

УДК 533.9

© 1991 г.

К. П. Горшенин

## О КРИТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ДРУГИХ ОСОБЕННОСТЯХ «ПЛАВНЫХ» ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ

Рассматривается стационарное аксиально-симметричное магнитогидродинамическое течение плазмы в азимутальном магнитном поле в канале плазменного ускорителя. В приближении «плавного» течения исследуется форма критических поверхностей (поверхностей перехода через магнитозвуковую скорость). Показано, что в потоке, не являющемся потенциальным, возможно образование ограниченных областей сверхзвукового течения на фоне основного дозвукового течения. На примере потенциального потока рассматриваются некоторые особенности плазменных течений. В частности, показана возможность реализации течений с аномальным поведением плотности. Рассмотрено течение в узком кольцевом зазоре постоянного размера.

**1. Постановка задачи.** В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  рассмотрим стационарное аксиально-симметричное магнитогидродинамическое течение в канале, образованном двумя коаксиальными электродами  $R_1(z)$  и  $R_2(z)$ . Будем считать, что скорость имеет две компоненты:  $v_r$  и  $v_z$  (в дальнейшем обозначаемую просто  $v$ ), а магнитное поле одну азимутальную компоненту  $H$ . Движущуюся среду полагаем невязкой, не теплопроводной и идеально проводящей. Предположим далее, что функции  $R_1(z)$  и  $R_2(z)$  слабо зависят от своего аргумента, и в силу этого все характеристики течения также слабо зависят от  $z$ , так что можно пренебречь вторыми производными по  $z$  и квадратами первых производных по  $z$  («плавное» течение). При дополнительном условии изоэнтропичности такое течение описывается уравнениями [1]

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\rho r^2}{2} \frac{d\kappa^2(\psi)}{d\psi} - \frac{dU(\psi)}{d\psi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + W(\rho) + \rho r^2 \kappa^2(\psi) = U(\psi) \quad (1.2)$$

$$\frac{H}{\rho r} = \sqrt{4\pi} \kappa(\psi); \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \rho v r$$

Здесь  $\psi$  — гидродинамическая функция тока,  $W(\rho)$  — энтальпия, далее всюду предполагается  $W(\rho) = w_0 \rho^{\gamma-1}$ .

Будем считать, что на внутреннем электроде  $\psi = 0$ , на внешнем  $\psi = \psi_m$ . Зависимость от  $z$  искомых величин остается в виде зависимости от  $z$  постоянных интегрирования уравнений (1.1) и (1.2).

При исследовании МГД-течений в поперечном магнитном поле представляет интерес вопрос о переходе через магнитозвуковую скорость  $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho + H^2 / (4\pi \rho)}$  и о форме критической поверхности, на которой происходит этот переход. Уравнение последней определяется условием

$$v^2 = c_s^2 = (\gamma - 1)W(\rho) + \rho r^2 \kappa^2(\psi) \quad (1.3)$$

В дальнейшем для краткости употребляется термин «скорость звука», обозначающий тепловую скорость звука  $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  в газодинамическом

течении и магнитозвуковую скорость в МГД-течении. Аналогично следует понимать и термины «сверхзвуковой» и т. п.

Используя интеграл Бернулли (1.2), можно найти критическую скорость  $v_*$  (равную местному значению  $c_s$ ) на данной траектории в некоторых частных случаях:

$$v_*^2 = \begin{cases} 2(\gamma - 1)U(\psi)/(\gamma + 1) & \text{при } W \gg \rho r^2 \kappa^2 \\ 2/3 U(\psi) & \text{при } W \ll \rho r^2 \kappa^2 \text{ или при } \gamma = 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Подробно исследовались [1, 2] потенциальные ( $U(\psi) \equiv \text{const}$ ,  $\kappa(\psi) \equiv \text{const}$ ) течения в случаях  $W \gg \rho r^2 \kappa^2$  (обычная газодинамика) и  $W \ll \ll \rho r^2 \kappa^2$  (сильное магнитное поле или «холодная» плазма). Показано, что критическая поверхность представляет собой плоскость, а учет малых слагаемых в уравнениях (1.1), (1.2) в случаях сильных или слабых (но конечных) магнитных полей [1, 2], учет производных по  $z$  и слабого отклонения от константы функции  $\kappa(\psi)$  [1] приводит к искажению формы критической поверхности, однако эти эффекты имеют характер малых поправок. Ниже исследуется вопрос о критических поверхностях в тех случаях, когда отклонение от потенциального потока не предполагается малым. Кроме того, рассматриваются некоторые особенности МГД-течений, не имеющие места в обычной газодинамике.

