

УДК 532.5

© 1991 г.

А. Ф. Сидоров

## БЕЗУДАРНОЕ СЖАТИЕ БАРОТРОПНОГО ГАЗА

Поставлена и решена задача о безударном «холодном» сжатии одномерных (плоского, цилиндрического и сферического) слоев баротропного газа, требующем для достижения заданной степени сжатия минимальной внешней энергии. Начальное состояние газа предполагается однородным. В плоском случае получено точное решение задачи (построены законы оптимального управления движением поршня) с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина, в цилиндрическом и сферическом — приближенное с использованием метода характеристических рядов. В плоском случае найдена величина энергетического выигрыша по сравнению с традиционным автомобильным способом сжатия, оказавшаяся достаточно заметной и зависящей от вида уравнения состояния. Приведены результаты численных расчетов для изученного более подробно цилиндрического случая, которые проведены на основе построенного аналитически закона оптимального управления движением поршня с одной точкой переключения управления. Часть результатов в кратком изложении содержится в [1].

Еще Релеем и Гюгонио [2] было показано, что, используя класс автомодельных волн Римана, можно в процессе изоэнтропического сжатия плоского слоя политропного газа получить сколь угодно большую плотность газа. Возможность неограниченного сжатия газовых цилиндра и шара была установлена [3, 4] с применением классов автомодельных цилиндрических и сферических течений, которые были подробно изучены [5] (для задач о вытеснении газа). Отмечалось [3, 4], что процессы безударного сжатия газа являются энергетически выгодными, так как не приводят к большому росту кинетической энергии и сильному разогреву вещества, что наблюдается при ударном сжатии. Поэтому такие процессы могут играть существенную роль при осуществлении лазерного термоядерного синтеза, когда сжатие мишеней реализуется при помощи специальным образом сформированного импульса лазерного излучения.

Ниже рассматривается более общая (по сравнению с [2—4]) задача о безударном сжатии поршнем слоев баротропного газа до произвольной конечной средней плотности с наименьшими затратами энергии на движение поршня. Такая задача в случае цилиндрической или сферической симметрии слоя уже не будет иметь решения в классе автомодельных движений и требует привлечения более широких классов течений.

