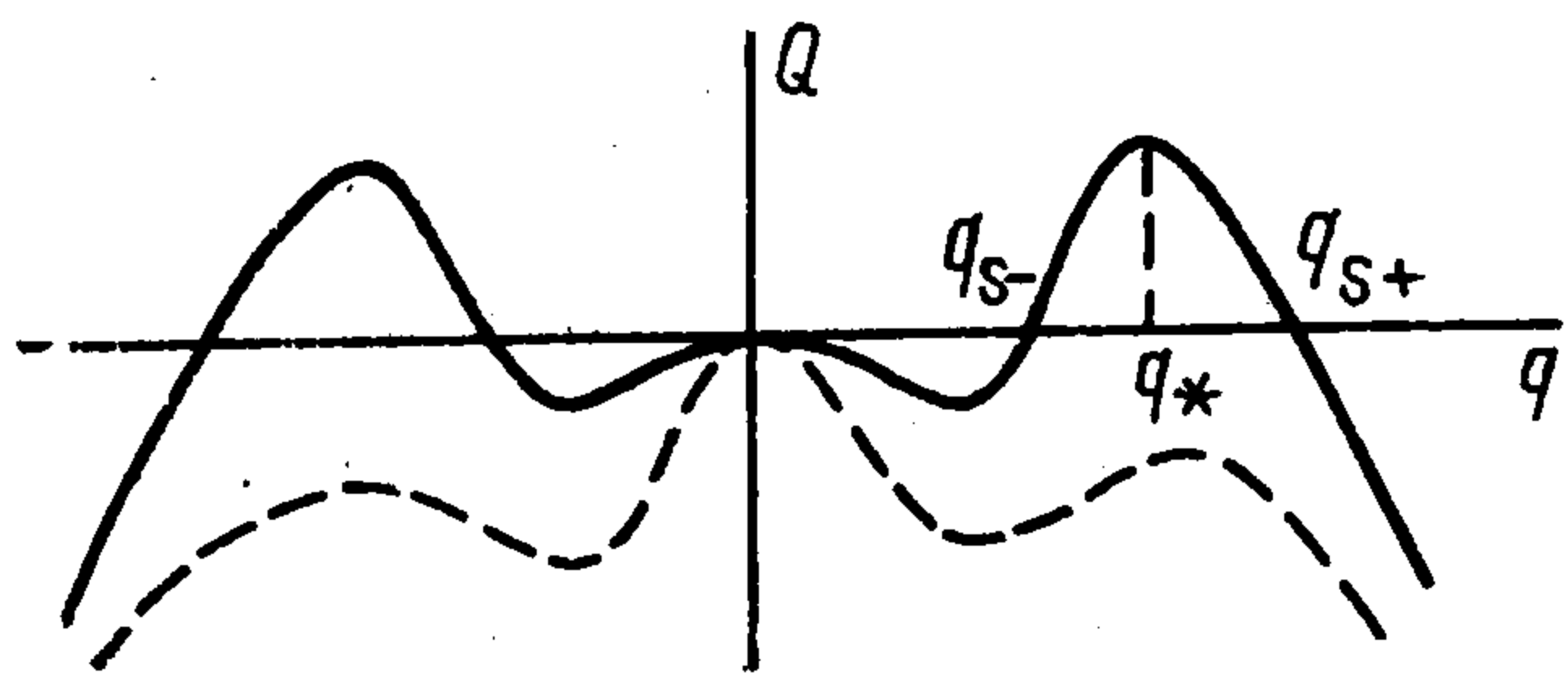
$$E = \frac{2}{\sqrt{-2\pi Q''(q_*)}} |C(q_*)|^2 \exp(Q(q_*)t) \quad (1.10)$$

Величина q_* определяется из обращения в нуль $Q'(q)$:

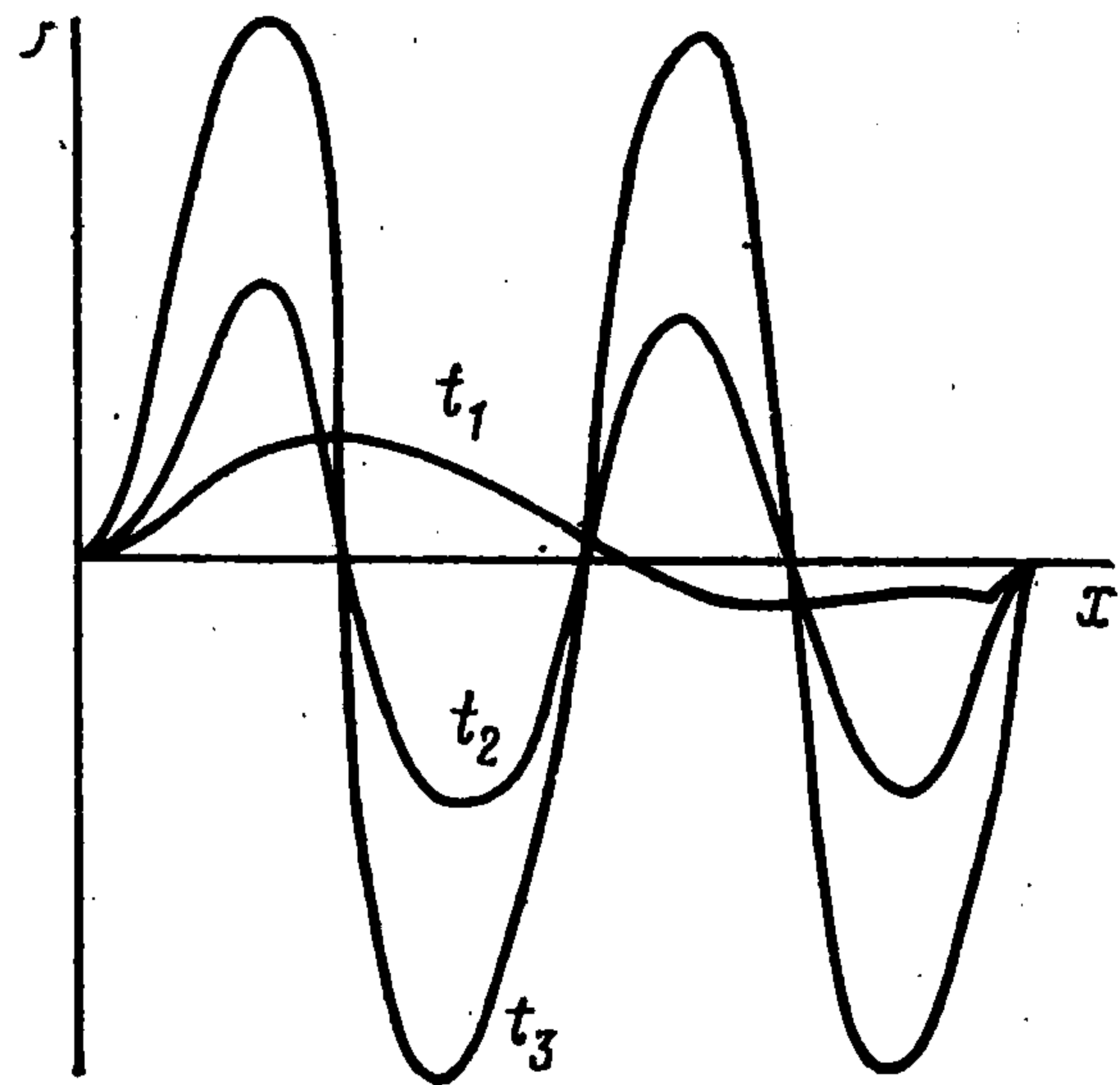
$$q_* = \left(\frac{A_4 + (A_4^2 - 3A_2 A_6)^{1/2}}{3A_6} \right)^{1/2}$$

Видно, что энергия системы (средний по пространству квадрат амплитуды сейсмической волны) экспоненциально нарастает со временем. Поскольку полный импульс среды M неизменен, это означает, что в разных точках пространства значения v стремятся со временем либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (фиг. 2).

