Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 533.6.011 : 534

А. И. Рылов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается дозвуковое вихревое течение за отошедшей или присоединенной ударной волной (УВ), возникающей при сверхзвуковом плоском обтекании симметричных тел конечной толщины. Так же, как и в исходных работах [1, 2], основные доказательства опираются на анализ линий постоянного давления (изобар) в дозвуковой области между телом, УВ и звуковой линией (ЗЛ), соединяющей тело с УВ.

В разд. 1 доказывается невозможность некоторых схем плоского вихревого течения, в частности с местными сверхзвуковыми зонами.

В разд. 2 исследуется взаимосвязь между дозвуковыми участками тела и УВ. Доказывается, что при неотрицательных углах наклона стенки углы наклона вектора скорости за УВ также неотрицательны, углы наклона УВ не превосходят $\pi / 2$, а в случае отошедшей УВ вдоль отрезка оси симметрии между УВ и телом давление монотонно возрастает. Если стенка тела невогнута или углы наклона стенки превосходят предельный угол для ударной поляры, то дозвуковой участок УВ невогнут, при этом вдоль него давление монотонно убывает.

В разд. 3 рассматривается обтекание конечного клина с изломом образующей. Доказывается, что ЗЛ, соединяющая тело с УВ, выходит из точки излома образующей, а также то, что вдоль стенки клина давление монотонно убывает.

1. Рассмотрим плоское вихревое течение идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с показателем адиабаты $\varkappa$, описываемое уравнениями

$$\rho q^2 \theta_L = -p_N, \quad \rho q^2 \theta_N = -p_L (M^2 - 1) \tag{1.1}$$

где p и ρ — давление и плотность, q и θ — модуль и угол наклона вектора скорости, M — число Маха, θ_L, p_L, θ_N, p_N — производные, вычисляемые вдоль линии тока и по нормали к ней.

Следствием (1.1) является выражение для производной θ_l, вычисленной вдоль изобары [1]

$$\theta_l = -p_n (1 - M^2 \sin^2 \beta)/(\rho q^2) \tag{1.2}$$

где p_n — производная, вычисленная по нормали к изобаре, β — угол между изобарой и вектором скорости.

При $M \leqslant 1$ выражение в скобках неотрицательно, что и делает соотношение (1.2) полезным при изучении дозвуковых течений.

Учитывая возможность точек ветвления в дозвуковых течениях [3], далее под изобарой будет пониматься линия постоянного давления, которая является также границей выбранной области повышенного или пониженного давления. В этом случае вдоль изобары знак p_n не меняется и равенство $p_n = 0$ возможно лишь в указанных изолированных точках ветвления. Используя лишь непрерывность давления при $M \leqslant 1$, можно показать, что определенная таким образом изобара не может оборваться внутри области дозвукового течения. Действительно, пусть в некоторой внутренней точке z рвется линия $p = \mathrm{const}$ или меняется знак p_n. Тогда анализ изменения давления вдоль окружности достаточно малого радиуса с центром в точке z приводит к противоречию.

Из соотношения (1.2) следует, что значение угла θ монотонно меняется вдоль изобары, в каждой точке которой $M \leqslant 1$ [1].

Данный факт указывает на следующие свойства дозвуковых течений, которые будут использованы в дальнейшем.

Плоские вихревые течения не могут содержать следующие виды изобар, в каждой точке которых $M \leqslant 1$.

1°. Замкнутые изобары, исключая течения с замкнутыми линиями тока или с внутренними точками торможения [1, 4].

2°. Отрезки изобар, начинающиеся и заканчивающиеся на дозвуковом участке УВ [1]. Исключением является окрестность точки, в которой УВ перпендикулярна набегающему потоку при условии, что в этой точке УВ обращена выпуклостью в сторону дозвукового потока за УВ [2].

3°. Отрезки изобар с концевыми точками на прямой стенке, исключая течения с точкой торможения на стенке между этими концевыми точками.