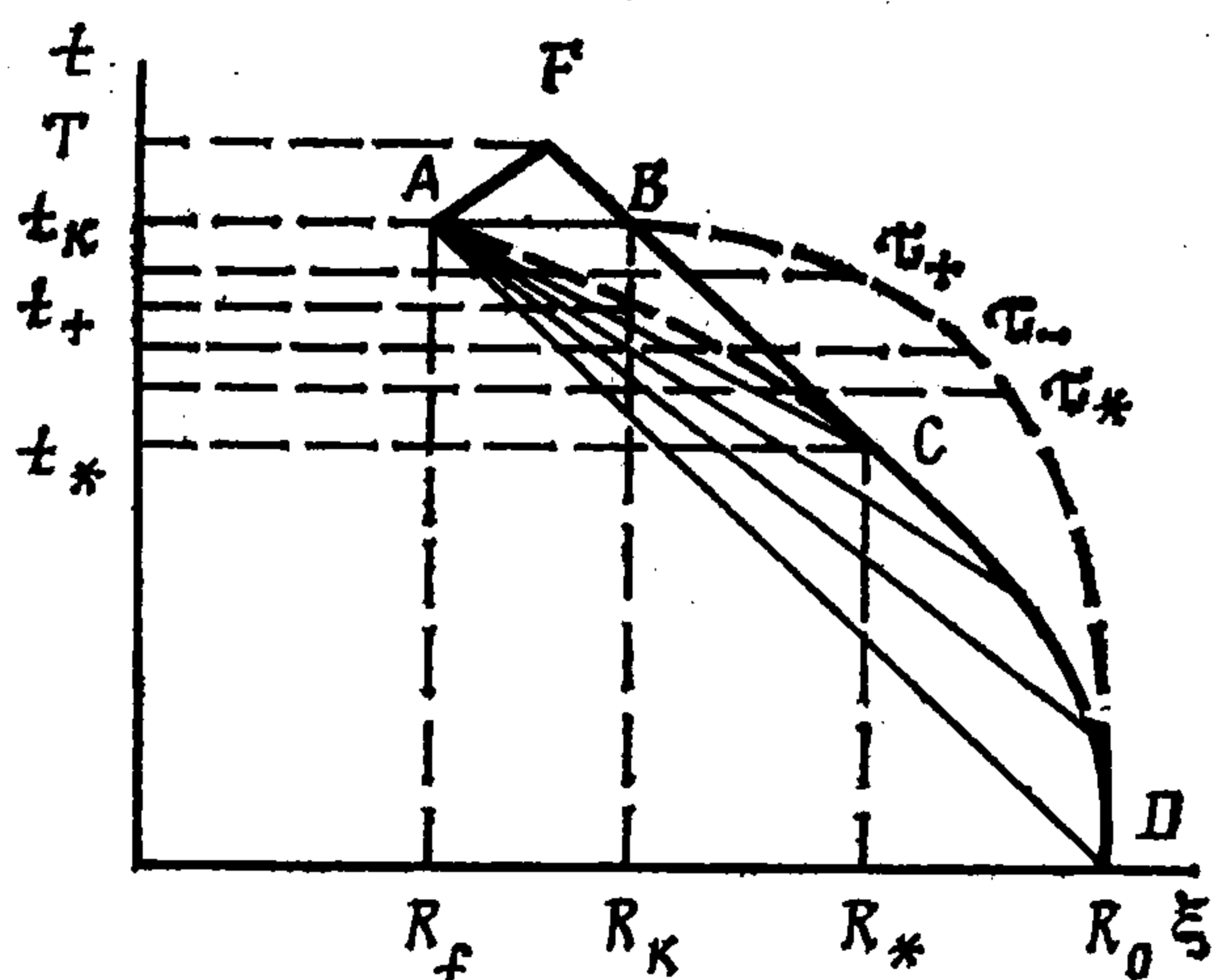
1. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  однородный слой неподвижного газа  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $u = 0$  с уравнением состояния  $p = p(\rho)$  (обозначения обычные) расположен между поверхностями  $\xi = R_f$  и  $\xi = R_0$ ,  $R_0 > R_f \geq 0$ ,  $\xi$  — радиальная или плоская координата. Будем считать, что единицы измерения выбраны так, что  $c_0^2 = p'(\rho_0) = 1$ ,  $c_0$  — начальная скорость звука, а процесс сжатия осуществляется на интервале времени  $t \in [0, t_k)$ ,  $t_k = R_0 - R_f$  — соответствует времени прохождения слоя звуковым возмущением. Поверхность  $\xi = R_f$  играет роль неподвижной стенки, а  $\xi = R_0$  отвечает начальному положению поршня  $R_t$ .

Будем искать такой закон движения поршня  $R_t$   $\xi = f(t)$   $f(0) = R_0$ ,  $f'(t) \leq 0$ , чтобы:

1)  $f(t_k) = R_k$ ,  $R_0 > R_k > R_f$ ,  $R_k$  — заданная величина, характеризующая степень сжатия слоя;

2) при  $t \in [0, t_k)$  — течение газа было безударным;

3)  $E(f(t_k))$  — работа внешних сил по перемещению поршня была минимальна.



Фиг. 1

2. Рассмотрим сначала плоский случай и будем считать, что  $R_f \geq 0$ ,  $p(\rho) \geq c_0^2$ . Уравнения изоэнтропических одномерных движений газа имеют вид

$$u_t + uu_\xi + \rho^{-1} p'(\rho) \rho_\xi = 0 \quad \rho_t + (u\rho)_\xi + N\rho u \xi^{-1} = 0 \quad (2.1)$$

где значения  $N = 0, 1, 2$  соответствуют плоскому, цилиндрическому, сферическому случаям.

Ясно, что в плоском случае ( $N = 0$ ) от поршня, начиная с  $t = 0$ , слабый разрыв распространяется в неподвижный газ с единичной скоростью, а возмущенное течение между слабым разрывом и поршнем является бегущей волной Римана и описывается соотношениями [2]

$$u + \int_{\rho_0}^{\rho} c \rho^{-1} d\rho = 0, \quad c^2 = p'(\rho) \quad (2.2)$$

$$\xi = (u - c)t + \Psi(u) \quad (2.3)$$

с произвольной функцией  $\Psi(u)$ .