2. Ранее отмечалось [1], что такое парадоксальное на первый взгляд поведение энергии E связано с ее определением, а именно с тем, что для



Фиг. 1



Фиг. 2

получения полного выражения для энергии необходимо учитывать следующие приближения в методе возмущений. Однако, для уравнения (1.2) все же существует функционал, отличающийся от E включением производных и уже убывающий со временем. Действительно, рассмотрим выражение

$$E_* = \int \left(\frac{A_2}{2} v^2 - \frac{A_4}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_6}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (2.1)$$

Вычисляя вариационную производную функционала E_* , получим

$$\frac{\delta E_*}{\delta v} = A_2 v + A_4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (2.2)$$

Умножим теперь обе части уравнения (1.2) на выражение (2.2) и проинтегрируем по области решения. Тогда левая часть полученного выражения запишется в виде

$$\int \frac{\delta E_*}{\delta v} \frac{\partial v}{\partial t} dx \equiv \frac{dE_*}{dt} \quad (2.3)$$

а правая в виде

$$- \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta E_*}{\delta v} \right)^2 dx + \int G \frac{\delta E_*}{\delta v} dx \quad (2.4)$$

где G — сумма членов в правой части (1.2) с нечетными производными по x .

Можно проверить, что второй интеграл в (2.4) тождественно равен нулю. Поэтому из (2.3), (2.4) следует

$$\frac{dE_*}{dt} = - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta E_*}{\delta v} \right)^2 dx \leq 0$$

т. е. E_* — невозрастающая величина. Как показано в [1], уравнение (1.2) определяет эволюцию поперечных волн в среде со сложной вязко-упругой реологией. Появление высших производных в выражении для E_* , «правильно» изменяющейся во времени, прямо связано с их наличием в обобщенном реологическом законе [1].

Таким образом, подходящий функционал формируется добавлением к обычной энергии E членов, зависящих от $\partial v / \partial x$ и $\partial^2 v / \partial x^2$ (ср. с [4], где показано, что функционал Гинзбурга — Ландау, зависящий от искомой функции и ее пространственных производных, играет аналогичную роль для уравнения Кана — Хилларда [5]).

3. Решение задачи (1.2) с периодическими начальными условиями имеет вид

$$v = \sum_q C(q) \exp [P(iq)t + iqx] \quad (3.1)$$

$$C(-q) = \bar{C}(q), \quad q = 2\pi m / L, \quad m = \pm 1, \pm 2 \dots$$

и наиболее быстро растут моды, отвечающие значению $q = q_*$, см. (1.1). Если начальное распределение v имеет пространственный период L , то решение обладает интересными особенностями, связанными с дискретностью набора собственных функций оператора правой части (1.2) и рассмотренные ранее для уравнения Кана — Хилларда [3]. Именно, рассмотрим, как изменяется период наиболее быстро растущей моды при изменении L . В исследуемом случае коэффициент усиления флуктуаций $Q(q)$ имеет в окрестности точки $q = q_*$ вид выпуклой вверх функции. Если изменяем L , то соответственно будут изменяться номера значений $q_m = 2\pi m/L$, наиболее близких к q_* , в смысле величины коэффициента усиления. Условие смены лидирующих мод имеет вид [3]

$$Q(2\pi m/L) = Q(2\pi(m+1)/L) \quad (3.2)$$

Это условие определяет значения L_m , при которых происходит m -я бифуркация периода моды максимального роста (смена кинетически выгодного режима).