**2. Изомагнитные течения.** В [1] течения, для которых  $\kappa(\psi) \equiv \kappa_0 = \text{const}$ , названы изомагнитными. В этом случае уравнения (1.1), (1.2) имеют первый интеграл

$$W(\rho) + \rho r^2 \kappa_0^2 = C(z) \quad (2.1)$$

где  $C(z)$  — произвольная медленно меняющаяся функция. Учитывая интеграл Бернулли (1.2), можем написать

$$C(z) = U(\psi) - v^2/2 \quad (2.2)$$

Если на некоторой траектории известна скорость, то тем самым определена и функция  $C(z)$ . Будем считать, что известна скорость  $V(z)$  вдоль внутреннего электрода. Ускорительному режиму ( $V'(z) > 0$ ) соответствует убывающая функция  $C(z)$ . Из равенства (2.2) следует, что скорость возрастает или убывает одновременно на всех траекториях.

Соотношение (2.1) определяет неявную функцию  $\rho(r, C(z))$ . Подставляя ее в (1.2), получим

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{U(\psi) - C(z)}} = \sqrt{2} \int_{R_1(z)}^r \rho r dr \quad (2.3)$$

Функция  $\rho(r, C(z))$  в общем случае может быть найдена только путем численного решения уравнения (2.1). Однако возможны случаи, когда зависимость  $\rho(r, C(z))$  выражается явным образом. Это существенно упрощает задачу. Пусть в (2.3) верхними пределами интегрирования служат соответственно  $\psi_m$  и  $R_2(z)$ . Тогда левый интеграл есть функция от  $z$ , которая может быть выражена через функцию  $C(z)$ . Правый интеграл также является функцией от  $z$ ; ее можно представить в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от функции  $C(z)$ , а другой (обозначим его  $G(z)$ ) — только от функций  $R_1(z)$  и  $R_2(z)$ . Тем самым фактически решена задача о построении формы канала при заданной скорости на внутреннем электроде либо обратная задача о нахождении скорости вдоль внутреннего электрода в канале заданной

формы (обратная задача, вообще говоря, может не иметь решения, подробнее см. [1]).

Итак, в следующих частных случаях функция  $\rho(r, C(z))$  выражается явным образом:

$$W(\rho) \gg \rho r^2 \kappa_0^2, \quad \rho = \left( \frac{C(z)}{w_0} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad G(z) = \frac{R_2^2(z) - R_1^2(z)}{2w_0^{1/(\gamma-1)}} \quad (2.4)$$

$$W(\rho) \ll \rho r^2 \kappa_0^2, \quad \rho = \frac{C(z)}{\kappa_0^2 r^2}, \quad G(z) = \frac{1}{\kappa_0^2} \ln \frac{R_2(z)}{R_1(z)} \quad (2.5)$$

$$\gamma = 2, \quad \rho = \frac{C(z)}{w_0 + \kappa_0^2 r^2}, \quad G(z) = \frac{1}{2\kappa_0^2} \ln \frac{w_0 + \kappa_0^2 R_2^2(z)}{w_0 + \kappa_0^2 R_1^2(z)} \quad (2.6)$$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$v^2 = \alpha C(z) \quad (2.7)$$

где  $\alpha = \gamma - 1$  для газодинамического течения и  $\alpha = 1$  в других случаях. Отсюда следует, при учете формул (1.4), что в точке перехода через скорость звука на данной траектории выполнено равенство

$$C_* = 2U(\psi)/(\alpha + 2) \quad (2.8)$$

С другой стороны, из (2.2) следует:  $C(z) < \min_{\psi} U(\psi)$ . Поэтому течение на входе будет полностью дозвуковым при условии

$$U_{\max}/U_{\min} < (1 + \alpha/2) \quad (2.9)$$

Рассмотрим для простоты линейную зависимость

$$U(\psi) = U_0 + U_1 \psi/\psi_m, \quad U_1 > -U_0 \quad (2.10)$$

Из условия (2.9) следует ограничение на величину  $U_1$ :

$$-\alpha/(\alpha + 2) < U_1/U_0 < \alpha/2$$

Подставляя выражение (2.10) в (2.3) и интегрируя по всему сечению получим

$$F(C(z)) = (U_1/\sqrt{2})G(z)/\psi_m \quad (2.11)$$

где

$$F(C) = (\sqrt{U_0 + U_1 - C} - \sqrt{U_0 - C})/C^{1/\alpha}$$

а функция  $G(z)$  определена формулами (2.4)–(2.6). Экстремум функции  $F(C)$  достигается при

$$C_+ = 2 [2U_0 + U_1 - \sqrt{U_1^2 + \alpha^2 U_0 (U_0 + U_1)}] / (4 - \alpha^2)$$