При исследовании дозвуковых течений при помощи изобар существенную роль играет предположение об отсутствии местных сверхзвуковых зон в рассматриваемой области [1, 2]. Как оказывается, отмеченные выше свойства дозвуковых течений дают дополнительные обоснования этому предположению.

В вихревых течениях, достаточно близких к безвихревым, когда энтропия и полная энтальпия близки к константам, изобары достаточно близки к линиям $M = \text{const}$. Поэтому можно утверждать, что в таких течениях не может быть местных сверхзвуковых зон, ограниченных замкнутыми ЗЛ, либо ЗЛ в сочетании с прямой стенкой или УВ.

Действительно, в противном случае существуют близкие к ЗЛ изобары, замкнутые либо выходящие на прямую стенку или УВ, в каждой точке которых $M \leqslant 1$. Но это противоречит рассмотренным выше свойствам дозвуковых течений.

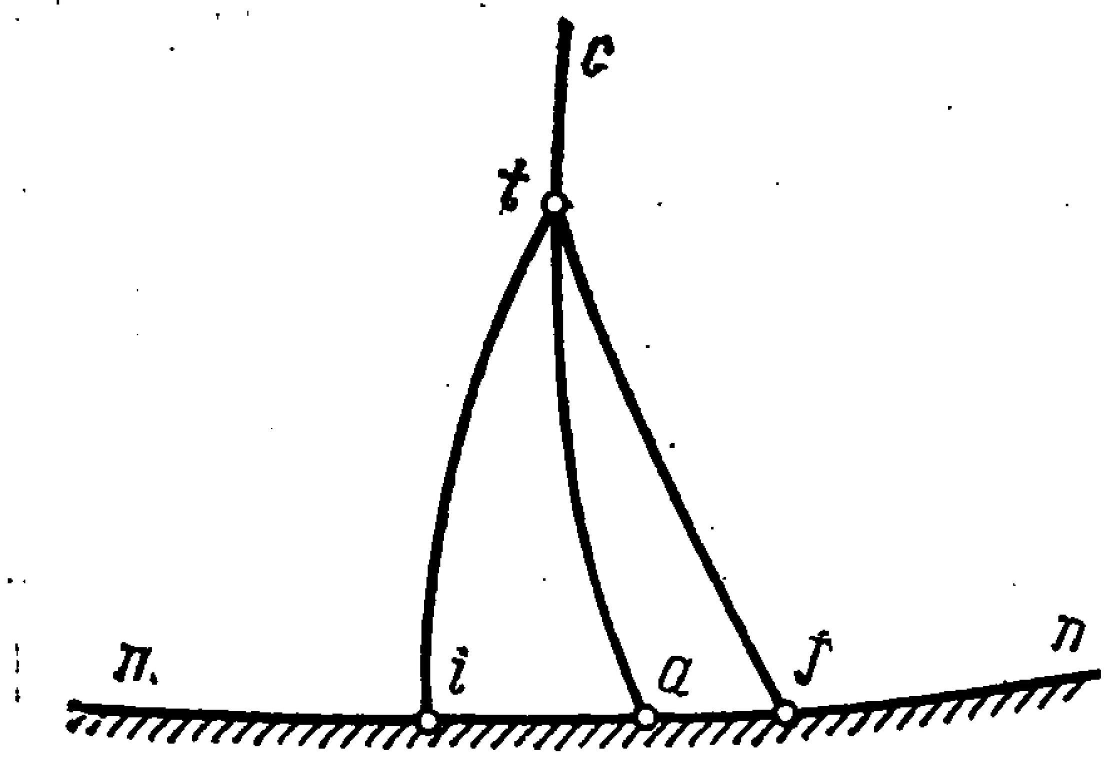
Следующий результат также касается невозможности местных сверхзвуковых зон, но при его формулировке уже не предполагается, что течение близко к безвихревому.

Теорема 1. Рассматривается непрерывное плоское вихревое течение в окрестности невыпуклой стенки mn (фиг. 1), вдоль которой угол θ не убывает. На ЗЛ ac слева набегает дозвуковой поток, справа от ac реализуется сверхзвуковое течение. Каждая линия тока пересекает ac лишь один раз, т. е. вдоль ac функция тока ψ не убывает. И наконец полное давление $p_0(\psi)$ является неубывающей функцией ψ. (Последнее условие выполнено, например, вблизи стенки симметричного тела, обтекаемого с образованием отошедшей УВ.)