Можно показать, что при любой выпуклой вверх зависимости коэффициента усиления и достаточно больших значениях m зависимость бифуркационных параметров имеет универсальный вид. Для этого разложим функцию Q в ряд около значения q_* до квадратов отклонений. Учитывая, что $Q'(q_*) = 0$, получим асимптотическое условие бифуркации

$$(-2\pi m/L + q_*)^2 = (2\pi(m+1)/L - q_*)^2 \quad (3.3)$$

После преобразований получим

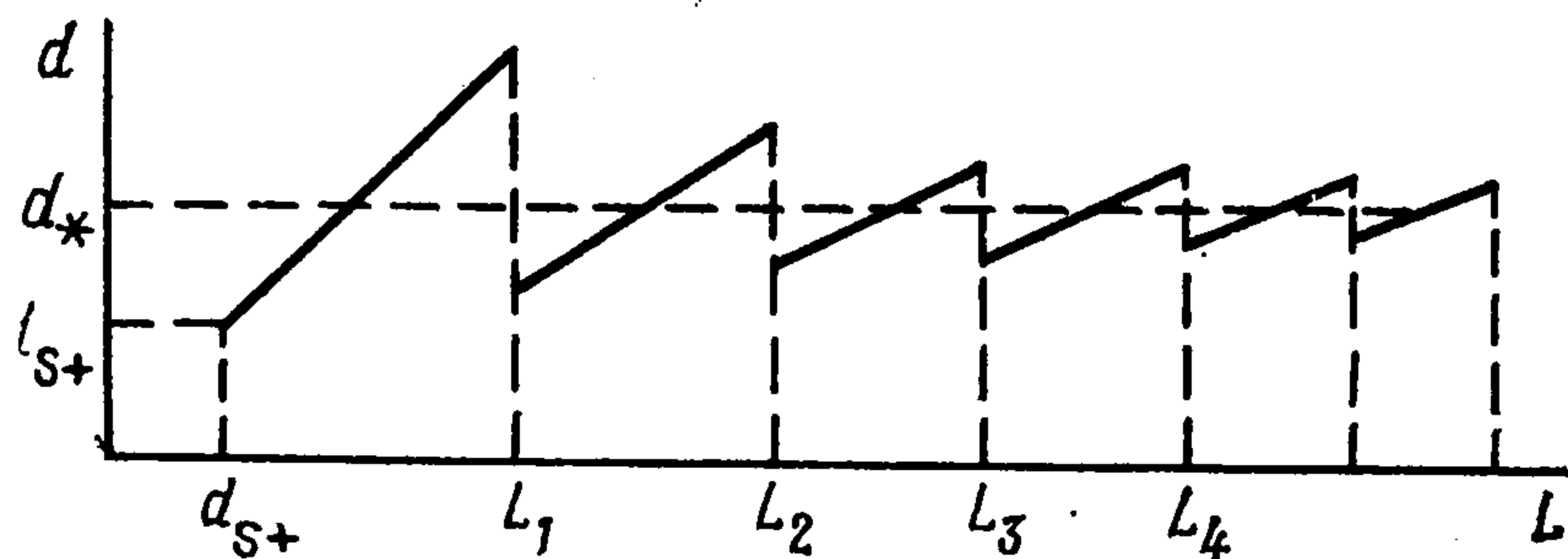
$$L_* = 2\pi q_*^{-1} (m + 1/2) = d_* (m + 1/2) \quad (3.4)$$

Таким образом, при $L \gg d_*$ период d моды максимального роста практически не отличается от d_* . Эти результаты можно проиллюстрировать графиком зависимости периода моды максимального роста от L (фиг. 3, см. также [3]). Видно, что зависимость состоит из линейных участков, перемежающихся скачками. График имеет вид пилы с зубьями, уменьшающимися с ростом L . Поскольку период моды максимального роста не может быть меньше периода d_{s+} стационарного решения уравнения (1.2) малой амплитуды, график начинается в точке (d_{s+}, d_{s+}) , где $d_{s+} = 2\pi/q_{s+}$ определяется из уравнения $A_6 q_s^4 - A_4 q_s^2 + A_2 = 0$ и равен