( $\alpha < 2$ ) и при условии непрерывного ускорения ( $C'(z) < 0$ ) соответствует точке минимума функции  $G(z)$ . Можно убедиться, что

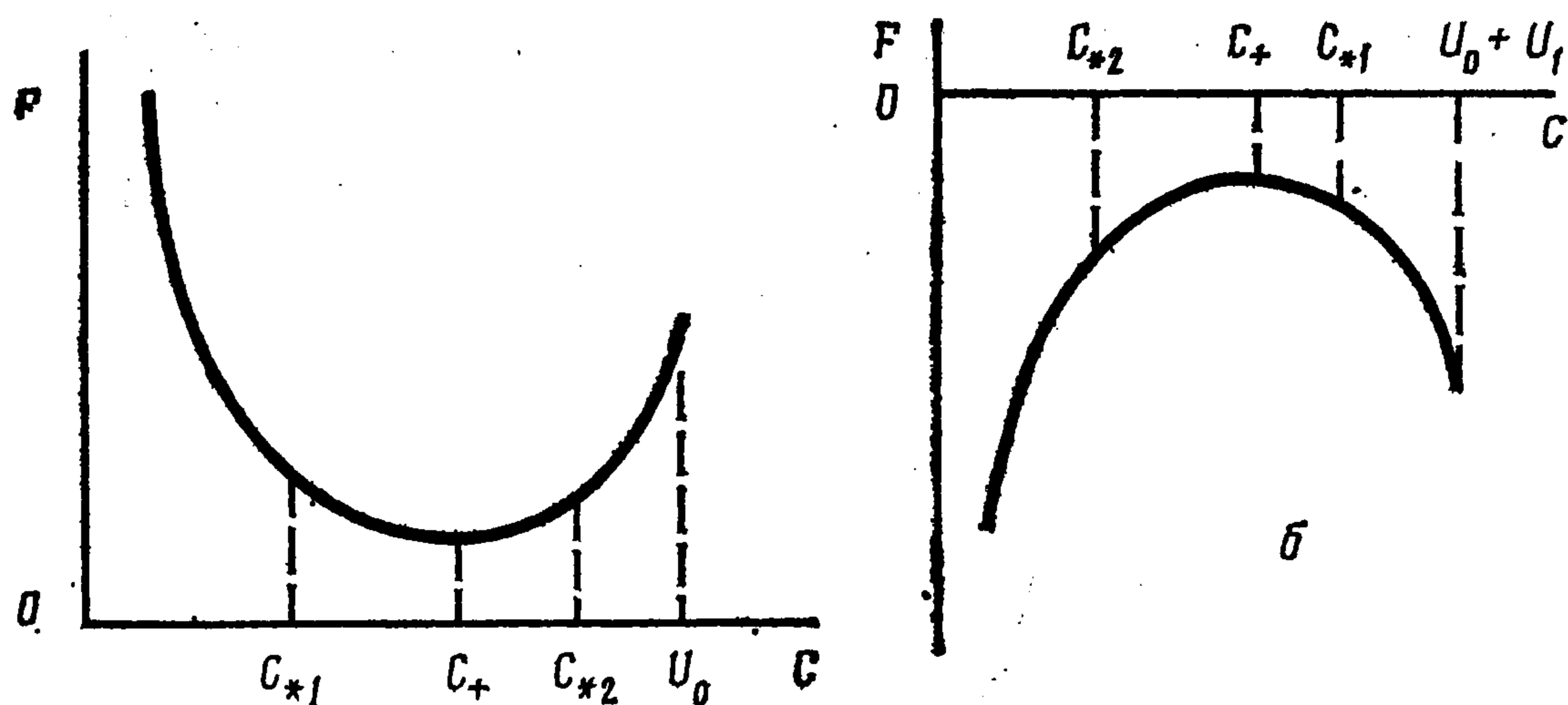
$$C_{*1} < C_+ < C_{*2} \text{ при } U_1 > 0; \quad C_{*2} < C_+ < C_{*1} \text{ при } U_1 < 0 \quad (2.12)$$

где  $C_{*1}$  и  $C_{*2}$  соответствуют точкам перехода через скорость звука на внутреннем и внешнем электродах и определяются согласно равенству (2.8)