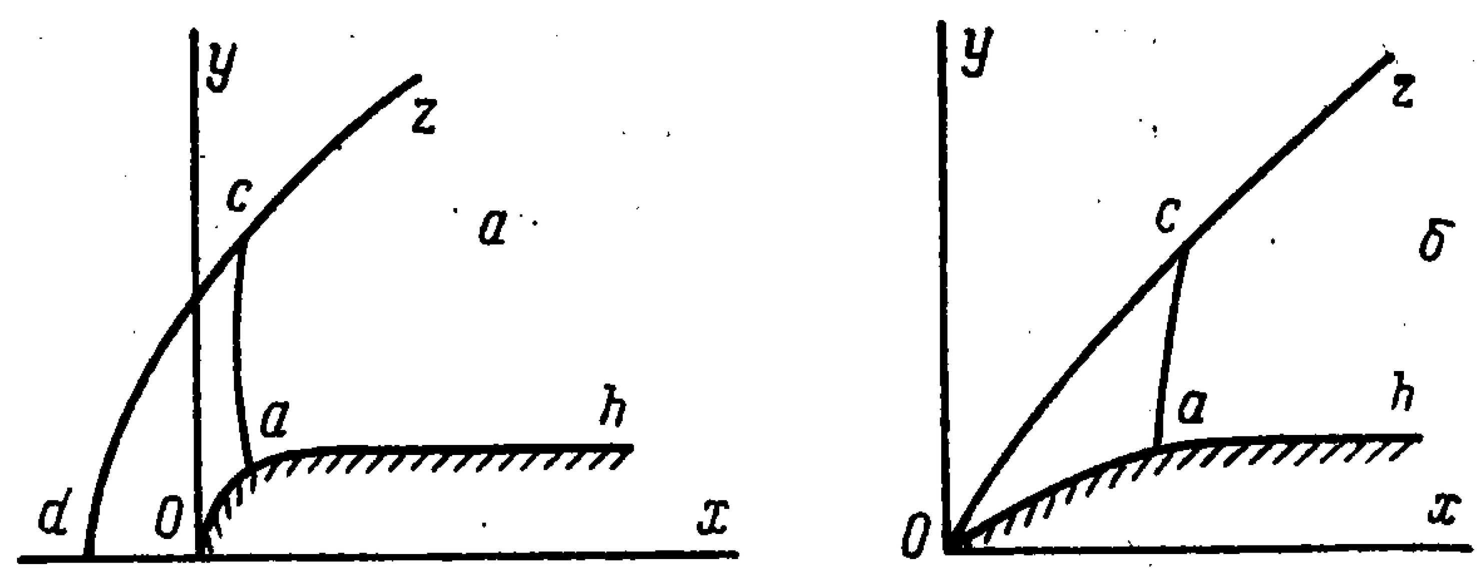
Утверждается, что на ЗЛ ac нельзя выбрать такую точку t, из которой выходили бы изобара ti и характеристика второго семейства tj, приходящие соответственно на дозвуковой и сверхзвуковой участки стенки mn (Для безвихревого течения данный факт известен [5].)

Доказательство. Допустим, что такая точка t существует. Тогда вдоль характеристики второго семейства tj выполнено следующее условие совместности:

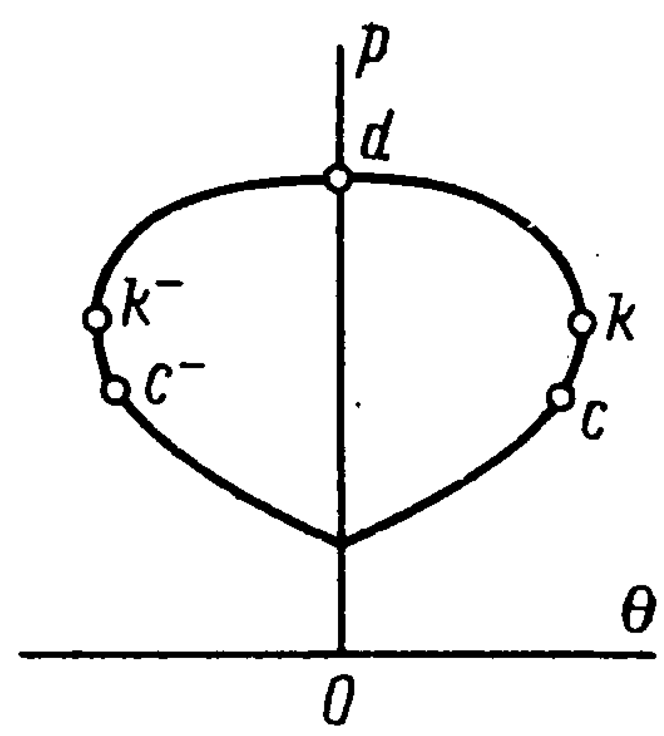
$$d\theta - \frac{dp}{p} g(M, \varkappa) = 0, \quad g(M, \varkappa) = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\varkappa M^2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Учитывая, что $p = p_0(\psi) f(M, \varkappa)$, где $f(M, \varkappa)$ — известная функция, имеем

$$d\theta - \left(\frac{df}{f} + \frac{dp_0}{p_0}\right) g(M, \varkappa) = 0$$

Интегрируя, получаем

$$\theta_j = \theta_t - h(M, \varkappa) - \int\limits_0^{\psi_t} \frac{g(M, \varkappa)}{p_0(\psi)} p_0'(\psi)\, d\psi$$

$$h(M, \varkappa) = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1}$$

Учитывая, что по условию теоремы производная $p_0'(\psi) \geqslant 0$, и то, что при $M > 1$ $h(M, \varkappa) > 0$, находим, что $\theta_j < \theta_t$, т. е. в точке j угол θ меньше, чем в точке t.

Рассмотрим теперь изобару ti. Из того, что вдоль ac давление не убывает, следует, что на ti нормальная производная $p_n \leqslant 0$. Следовательно, согласно (1.2) $\theta_i > \theta_t$.

В итоге имеем $\theta_j < \theta_t < \theta_i$. Но это противоречит условию теоремы, что и требовалось доказать.

Замечание. Применению теоремы 1 должно предшествовать, как и в разд. 3 данной работы, доказательство того, что исследуемая изобара, выходящая из точки ЗЛ, действительно приходит на рассматриваемый участок стенки. Отметим также, что в теореме 1 неприменимо соотношение, описывающее изменение θ вдоль ЗЛ [6]:

$$\theta_s = \frac{q_\tau}{q} \cos^2 \varphi - \frac{p_s \operatorname{ctg} \varphi}{\rho q^2}$$

где θ_s, p_s и q_τ — производные, вычисленные вдоль и по нормали к звуковой линии, φ — угол между звуковой линией и вектором скорости.

Действительно, из условий теоремы следует, что в окрестности стенки mn $\varphi \geqslant \pi/2$. Поэтому слагаемые в правой части имеют разные знаки.

2. Рассмотрим верхнюю половину плоского симметричного обтекания тела конечной толщины Oh (фиг. 2) сверхзвуковым равномерным горизонтальным потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного)

газа с показателем адиабаты $\varkappa$. Перед телом образуется либо отошедшая УВ dz (фиг. 2, *а*), либо присоединенная УВ Oz (фиг. 2, *б*). Дальнейшее рассмотрение будет ограничено предположением, что в областях $Odca$ и Oca, где ac — ЗЛ, реализуются дозвуковые течения без местных сверхзвуковых зон, а также без зон с замкнутыми линиями тока. Имеющиеся данные, в том числе и полученные в разд. 1, говорят о том, что для широкого класса достаточно гладких тел указанные предположения вполне правомерны.