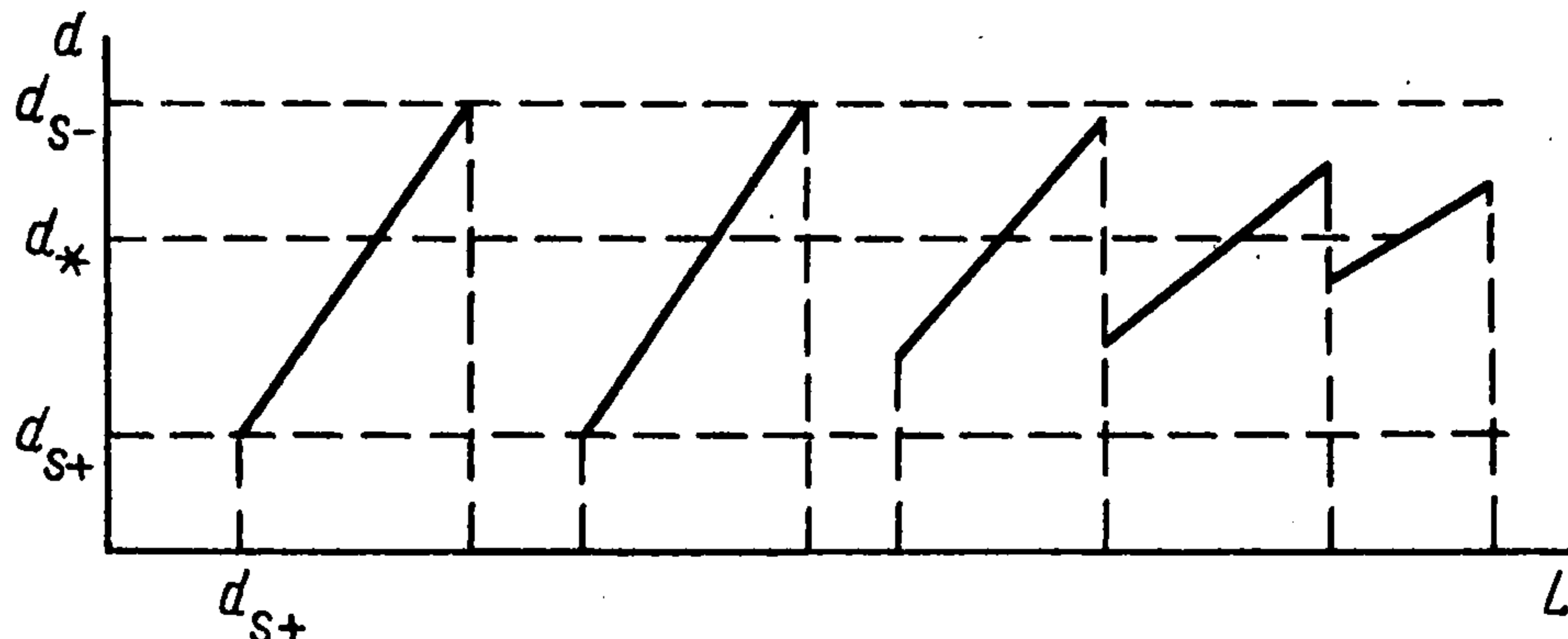
$$d_{s+} = 2\pi \left(\frac{2A_6}{A_4 + \sqrt{A_4^2 - 4A_2A_6}} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Результаты этого раздела говорят о том, что при начальных возмущениях среды с характерным пространственным масштабом L , много большим величины q_*^{-1} , пространственный период наиболее быстро растущей моды практически не зависит от вида начального возмущения. Однако если $L \sim q_*^{-1}$, то в зависимости от изменения L величина пространственного периода моды максимального роста может достаточно сильно меняться.