Найдем сначала закон движения поршня  $R_t^0$ , обеспечивающий в момент  $t = t_k$  неограниченное безударное сжатие плоского слоя. Совершенно аналогично рассуждениям [2] такому закону будет соответствовать функция  $\Psi(u)$ , которая обеспечивает пересечение всех прямолинейных характеристик, исходящих от траектории движения поршня — кривой ДСА в точке  $A(R_k, t_k)$  плоскости  $\xi, t$  (фиг. 1). При этом  $f'(0) = 0$ , так как если  $f'(0) < 0$ , то в течении сразу же образуется ударная волна. Будем считать, что на поршне  $R_t^0 \rho = g(t)$ ,  $g(0) = \rho_0$  и выполнено условие непротекания  $u = f'(t)$ .

Уравнения прямолинейных характеристик, проходящих через точку  $A$ , имеют вид

$$\xi - R_f = (u - c)(t - t_k) \quad (2.4)$$

Таким образом, функция  $\Psi(u)$  такова

$$\Psi(u) = R_f - (u - c)t_k$$

а вдоль линии поршня из (2.2), (2.4) для нахождения функций  $f(t)$  и  $g(t)$  получим два соотношения

$$\begin{aligned} f'(t) + \int_{\rho_0}^{g(t)} \sqrt{p'(g(t))} g^{-1}(t) g'(t) dt &= 0 \\ f(t) - R_f &= (f'(t) - \sqrt{p'(g(t))})(t - t_k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Исключая из соотношений (2.5) функцию  $f(t)$  и интегрируя полученное дифференциальное уравнение для  $g(t)$ , находим следующий интеграл:

$$\sqrt{p'(g(t))} g(t) (t - t_k) = -\rho_0 t_k \quad (2.6)$$

из которого определяется плотность газа  $g(t)$  на поршне.

Интегрируя уравнение для  $f(t)$ , получим

$$f(t) = R_0 - t - \rho_0 t_k (t - t_k) \int_{-t_k}^{t-t_k} z^{-2} g^{-1}(z + t_k) dz = f_*(t) \quad (2.7)$$

При этом предел множителя при  $\rho_0 t_k$  при  $t \rightarrow t_k$  равен  $\lim_{t \rightarrow t_k} [-g^{-1}(t)] = 0$ , так как из (2.6) следует, что  $g(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_k$ .

Таким образом, зависимость (2.7) определяет закон движения поршня  $R_t$ , обеспечивающий неограниченное сжатие плоского слоя баротропного газа в момент  $t = t_k$ . В случае политропного газа с уравнением состояния  $p = a^2 \rho^\gamma$  ( $\gamma > 1$  — показатель адиабаты,  $a^2 = \gamma^{-1} \rho_0^{1-\gamma}$ ,  $p_0 = \gamma^{-1} \rho_0$ ,  $\rho_0$  и  $p_0$  — фоновые значения плотности и давления) из (2.7) получим [2]

$$f(t) = \frac{2}{\gamma-1} (t - t_k) + R_f + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} t_k \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{2/(\gamma+1)} \quad (2.8)$$

Энергия, необходимая для движения поршня  $R_t$  на промежутке времени  $[0, t_k)$ , представляется интегралом

$$E(f(t_k)) = - \int_0^{t_k} p(q(f')) f'(t) dt \quad (2.9)$$

где функция  $q(f')$  определяется неявно соотношением (2.2) при  $u = f'(t)$

Если рассмотреть задачу о минимизации функционала (2.9) на классе функций  $f(t)$ , удовлетворяющих заданным краевым условиям  $f(0) = R_0$ ,  $f(t_k) = R_k$ , то решением возникающей стандартной вариационной задачи будет линейная функция  $f(t) = (R_k - R_0)t/t_k + R_0$ , так что  $f'(0) \neq 0$ . Безударное сжатие при таком движении поршня  $R_t$  невозможно, и поэтому необходимо судить класс допустимых функций  $v = f'(t) \in V$  с тем, чтобы обеспечить отсутствие ударных волн.