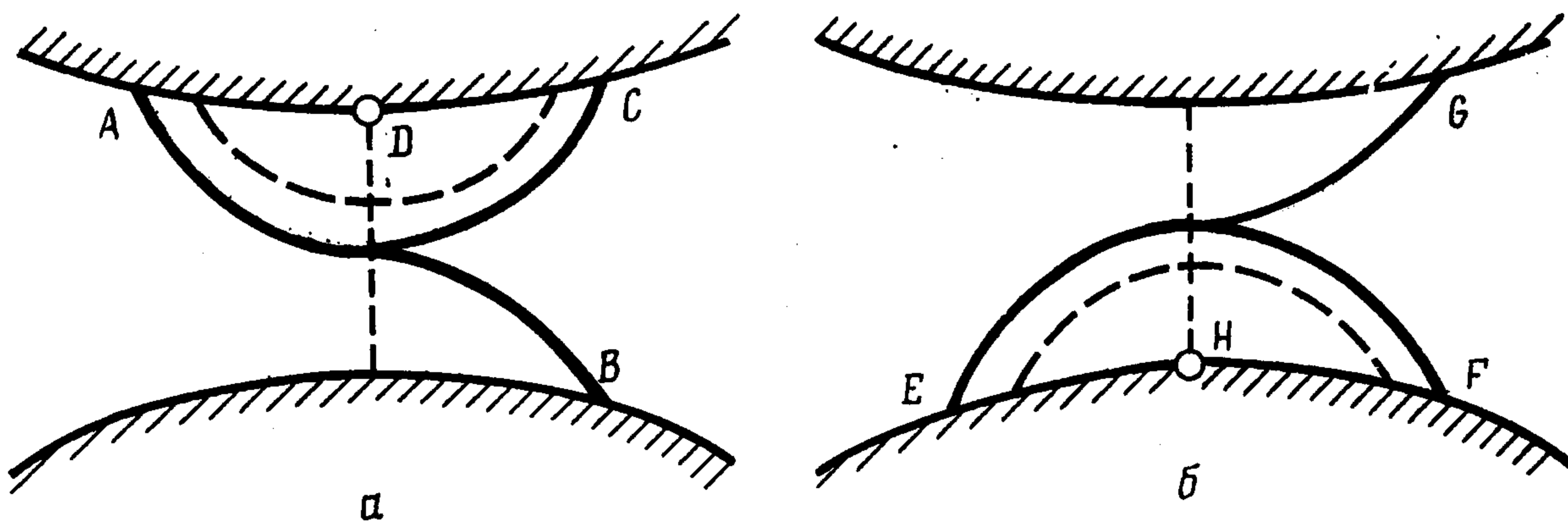
$$C_{*1} = 2U_0/(\alpha + 2), \quad C_{*2} = 2(U_0 + U_1)/(\alpha + 2)$$

Неравенства (2.12) означают, что неравномерность распределения  $U(\psi)$  приводит к искривлению критической поверхности. Графики зависимости  $F(C)$  приведены на фиг. 1.

Рассмотрим случай  $U_1 > 0$  (фиг. 1, а). Непрерывное ускорение соответствует переходу с восходящей ветви кривой  $F(C)$  на нисходящую. При этом звуковая линия (пересечение критической поверхности с плоскостью продольного сечения канала) имеет вид кривой  $AB$  (фиг. 2, а).



Фиг. 1



Фиг. 2

Если  $C$  уменьшается до  $C_+$ , но перехода на другую ветвь не происходит, звуковая линия имеет вид кривой  $AC$ . При увеличении минимального значения  $C$  от  $C_+$  до  $C_{*2}$  звуковая линия стягивается в точку  $D$ .

В случае  $U_1 < 0$  (фиг. 1, б), аналогично предыдущему, непрерывное ускорение соответствует переходу с нисходящей ветви кривой  $F(C)$  на восходящую, и звуковая линия имеет вид кривой  $EG$  (рис. 2, б). Если переход на другую ветвь кривой не происходит, то звуковая линия имеет вид кривой  $EF$  при минимальном значении  $C = C_+$ . Увеличение минимального значения  $C$  до  $C_{*1}$  приводит к стягиванию звуковой линии в точку  $H$ .

Отметим следующее: строгость неравенств (2.12) означает, что кривые  $AC$  и  $EF$  не могут коснуться соответственно внутреннего и внешнего электродов.