Принципиальное отличие рассматриваемого уравнения (1.1) от таких моделей нелинейной динамики, как дисперсионно-диссипативное уравнение четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса — Кортвега — де Вриза [6] или известное уравнение теории фазовых переходов [5], состоит в том, что в данном случае левая граница спектра растущих мод $q_{s-} > 0$ (величина $q_{s-} = 2\pi/d_{s-}$ определяется формулой (3.5) при знаке минус перед корнем в знаменателе, см. также фиг. 1). Такая специфика задач может приводить к изменению зависимости $d(L)$ при $L \sim q_*^{-1}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Именно, если коэффициенты (1.2) таковы, что $Q(2q_-) < 0$ (т. е. при достаточно малой величине области спектра, отвечающей растущим модам), то с ростом L первая лидирующая мода с $q = 2\pi/L$ уже выйдет из области (q_{s+}, q_{s-}) , но вторая (с $q = 4\pi/L$) еще не войдет в нее. Поэтому для одной или нескольких первых бифуркаций график $d(L)$ будет выглядеть по-другому, чем на фиг. 3: будут существовать «окна» (см. фиг. 4), для которых растущие моды отсутствуют. Величина L , начиная с которой «окна» исчезнут и зависимость $d(L)$ будет иметь вид графика на фиг. 3, определяется как d_{s-m} , а номер m определится из соотношений $Q(q_{s-}(m+1)/m) > 0$, $Q(q_{s-}m/(m-1)) < 0$. Таким образом, периодическое по пространству начальное распределение v может не приводить к выделению доминантной моды даже при наличии области положительных значений $Q(q)$, если растущие моды лежат в малой области спектра и L попадает в окна на фиг. 4.

Экспоненциальный рост амплитуды волны физически должен рано или поздно приостановиться, что математически связано с «включением» нелинейных эффектов. Можно ожидать, что на больших временах будет формироваться стационарная бегущая волна.

Действительно, при изменении коэффициентов (1.1) кривая $Q(q)$ может касаться оси q в точке q_* ; этот момент соответствует бифуркации рождения периодического по времени решения (1.1) [7]. Проверка выполнения достаточных условий того, что формирующая периодическая орбита будет устойчивой при большой надкритичности, выходит за рамки данной работы. Однако общая теория [8—10], развитая для равномерно распределенных нелинейных систем с неустойчивостью типа показанной на фиг. 1, позволяет утверждать, что по крайней мере в слабо надкритической ситуации будет формироваться устойчивая стационарная структура типа бегущей волны с пространственным периодом, соответствующим q_* .

4. Рассмотрим более подробно нелинейное уравнение (1.1). Остановимся сначала на бездисперсионном случае, когда в правой части (1.1) содержатся только четные производные, т. е. это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + A_6 \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} \quad (4.1)$$

Тривиальное решение $v \equiv 0$ становится неустойчивым при условии

$$A_4^2 \geq 4A_2A_6 \quad (4.2)$$

причем нарастающие возмущения имеют волновые числа [1], лежащие в интервале

$$q_{s-}^2 < q < q_{s+}^2, \quad q_{s\pm}^2 = \frac{A_4 \pm \sqrt{A_4^2 - 4A_2A_6}}{2A_6} \quad (4.3)$$

Нелинейная динамика, описываемая уравнением (4.1), может быть исследована аналитически вблизи точки бифуркации, т. е. при

$$A_2 = 1/4 A_4^2 A_6^{-1} (1 - \lambda)^2 \quad (4.4)$$

где λ — малый параметр. Неустойчивость возникает при бесконечно малом λ на волновых числах (см. (4.3)) $q = q_*$, где

$$q_*^2 = 1/2 A_4 A_6^{-1} \quad (4.5)$$

Видно, что при стремлении $q_{s+} - q_{s-}$ к нулю (4.11) переходит в (4.5). Следуя общим методам (см., например, [9, 10]), будем искать стационарные решения нелинейного уравнения (4.1) в виде

$$v(x) = a_1(q) \cos(qx) + a_2(q) \sin(2qx) + a_3(q) \cos(3qx) + \dots \quad (4.6)$$

где предполагается, что $|q - q_*| \lesssim \lambda$, $a_1 \sim \lambda$, $a_2 \sim \lambda^2$, $a_3 \sim \lambda^3$, ... (λ — малый параметр, введенный в (4.4)). Это предположение будет оправдано дальнейшими вычислениями.