Будем далее рассматривать класс уравнений состояния, для которых скорость звука  $c$  — неубывающая функция  $\rho$ . Тогда из (2.2) следует, что с ростом на поршне  $|u|$  величина  $c(u)$  не убывает, а наклон характеристик (2.4), определяемый величиной  $|u - c|$ , также возрастает. Класс допустимых управлений  $V$  в таком случае будет состоять из функций  $v$ , удовлетворяющих неравенствам

$$f'_*(t) \leq v \leq 0 \quad (2.10)$$

Докажем аналитически для политропного газа, что если на некотором интервале времени  $[\tau_-, \tau_+]$  (фиг. 1) из промежутка  $[0; t_k)$  для закона управления  $\xi = F(t)$  поршнем  $R_F$  выполняется неравенство

$$F'(t) < f'_*(t) = \frac{1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} \right] = \zeta(t) \leq 0 \quad (2.11)$$

то обязательно в течении газа, определяемом движением  $R_F$ , в некоторый момент  $t < t_k$  наступит градиентная катастрофа и возникнет ударная волна.

Уравнение прямолинейной характеристики (2.4), исходящей от поршня  $R_F$  при  $t = t_0$ , запишем в виде

$$\xi = \left( -1 + \frac{\gamma+1}{2} F'(t_0) \right) (t - t_0) + F(t_0) \quad (2.12)$$

Огибающую семейства характеристик, зависящих от параметра  $t_0$ , найдем из соотношения, получаемого дифференцированием (2.12) по  $t_0$ :

$$t = t_0 - \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} F'(t_0) \right) (F''(t_0))^{-1} \quad (2.13)$$

(там, где ускорение поршня  $R_F$  не обращается в нуль). Уравнения (2.12), (2.13) определяют огибающую. Заметим, что для поршня  $R_t^0$  все характеристики пересекаются при  $t = t_k$ .

Рассмотрим в качестве  $t_0$  момент  $\tau_*$  (фиг. 1), в который выполняются соотношения

$$f_*'(\tau_*) = F'(\tau_*) < 0, \quad F''(\tau_*) < f_*''(\tau_*) < 0$$

т. е. в момент  $\tau_*$  скорости поршней  $R_t^0$  и  $R_F$  сравнялись, а ускорение поршня  $R_F$  по абсолютной величине больше аналогичной величины для поршня  $R_t^0$ . Ясно, что в силу неравенства (2.11) такой момент  $\tau_* < \tau_-$  найдется. Тогда, вычисляя при  $t = \tau_*$  разность времен  $\Delta t = t_k - t_F$ , соответствующих возникновению градиентной катастрофы, получим

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma - 1}{2} f_*'(\tau_*) - 1 \right) \frac{F''(\tau_*) - f_*''(\tau_*)}{F''(\tau_*) f_*''(\tau_*)} > 0$$

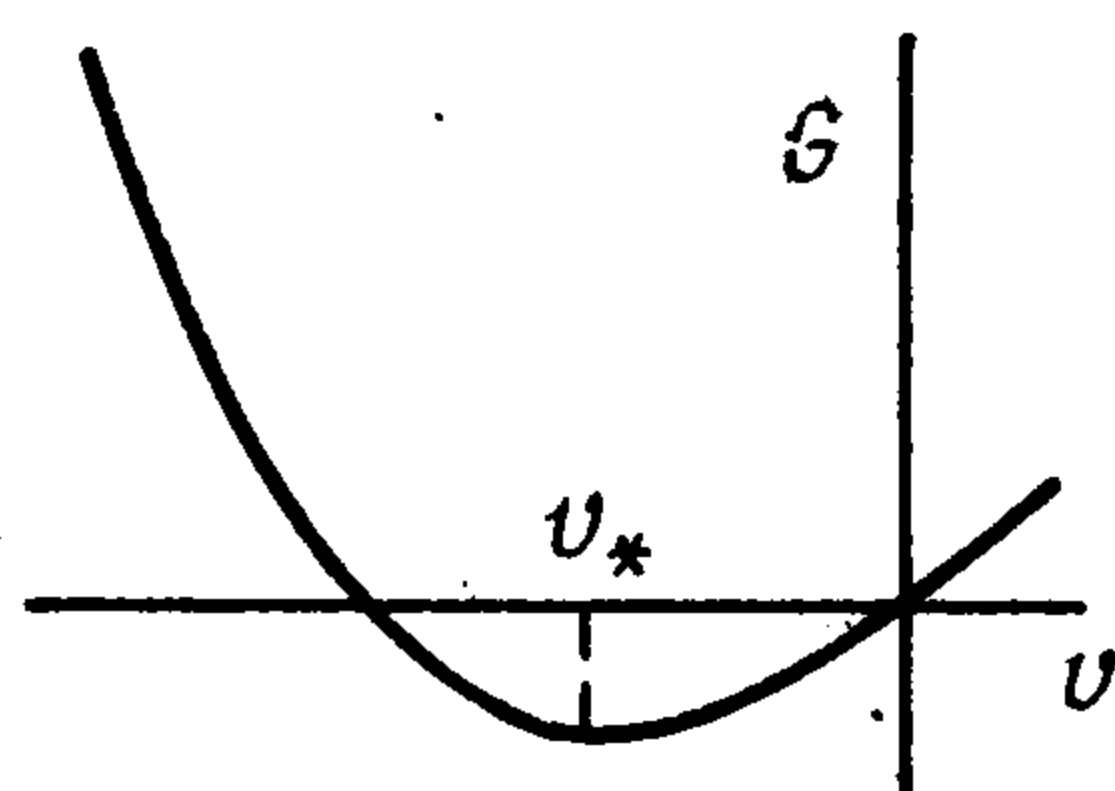
т. е.  $t_F < t_k$  и ударная волна появится в течении газа, вызванном движением поршня  $R_F$  до момента  $t_k$ .