Схема течения, приведенная на фиг. 2, *а*, реализуется для затупленных и для широкого класса заостренных тел. Течение на фиг. 2, *б*, реализуется гораздо реже. Некоторые результаты по этому вопросу приведены в [1, 2].

На УВ dz и Oz значения p и θ связаны ударной полярой, приведенной на фиг. 3. Поляра симметрична относительно оси $\theta = 0$. В точках c и c^- $M = 1$, выше (ниже) этих точек $M < 1$ ($M > 1$). И наконец на ударной поляре энтропия s убывает с уменьшением давления p.

При изучении дозвуковых течений $Odca$ и Oca (фиг. 2) в числе других возникает вопрос о том, при каких условиях участкам УВ dc и Oc соответствуют точки лишь правой половины ударной поляры. Этому вопросу посвящена следующая теорема.

Теорема 2. Пусть на дозвуковом участке тела наклон стенки неотрицателен, т. е. на Oa $\theta \geqslant 0$. Тогда справедливо следующее.

1°. На дозвуковых участках УВ dc и Oc $\theta \geqslant 0$ и, как следствие, в каждой точке dc и Oc наклон УВ не превосходит $\pi/2$.

2°. В случае отошедшей УВ вдоль отрезка оси симметрии dO давление монотонно растет.

Доказательство. Допустим противное. Пусть на dc или Oc есть точки, в которых $\theta < 0$. Тогда, учитывая непрерывность p в дозвуковых течениях и, как следствие, непрерывность p и θ вдоль dc и Oc, можем выбрать на dc или Oc такую точку t, в которой $\theta < 0$ и при смещении от которой вдоль dc или Oc возрастают θ и p. Следовательно на изобаре, выходящей из точки t в дозвуковую область, нормальная производная $p_n \geqslant 0$ и вдоль нее угол θ должен убывать. В итоге изобара не может выйти на тело, на ось симметрии и на УВ. Не может она выйти и на ЗЛ, так как на ЗЛ $p < p_c < p_t$ [2]. Данное неравенство следует из того, что по условию задачи на dc и Oc $M \leqslant 1$, в результате чего на dc и Oc, а значит, и на ЗЛ ac для полного давления справедливо условие $p_0(\psi) \leqslant p_0(\psi_c)$.

Полученное противоречие и доказывает первую часть теоремы.

Допустим теперь, что в некоторых точках отрезка dO возможен разгон потока. Тогда можем выбрать такую точку t, в которой $p > p_c$, $p_x < 0$. На изобаре, выходящей из этой точки, $p_n \geqslant 0$, и, следовательно, вдоль изобары θ убывает, в результате чего изобара не может выйти на УВ, на ось симметрии и на стенку тела. На ЗЛ изобара не может выйти, так как на изобаре $p > p_c$. Тем самым доказана и вторая часть теоремы.

Замечание. В доказательстве теоремы использовались изобары, на которых $p > p_c$ Поэтому достаточно, чтобы неравенство $\theta \geqslant 0$, входящее в условие теоремы, было выполнено лишь левее изобары ca^*, соединяющей точку c со стенкой. Анализ изобары ca^* показывает, что в точке a^* имеем $M < 1$, $\theta > \theta_c > 0$. В частности, для невогнутых тел, у которых при смещении вправо вдоль стенки угол θ не может возрастать, левее точки a^* имеем $\theta > \theta_c > 0$. Иными словами, для таких тел теорема выполнена автоматиче-

51

ски. Отметим также, что при обтекании невогнутых тел присоединенная УВ с дозвуковым течением за ней, согласно [1, 2] возможна лишь для узкого диапазона значений θ_0 угла заострения: $\theta_c < \theta_0 < \theta_k$, где θ_k — предельный угол ударной поляры.

Для невогнутых тел справедлива следующая теорема.

Теорема 3. При обтекании невогнутых тел давление p не может возрастать вдоль дозвуковых участков dc и Oc УВ и, как следствие, вдоль этих участков наклон УВ также не возрастает. Иными словами, участки dc и Oc являются невогнутыми, как и обтекаемые тела.