Эти рассуждения имеют прямой смысл, если задана форма электрода  $R_1(z)$  и скорость  $V(z)$  на нем (т. е.  $C(z)$ ). В этом случае равенство (2.11) означает, что функция  $R_2(z)$  явным образом выражается через функции  $R_1(z)$ ,  $V(z)$  и параметры  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $\kappa_0$ ,  $\psi_m$  (т. е. массовый расход). Если же известна геометрия обоих электродов, а также параметр замороженности  $\kappa_0$  и распределение  $U(\psi)$ , то соотношение (2.11) определяет неявную функцию  $C(z, \psi_m)$ . Очевидно, величина  $\psi_m$  не может быть произвольной, ее максимальное значение

$$\psi_+ = D/F(C_+), \quad D = (U_1/\sqrt{2}) \min_z G(z) \quad (2.13)$$

При этом значении  $\psi_m$  функция  $C(z)$  в точке минимума функции  $G(z)$  достигает величины  $C_+$ . Поэтому (2.13) — необходимое условие трансзвукового перехода на каждой траектории. Далее, при  $\psi_- < \psi_m < \psi_+$ , где

$$\psi_- = D/F(C_-), \quad C_- = \max(C_{*1}, C_{*2})$$

в канале существует область сверхзвукового течения, привязанная к одному из электродов (в зависимости от знака  $U_1$ ). При  $\psi_m < \psi_-$  течение в канале полностью дозвуковое.

Уравнения критических поверхностей  $r_*(z)$  в рассматриваемых случаях могут быть выписаны явно. Подставляя выражение (2.10) в (1.1), проинтегрируем:

$$v = V(z) + \frac{U_1}{\psi_m} \int_{R_1(z)}^r \rho r dr \quad (2.14)$$

Отметим, что направления роста функции  $U(\psi)$  и распределения  $v$  в поперечном сечении совпадают. Подставим в (2.14) выражения для плотности из (2.4) — (2.6) и проинтегрируем. Затем полученные зависимости  $v(r, z)$  подставим в (2.7) и найдем уравнения критических поверхностей:

$$r_*^2(z) = \begin{cases} R_1^2(z) + w_0^{1/(\gamma-1)} Q(z), & W \gg \rho r^2 \kappa_0^2 \\ R_1^2(z) \exp[\kappa_0^2 Q(z)], & W \ll \rho r^2 \kappa_0^2 \\ [w_0/\kappa_0^2 + R_1^2(z)] \exp[\kappa_0^2 Q(z)] - w_0/\kappa_0^2, & \gamma = 2 \end{cases}$$

$$Q(z) = \frac{2\psi_m}{U_1} \frac{\sqrt{\alpha C(z)} - \sqrt{2(U_0 - C(z))}}{C^{1/\alpha}(z)}$$

Образование ограниченных областей сверхзвукового течения в дозвуковом потоке наблюдалось при расчетах двумерных газодинамических течений в соплах [3].

**3. Течения в сильном магнитном поле.** Рассмотрим течения плазмы, в которых  $W \ll \rho r^2 \kappa^2$ . В этом случае уравнения (1.1), (1.2) имеют первый интеграл [1]

$$\rho r^2 \kappa(\psi) = C(z) \quad (3.1)$$

где  $C(z)$  — произвольная медленно меняющаяся функция. Из интеграла Бернулли (1.2) получаем:

$$C(z) = [U(\psi) - v^2/2]/\kappa(\psi) \quad (3.2)$$

Как и раньше, определим функцию  $C(z)$ , задавая скорость  $V(z)$  вдоль внутреннего электрода. Ускорительному режиму ( $V'(z) > 0$ ) соответствует убывающая функция  $C(z)$ . Из (3.2) следует, что ускорение или торможение происходит одновременно на всех траекториях.

Уравнение (1.3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$v^2 = \kappa(\psi) C(z)$$

Отсюда, учитывая формулу для критической скорости (1.4), получаем

$$C_* = \frac{2}{3} U(\psi)/\kappa(\psi) \quad (3.3)$$

С другой стороны, из (3.2) следует, что  $C(z) < \min_{\psi} \{U(\psi)/\kappa(\psi)\}$ . Поэтому течение на входе будет полностью дозвуковым при условии

$$\max_{\psi} \{U(\psi)/\kappa(\psi)\} / \min_{\psi} \{U(\psi)/\kappa(\psi)\} < \frac{3}{2} \quad (3.4)$$

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (1.2), находим

$$\int_0^{\psi} \frac{\kappa(\psi) d\psi}{\sqrt{U(\psi) - \kappa(\psi) C(z)}} = \sqrt{2} C(z) \ln \frac{r}{R_1(z)} \quad (3.5)$$