В общем случае баротропного газа при сделанном предположении о монотонности роста скорости звука простые геометрические соображения также подтверждают, что при нарушении левого неравенства (2.10) в течении газа образуется при  $t < t_k$  ударная волна.

3. Задача о минимизации функционала (2.9) в классе функций  $f(t)$ , удовлетворяющих заданным краевым условиям и ограничениям (2.10), является стандартной задачей оптимального управления [6]. Применим для ее решения принцип максимума Понтрягина. Обозначив в (2.9)  $p(q(f')) = P(v)$ , получим, что оптимальное управление  $v(t)$  находится из условия минимума функции

$$\min_{v \in V} G(v, \lambda), \quad G(v, \lambda) = -P(v)v - \lambda v \quad (3.1)$$

где  $\lambda < -p_0 < 0$  — параметр, который находится из условия прохождения поршня  $R_t$  через точку  $t = t_k$ ,  $\xi = R_k$ . Качественный вид зависимости  $G(v, \lambda)$  при фиксированном  $\lambda$  ( $G_v(0, \lambda) = -p_0 - \lambda > 0$ ,  $G(-\infty, \lambda) = \infty$ ) приведен на фиг. 2.



Фиг. 2

Отметим, что при  $\lambda > -p_0$  найти траекторию движения поршня  $R_t$  проходящую через точки  $D$  и  $B$  (фиг. 1), не удастся.

Из вида  $G(v, \lambda)$  следует, что оптимальное управление  $v$  образуется непрерывной склейкой двух функций: сначала до достижения функцией  $G$  минимума при  $v = v_*$  функция  $v$  совпадает с  $\zeta(t)$  из (2.7), так что в момент  $t = t_*$  (на фиг. 1 ему соответствует точка  $C$ )  $v_* = \zeta(t_*)$ , а далее при

$t_* < t \leq t_k$  поршень движется с постоянной скоростью  $v = v_*$ , т. е. линия  $CB$  является прямой. Вдоль  $CB$  скорость и плотность газа постоянны и эти значения сохраняются постоянными и во всех внутренних точках треугольника  $ABC$ , так что финальное состояние газа в момент  $t = t_k$  на отрезке  $AB$  однородно (кроме точки  $A$ , в которой  $\rho = \rho_0$ ,  $u = 0$ ). Таким образом, после момента  $t_*$  осуществляется равномерное дожатие газа до заданной плотности.

В случае политропного газа момент  $t_*$  вычисляется из геометрических соображений весьма просто, так что окончательный закон оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \zeta(t) \quad 0 \leq t \leq t_* = t_k (1 - s^{(\gamma+1)/2}) \\ v_0(t) &= \zeta(t_*) = \frac{2}{\gamma-1} (1 - s^{-(\gamma-1)/2}), \quad s = \frac{R_k - R_f}{R_0 - R_f}, \quad t_* \leq t \leq t_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $s$  — заданная степень сжатия плоского слоя.