Подставляя выражение (4.6) в (4.1) и приравнявая коэффициенты при различных гармониках, выразим, прежде всего, a_2 через a_1 (для этого надо приравнять коэффициенты при $\sin(2qx)$):

$$a_2 = a_1^2 (9/32) q_*^{-1} A_4^2 A_6^{-1} \quad (4.7)$$

при этом величина q_* определена в (4.5). При выводе уравнения (4.7) пренебрегли малыми величинами $\sim \lambda$, λ^2 , ... Однако при приравнивании коэффициентов при $\cos(qx)$ необходимо удержать малые члены $\sim \lambda^3$ (низшие члены $\sim \lambda$ автоматически сокращаются). В результате получается уравнение

$$a_1 [1/2 q_* a_2 - 1/8 A_4^3 A_6^{-2} \lambda^2 + 1/2 A_4 (q^2 - q_*^2)^2] = 0 \quad (4.8)$$

Далее, подставляя выражение (4.7) в (4.8), получим уравнение для амплитуды основной гармоники $a_1(q)$ (см. уравнение (4.6)), которое имеет тривиальное решение $a_1 = 0$ и нетривиальное:

$$a_1^2 = (32/9) A_6 A_4^{-1} [(1/2 A_4 A_6^{-1})^2 \lambda^2 - (q^2 - q_*^2)^2] \quad (4.9)$$

Таким образом, при заданном малом параметре надкритичности λ^2 нетривиальные решения (4.6), (4.7), (4.9) существуют в области волновых чисел

$$(q^2 - q_*^2)^2 < (1/2 A_4 A_6^{-1})^2 \lambda^2 \quad (4.10)$$

Отметим, что это та же область, в которой, согласно уравнениям (4.3) и (4.4), имеет место неустойчивость тривиального решения. Амплитуда достигает максимального значения

$$(a_1^2)_{\max} = 8/9 A_4 A_6^{-1} \lambda^2 \quad (4.11)$$

при $q^2 = q_*^2$.

Представляет интерес вопрос об устойчивости решений с амплитудами (4.6) — (4.9). Ввиду важности этой задачи здесь кратко изложим основные результаты в общем виде. Для этого представим общее нестационарное решение следующим образом:

$$v(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t) e^{ixq_*} + \bar{U}_1(x, t) e^{-ixq_*} + U_2(x, t) e^{2ixq_*} + \bar{U}_2(x, t) e^{-2ixq_*} \quad (4.12)$$

где U_0 — медленно изменяющаяся вещественная амплитуда нулевой гармоники, U_1 и U_2 — медленно изменяющиеся комплексные амплитуды первой и второй гармоник, и q_* принято за единицу. Подстановка разложения (4.12) в исходное уравнение типа (4.1) приводит к системе обобщенных уравнений Гинзбурга — Лагдау (ГЛ), которые после необходимых преобразований могут быть записаны в следующем общем виде

$$(U_1)_t = \lambda^2 U_1 + 4 (U_1)_{xx} - \kappa |U_1|^2 U_1 - iU_0 U_1 \quad (4.13)$$

$$(U_0)_t = \eta^2 (U_0)_{xx} - (|U_1|^2)_x \quad (4.14)$$

где λ^2 — введенный выше малый параметр надкритичности, κ и η^2 — произвольные (не малые) параметры.

Наличие второго уравнения для медленно релаксирующей нулевой моды представляет важное отличие системы (4.13), (4.14) от классического уравнения ГЛ. Семейство стационарных периодических решений имеет такой же вид, как в случае обычного уравнения ГЛ:

$$U_1 = \kappa^{-1} \sqrt{\lambda^2 - 4k^2} e^{ikx} \quad (k^2 \leq \lambda^2/4) \quad (4.15)$$