Доказательство. Напомним, что теорема 2 справедлива для рассматриваемых тел, т. е. на dc и Oc $\theta \geqslant 0$ и вдоль dO давление не убывает. Допустим теперь, что на dc или Oc возможно возрастание давления. Из этого, а также из предположения, что $M < 1$ на dc и Oc, следует, что на dc или Oc существует по крайней мере одна точка t локального максимума давления.

Выберем в окрестности этой точки две точки t^+ и t^- с равными значениями p и θ, но с разными знаками производных p_n и θ_l на изобарах, выходящих из этих точек. На изобаре, выходящей из точки t^+ (она расположена ближе к звуковой линии) $p_n \leqslant 0$, $\theta_l \geqslant 0$. На изобаре, выходящей из точки t^-, имеем $p_n \geqslant 0$, $\theta_l \leqslant 0$. Ни одна из этих изобар не может выйти на УВ и на отрезок dO оси симметрии (следствие теоремы 2), а также и на ЗЛ [2]. Следовательно, они должны выйти на тело в точках z^+ и z^- соответственно. Отсюда находим, что в точке z^+ угол θ больше, чем в точке z^-. Но на невогнутой стенке это исключено, так как точка z^+ расположена правее точки z^-. Данное противоречие и доказывает теорему.

Как оказывается, невогнутость дозвукового участка УВ может быть доказана и при других условиях на геометрию тела. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если в каждой точке тела левее изобары ca^*, выходящей из звуковой точки УВ, выполнено условие $\theta \geqslant \theta_k$, то вдоль дозвукового участка УВ давление не возрастает и, как следствие, этот участок УВ — невогнут.

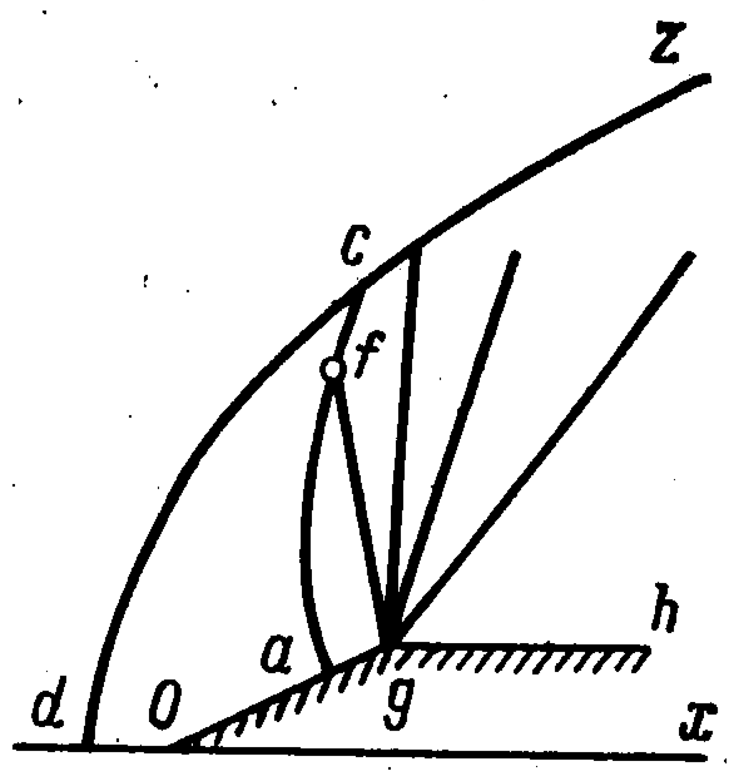
Доказательство непосредственно следует из анализа изобар, выходящих из точек дозвукового участка УВ, в которых, по предположению, давление возрастает. Примером может служить точка t^- из доказательства теоремы 3.

В частности, теореме 4 отвечают тела с головными частями, возможно и вогнутыми, вдоль которых $\theta \geqslant \theta_k$, сопрягающимися через угловую точку с горизонтальной стенкой.