Установим теперь для политропного газа, что при малых возмущениях  $h(t)$  закона оптимального управления  $v_0(t)$  из (3.2) выполняются и достаточные условия существования минимума функционала  $E(f)$  (2.9), который в данном случае будет иметь вид

$$E(f) = J(f') = -p_0 \int_0^{t_k} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} f'\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} f' dt \quad (3.3)$$

Пусть возмущение  $h(t)$  закона (3.2) таково, что выполняются условия

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\leq v_0(t) + h'(t), \quad h(t_k) = h(0) = 0 \\ h'(t) &\geq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_*. \end{aligned}$$

Тогда при помощи стандартных процедур [6] получим

$$\begin{aligned} \Delta &= J(v_0 + h') - J(v_0) = p_0 \int_0^{t_*} h v_0' R(v_0) dt + \int_0^{t_k} O(h^2) dt \\ v_0' &= -\frac{2}{(\gamma+1)t_k} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^{-2\gamma/(\gamma+1)} < 0 \\ R(v_0) &= \gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_0\right)^{2/(\gamma+1)} \left(-2 + \frac{3\gamma-1}{2} v_0\right) < 0 \end{aligned}$$

Ясно, что при достаточно малых  $h'(t)$  имеем  $\Delta > 0$  и выполнены условия существования локального минимума.

Энергия поршня  $J(v_0)$  идет на приращение внутренней энергии  $\Delta\varepsilon$  и кинетической энергии  $\Delta\omega$  газового слоя

$$\Delta\varepsilon = \frac{p_0 t_k}{\gamma-1} (s^{1-\gamma} - 1), \quad \Delta\omega = \frac{2\gamma p_0 t_k}{\gamma-1} (s^{(1-\gamma)/2} - 1)^2 \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что при малом сжатии, когда  $s \rightarrow 1$ , отношение  $\Delta\varepsilon/\Delta\omega$  неограниченно растет, т. е. основная энергия поршня идет на приращение внутренней энергии, а при сильном сжатии, когда  $s \rightarrow 0$ , это отношение стремится к конечному пределу.

Представляет интерес оценка выигрыша в энергии  $E_0$ , затраченной при оптимальном законе движения поршня (3.2), по сравнению с традиционными способами управления, в частности, по сравнению с энергией  $E_s$  предельно быстрого сжатия, заканчивающегося в момент  $t_+$  (фиг. 1), когда траектория поршня (2.8) приходит в точку  $\xi = R_k$ .

Производя необходимые вычисления, получим

$$E_0 = \frac{p_0 R_0}{(\gamma - 1)^2} (\mu^{-(\gamma-1)/2} - 1) [(3\gamma - 1) \mu^{-(\gamma-1)/2} - \gamma - 1] \quad (3.5)$$

$$E_s = \frac{(\gamma + 1) p_0 R_0}{(\gamma - 1)^2} (1 - \lambda^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)})^2$$

$$\mu = \frac{s}{\gamma - 1} (\gamma + 1 - 2s^{(\gamma-1)/2}), \quad s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \lambda^{2/(\gamma+1)} - \frac{2}{\gamma - 1} \lambda, \quad \lambda \in (0, 1) \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) следует, что при слабом сжатии, когда  $s \rightarrow 1$  ( $\lambda \rightarrow 1$ ,  $\mu \rightarrow 1$ ),  $E_0 \rightarrow 0$ ,  $E_s \rightarrow 0$ , для отношения  $\eta = E_s/E_0$  после упрощений получим