Положим для простоты

$$U(\psi) \equiv U_0, \quad \kappa(\psi) = \kappa_0 \exp(a\psi/\psi_m) \quad (3.6)$$

Условие (3.4) принимает вид

$$\ln^{2/3} < a < \ln^{3/2}$$

Подставляя зависимости (3.6) в выражение (3.5) и интегрируя по всему сечению, получим

$$F(C(z)) = \frac{a}{\sqrt{2} \psi_m} \ln \frac{R_2(z)}{R_1(z)}$$

где

$$F(C) = (\sqrt{U_0 - b\kappa_0 C} - \sqrt{U_0 - \kappa_0 C})/C^2, \quad b = \exp a$$

Графики функций  $F(C)$  аналогичны приведенным на фиг. 2, а, б, ее экстремум достигается при

$$C_+ = \frac{U_0(b+1)}{2b} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{32b}{9(b+1)^2}} \right]$$

и при условии непрерывного ускорения ( $C'(z) < 0$ ) соответствует точке минимума функции  $R_2(z)/R_1(z)$ . Исследование показывает, что

$$C_{*2} < C_+ < C_{*1} \text{ при } a > 0; \quad C_{*1} < C_+ < C_{*2} \text{ при } a < 0, \quad (3.7)$$

где  $C_{*1}$  и  $C_{*2}$  соответствуют точкам перехода через скорость звука на внутреннем и внешнем электродах. Согласно (3.3) они определяются выражениями

$$C_{*1} = {}^{2/3}U_0/\kappa_0, \quad C_{*2} = {}^{2/3}U_0/(b\kappa_0)$$

Неравенства (3.7) означают, что критические поверхности искривляются.

Анализ случаев  $a > 0$  и  $a < 0$  полностью аналогичен проведенному выше анализу изомагнитных течений. Возрастающей зависимости  $\kappa(\psi)$  соответствует фиг. 2, б, убывающей — фиг. 2, а. Отметим, что при фиксированной геометрии канала необходимым условием трансзвукового перехода на каждой траектории является  $\psi_m = \psi_+$ , где

$$\psi_+ = D/F(C_+), \quad D = \frac{a}{\sqrt{2}} \ln \left[ \min_z \left\{ \frac{R_2(z)}{R_1(z)} \right\} \right]$$

При  $\psi_- < \psi_m < \psi_+$ , где

$$\psi_- = D/F(C_-), \quad C_- = \max(C_{*1}, C_{*2})$$

в канале существует область сверхзвукового течения, привязанная к внешнему электроду в случае  $a < 0$  и к внутреннему в случае  $a > 0$ . При  $\psi_m < \psi_-$  течение в канале полностью дозвуковое. При  $\psi_m > \psi_+$  стационарное течение, описываемое уравнениями (1.1), (1.2), невозможно.

Получим выражение для скорости  $v$ . Для этого выражение (3.6) подставим в (1.1) и учтем соотношение (3.1). Тогда

$$v = V(z) - \frac{aC^2(z)}{\psi_m} \ln \frac{r}{R_1(z)}$$

Отметим, что направления роста функции  $\kappa(\psi)$  и распределения  $v$  в поперечном сечении канала противоположны.

**4. Некоторые особенности плазменных течений.** Течения плазмы в каналах обладают некоторыми особенностями, которые можно проследить уже на примере потенциального потока. Напомним, что в этом случае, согласно (1.1),  $z$  — компонента скорости зависит только от  $z$ :  $v = V(z)$ . В тех частных случаях, когда функция  $\rho(r, z)$  выражается явным образом, интегрирование равенства (2.3) по всему сечению дает

$$\psi_m = Q(V(z))G(z), \quad Q(V) = V(U_0 - V^2/2) \quad (4.1)$$

( $G$  и  $\rho$  определяются формулами (2.5), (2.6)).