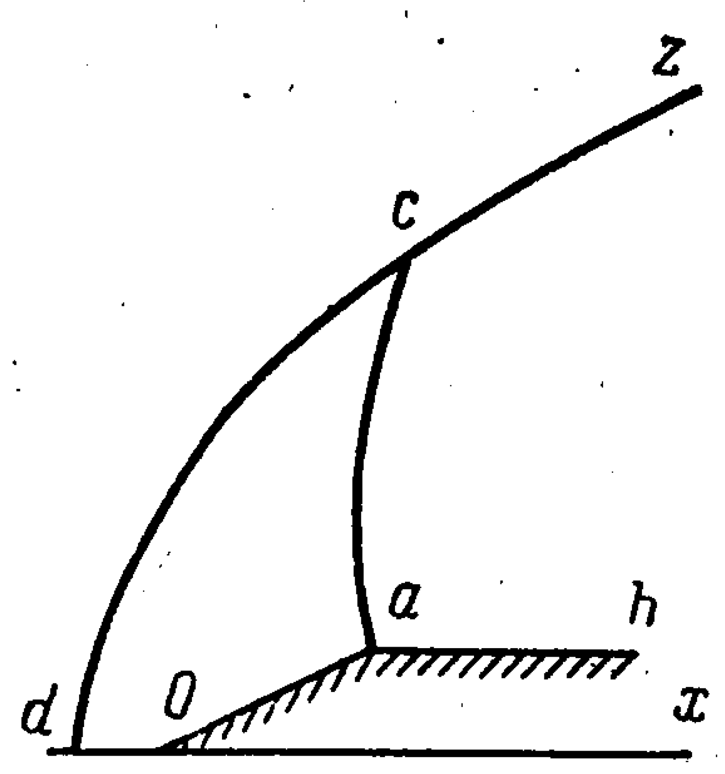
Для политропных газов θ_k лишь незначительно превосходит θ_c. Поэтому можно считать, что большинство тел, удовлетворяющих теореме 3, удовлетворяют и теореме 4, но не наоборот.

Замечание. Ранее форма УВ, возникающей при обтекании выпуклых тел, изучалась в [7]. Для ограниченных значений чисел Маха M_∞ набегающего потока был сделан вывод о выпуклости примыкающего к оси симметрии участка УВ, на котором $M < M^*(M_\infty) < 1$. Так, например [7], при $\varkappa = 1{,}4$ значениям $M_\infty = 1{,}5$; $1{,}8$; $2{,}1$ отвечают соответственно значения $M^* \simeq 0{,}97$; $0{,}88$; $0{,}60$. В то же время в предлагаемой работе все результаты справедливы для любых сверхзвуковых значений M_∞ и выполнены (теоремы 2—4) на всем дозвуковом участке УВ.

3. Рассмотрим обтекание клина Ogh конечной толщины с изломом образующей в точке g (фиг. 4). Здесь приведена отошедшая УВ dz, отве-



Фиг. 4



Фиг. 5

чающая углу заострения $\theta_0 > \theta_k$. Но результаты данного раздела относятся и к узкому диапазону значений θ_0, $\theta_c \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_k$, когда реализуется присоединенная УВ, отвечающая слабому дозвуковому решению.

Итак, в некоторой области между клином и УВ реализуется дозвуковое течение. Возникает естественный вопрос о положении ЗЛ, соединяющей тело с УВ.

Как известно, обтекание выпуклой угловой точки, аналогичной точке g на фиг. 4, возможно лишь с образованием в окрестности точки сверхзвукового течения с локальной центрированной волной разрежения. Следовательно, при подходе вдоль стенки к угловой точке число Маха достигает значения $M_g \geqslant 1$. Иными словами, при $M_g = 1$ ЗЛ выходит из угловой точки, а при $M_g > 1$ ее начальная точка расположена левее.

В ряде задач для безвихревых течений, например в задаче об истечении струи из сосуда с прямолинейными стенками, показано, что ЗЛ соединяет концевые точки этих стенок [8—10]. Данные точки являются угловыми для граничных линий тока.