Здесь $k = q - q_* = q - 1$ — расстройка волнового числа. Однако условия устойчивости решения (4.15) существенно отличаются от хорошо известного критерия устойчивости Экхауса [8] для решений уравнения ГЛ

$$|k| \leq \lambda / \sqrt{12} \quad (4.16)$$

Линеаризуя уравнения (4.13) и (4.14) на фоне решения (4.15) можно найти, что критерий устойчивости принимает вид

$$-1/4 \kappa (4 + \eta^2) \lambda^2 \leq k \leq 0 \quad (4.17)$$

Таким образом, область устойчивости (4.17) является аномально узкой по сравнению с классической областью Экхауса (4.16). Важное отличие состоит также в том, что в данном случае только решение с $k < 0$ может быть устойчивым. С точки зрения исходного представления (4.12) это означает, что для устойчивости необходимо, чтобы полное волновое число $q = 1 + k$ было меньше, чем критическое волновое число $q_* = 1$, на котором возникает неустойчивость. Наконец отметим, что изложенные результаты справедливы для задачи без граничных условий (т. е. заданной на всей оси $-\infty < x < \infty$).

5. Поскольку исходное уравнение было получено [1, 2] в подвижной системе координат, то для покоящейся системы возникающие устойчивые стационарные структуры соответствуют волнам, бегущим со скоростью s линейных сейсмических волн. Устойчивость стационарных структур означает, что любое «затравочное» начальное возмущение (например, типа «белого шума») перерабатывается в волны с пространственным периодом $2\pi/q_*$ и частотой sq_* . Учет нечетных производных в исходном уравнении сместит доминантную частоту относительно sq_* и, более того, приведет к волнам доминантных частот малой амплитуды, бегущим и в подвижной системе координат [11]. Однако эта «дополнительная» скорость должна быть намного меньше скорости звука s . Подробное рассмотрение нелинейного уравнения (1.1) при учете неравенств $A_3 \neq 0$, $A_5 \neq 0$ следует проводить отдельно.

В заключение отметим, что с формально-математической точки зрения результаты исследования, конечно, не ограничиваются уравнениями вида (1.1). Можно было бы взять в качестве оператора в правой части (1.1) любую целую функцию $P(\partial/\partial x)$, лишь бы функция $Q(q) = P(iq) + P(-iq)$ имела участки положительности. Для анализа устойчивости слабонадкритических стационарных решений в последнем разделе принципиальным является отделенность области растущих мод (q_{s-} , q_{s+}) от нуля (условие коротковолновой бифуркации [8]). Заметим, что уравнение вида (1.1) с $N = 6$ является минимальным по порядку пространственных производных уравнением с полиномиальной зависимостью оператора правой части от $\partial/\partial x$, когда возможна коротковолновая бифуркация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Механизм вибровоздействия на нефтеотдачу месторождений и доминантные частоты // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 3. С. 570—574.
2. Nikolaevsky V. N. Dynamics of viscoelastic media with internal oscillators // Recent advances in Engineering Science. eds. S. L. Koh, C. G. Speciale, Berlin: Springer, 1989. P. 201—221.
3. Митлин В. С., Маневич Л. И., Брухимович И. Я. Образование кинетически стабильной доменной структуры в процессе спиnodального распада бинарных полимерных смесей // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. Вып. 2. С. 495—506.
4. Митлин В. С., Маневич Л. И. Переход к термодинамическому равновесию через перестройки метастабильных структур при спиnodальном распаде бинарных смесей полимеров // Высокомолек. соединения. 1988. Т. 30А. № 1. С. 9—15.
5. Cahn J. W., Hilliard J. E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28. No 2. P. 258—267.
6. Кудряшов Н. А. Преобразование Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса — КдФ. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 342—345.
7. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications, N.Y.: Springer, 1976. 408 p. (Русск. перев.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.).
8. Eckhaus W. Studies in non-linear stability theory. New York: Springer, 1965. 117 p.
9. Маломед В. А., Трибельский М. И. О пространственно периодических структурах в теории конвекции и родственных задачах // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. Вып. 3. С. 227—228.
10. Malomed B. A., Tribelsky M. I. Bifurcations in distributed kinetic systems with aperiodic instability // Physica. D. 1984. V. 14. No 1. P. 67—87.
11. Malomed B. A. Nonlinear waves in nonequilibrium systems of the oscillatory type. Pts 1, 11 // Z. Phys. B. 1984. V. 55. No. 3. P. 241—256.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.1990.