1°. Из выражения (4.1) следует, что критическая скорость  $V_* := \sqrt{2U_0/3}$  достигается в сечении, где  $G(z) = \min$ . Рассмотрим случай  $\gamma = 2$ . Учитывая, что  $\kappa_0 = H_0/(V\sqrt{4\pi\rho_0 r_0})$ ,  $w_0 = 2p_0/\rho_0$ , где все величины с нулевым индексом отнесены к некоторой точке входного сечения, представим  $G(z)$  в виде

$$G(z) = \frac{1}{2\kappa_0^2} \ln \frac{\beta_0 + R_2^2(z)/r_0^2}{\beta_0 + R_1^2(z)/r_0^2}, \quad \beta_0 = \frac{8\pi p_0}{H_0^2} \quad (4.2)$$

Точка  $z_*$ , соответствующая минимуму функции  $G(z)$ , определяется из уравнения  $G'(z) = 0$ . Если  $z_1$  и  $z_2$  — точки экстремумов функций  $R_1(z)$  и  $R_2(z)$  — не совпадают, то это уравнение определяет неявную зависимость  $z_*(\beta_0)$ . Другими словами, положение критической поверхности (в данном случае — плоскости) зависит не только от геометрии канала, но и от входного параметра  $\beta_0$ . Интервал, в котором может изменяться значение  $z_*$ , ограничен величинами  $z_1$  и  $z_2$ . В газодинамическом течении  $z_*$  всегда совпадает с точкой минимума функции  $R_2^2(z) - R_1^2(z)$  независимо от того, совпадают  $z_1$  и  $z_2$  или различны.

2°. Было показано [1], что в МГД-течении возможны режимы с аномальным поведением плотности, когда направления роста скорости и плотности вдоль траектории совпадают. В газодинамическом течении они всегда противоположны. Рассмотрим для определенности ускорительный режим. Положим для простоты  $R_1(z) \equiv R = \text{const}$ . Подставляя в формулу

$$v\nabla\rho = V(z) \frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\rho}{\partial r}$$

выражения (2.5), (2.6), можно найти область аномального ускорения ( $v\nabla\rho > 0$ ) при заданной функции  $V(z)$ . Она содержится в дозвуковом течении и определяется условиями

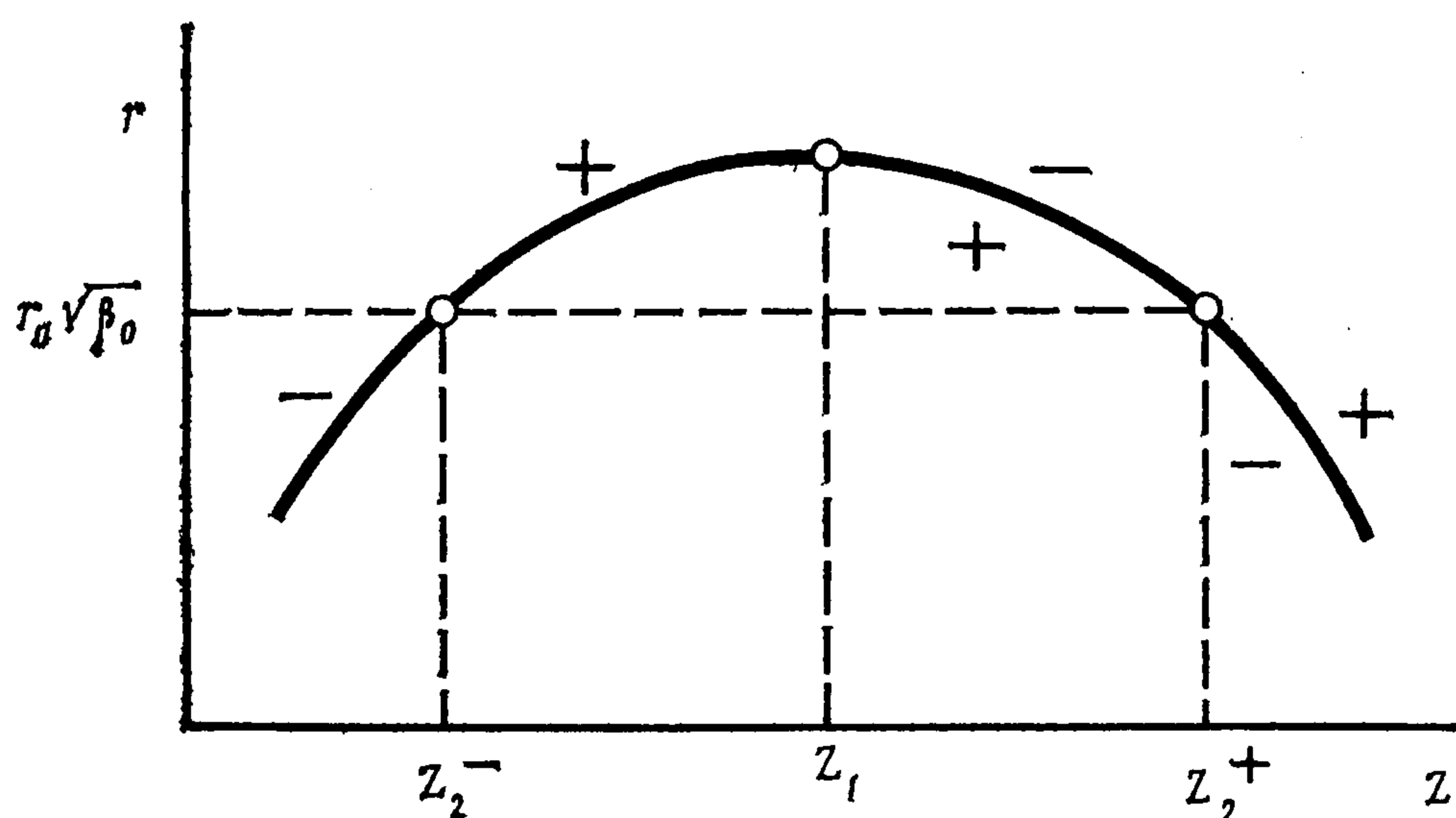
$$r^2 > \begin{cases} R^2 P(z), & W \ll \rho r^2 \kappa_0^2 \\ ((\beta_0 r_0^2 + R^2) P(z) - \beta_0 r_0^2), & \gamma = 2 \end{cases}$$