Также отметим, что соображения о положении ЗЛ при обтекании клина с изломом образующей, приведенные в [9], справедливы лишь в безвихревом приближении, на что и было указано редакторами перевода. Поэтому решение вопроса о положении ЗЛ в случае вихревого течения, имеющего место за криволинейной УВ, представляет определенный интерес. Ему и посвящена следующая теорема.

Теорема 5. Предположим, как и в разд. 2, что дозвуковое течение между стенкой клина, УВ и замыкающей ЗЛ не содержит местных сверхзвуковых зон и областей с замкнутыми линиями тока. Также предположим, что вдоль указанной ЗЛ функция тока меняется монотонно, т. е. каждая из линий тока может пересекать ЗЛ лишь один раз.

Утверждается, что ЗЛ, к которой справа примыкает непрерывное сверхзвуковое течение, не может начинаться левее точки излома контура.

Доказательство. Исходя из соображений размерности необходимо сразу исключить из рассмотрения ЗЛ, которые не попадают в область влияния веера разрежения с фокусировкой характеристик первого семейства в точке g. Поэтому рассмотрим течение с ЗЛ, начинающейся левее точки g, на которую в точке f выходит начальная характеристика веера с центром в точке g, фиг. 4.

Клин является невогнутым телом. Поэтому к нему применимы теоремы 2 и 3, откуда следует неубывание давления вдоль dO и невозрастание вдоль dc. Из последнего также следует неубывание полного давления $p_0(\psi)$ вдоль dc. Учитывая предположение о неубывании ψ вдоль ac, получаем, что вдоль ЗЛ ac давление p также не убывает.

Из сказанного выше следует, что изобары, выходящие из точек ac в дозвуковую область, могут достичь только отрезка Oa стенки клина. С другой стороны, характеристики второго семейства, выходящие из точек отрезка ag, выходят на ЗЛ. И наконец учитывая, что клин является также и невыпуклым телом, находим, что выполнены все условия теоремы 1, согласно которой рассмотренная схема течения невозможна. Следовательно, теорема доказана.

Итак, при обтекании клина с изломом образующей с дозвуковым течением за УВ и при выполнении условий теоремы 5 ЗЛ ac может выходить лишь из угловой точки a (фиг. 5).

В следующей теореме показывается монотонное изменение давления вдоль стенки клина.

Теорема 6. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда вдоль стенки клина от точки заострения до точки излома контура давление не возрастает.

Доказательство. Допустим противное. Тогда на стенке клина можно выбрать две точки с равными значениями p, но с разными знаками нормальных производных p_n на изобарах, выходящих из этих точек. Поэтому вдоль одной из изобар значение θ растет, вдоль другой убывает. Ни та, ни другая изобара не может выйти на прямую стенку Oa (фиг. 5). Но в то же время исключена ситуация, при которой обе изобары достигнут разных точек контура $Odca$ (фиг. 5).

Дело в том, что при обходе данного контура по часовой стрелке давление, как это следует из предыдущих теорем, не возрастает. Следовательно, на этом контуре нет двух точек с одинаковыми значениями давления. Полученное противоречие и доказывает теорему.

В заключение отметим, что полученные результаты, возможно, и не снимают окончательно вопрос о существовании дозвуковых течений между симметричным телом и УВ со свойствами, отличными от рассмотренных выше. Но эти результаты позволяют утверждать, что если такие течения и возможны, то лишь при невыполнении сделанных предположений. Иными словами, в этом случае в указанных дозвуковых течениях должны существовать либо местные сверхзвуковые зоны, либо области с замкнутыми линиями тока, либо замыкающие ЗЛ, вдоль которых имеет место немонотонное изменение функции тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А. А.* О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74—85.
2. *Рылов А. И.* О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающей потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95—99.
3. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
4. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
5. *Никольский А. А., Таганов Г. И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481—502.
6. *Шифрин Э. Г.* К прямой задаче плоского симметричного обтекания гладкого выпуклого профиля с отошедшей ударной волной // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172. № 3. С. 550—553.
7. *Шифрин Э. Г.* О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 158—162.
8. *Франкль Ф. И.* О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. С. 278—303.
9. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
10. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
19.X.1990