$$P(z) = \exp\{V^2(z)/[U_0 - 3/2 V^2(z)]\}$$

Для течения в канале фиксированной геометрии получим условие нормального ускорения. Требование  $v\nabla\rho < 0$  означает

$$V^2(z) > 2U_0\kappa_0^2 G(z)/[1 + 3\kappa_0^2 G(z)] \quad (4.3)$$

Так как функция  $V(z)$  возрастающая, а  $G(z)$  при  $z < z_*$  убывающая, то для нормального ускорения всюду в канале достаточно, чтобы условие (4.3) выполнялось во



Фиг. 3

входном сечении  $z = 0$ . Окончательно представим достаточные условия нормального ускорения в виде

$$A_0^2 > \begin{cases} (1+g)/g, & W \ll \rho r^2 \kappa_0^2 \\ (1+g)/[(1+\beta_0)g], & \gamma = 2 \end{cases}$$

где  $A_0$  — входное значение числа Альфвена. В первом случае оно берется в произвольной точке входного сечения, во втором — в той же точке, что и  $\beta_0$ . В этих формулах  $g = 2\kappa_0^2 G(0)$ .

3°. Для случая  $\gamma = 2$  рассмотрим течение в узком кольцевом зазоре постоянного размера:  $R_2(z) - R_1(z) = h_0 \ll \min_z R_1(z)$ . При этом условии функция  $G(z)$ , опре-

деленная выражением (4.2), принимает вид

$$G(z) = (h_0/\kappa_0^2)R_1(z)/[\beta_0 r_0^2 + R_1^2(z)], \quad r_0 = R_1(0)$$

и функция  $Q(z)$  из (4.1) имеет экстремумы в точках  $z_1$  и  $z_2$ :  $R_1'(z_1) = 0$ ,  $R_1(z_2) = r_0\sqrt{\beta_0}$ . Пусть для определенности  $R_1(z)$  имеет вид, изображенный на фиг. 3. Если на вход такого кольцевого зазора подается дозвуковой поток,  $V(0) < \sqrt{2U_0/3}$ , то он будет ускоряться при  $\beta_0 < 1$ , а при  $\beta_0 > 1$  тормозиться на участке  $z < z_2$  и ускоряться на участке  $z_2 < z < z_1$ . В точке  $z_1$  возможен переход через скорость звука. На фиг. 3 указаны знаки производной скорости на разных участках кривой  $R_1(z)$ , знаки под кривой соответствуют трансзвуковому потоку. В точках  $z_2^-$  и  $z_2^+$  скорость имеет локальные экстремумы. Таким образом, в отличие от произвольного «плавного» течения, в котором  $0 < V(z) < \sqrt{2U_0}$  (как следует из интеграла Бернулли (1.2)), в узком зазоре постоянного размера скорость потока принимает значения из более узкого интервала, ограниченного положительными корнями уравнения

$$V(U_0 - V^2/2) = q$$

где  $q = 2\psi_m r_0 \kappa_0^2 \sqrt{\beta_0}/h_0$ , а величина  $\psi_m$  удовлетворяет условию трансзвукового перехода:  $\psi_m = (2U_0/3)^{3/2}/G_{\min}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3—87.
2. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
3. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию  
30.V.1990