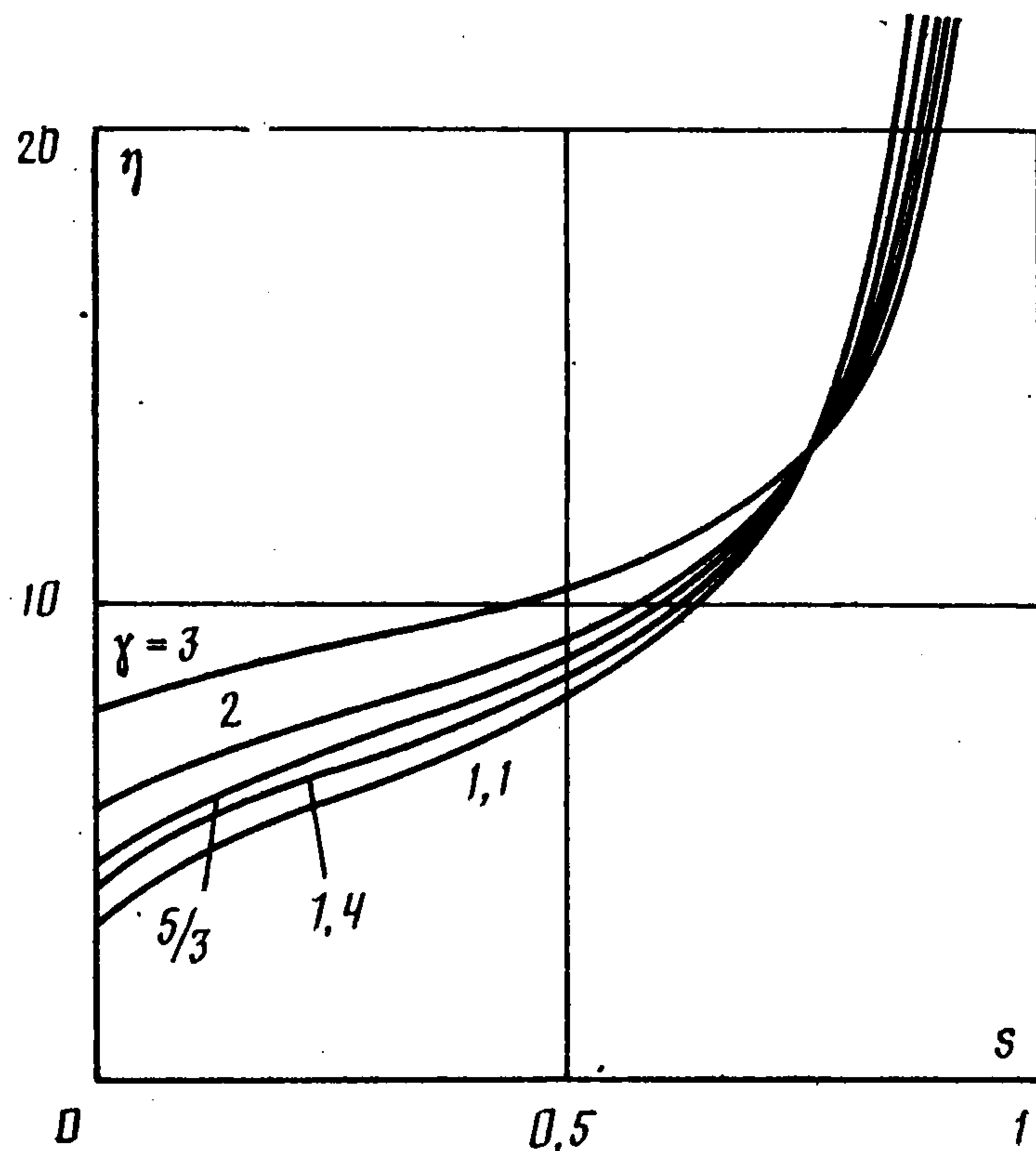
$$\eta \sim \frac{\gamma - 1}{2} (1 - s^{-(\gamma-1)/2})^{-1} \quad (3.7)$$

При сильном сжатии ( $s \sim 0$ )

$$\eta \sim \frac{\gamma + 1}{3\gamma - 1} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{2(\gamma-1)} \quad (3.8)$$

Таким образом, выигрыш при слабом сжатии  $s \rightarrow 0$  очень велик ( $\eta \rightarrow \infty$ ), а при сильном конечен и зависит от  $\gamma$ , в частности при  $\gamma = 3$ ,  $\eta \sim 64/11$ . Устремив формально  $\gamma$  к бесконечности, из (3.8) получим, что  $\eta \rightarrow 1/3 e^4$ . Если в первом случае большой выигрыш естествен, так как при быстром сжатии лишь малая масса газа приведена в движение, то в случае сильных сжатий ситуация, когда выигрыш хотя и конечен, но все же может быть достаточно заметным, неожиданна, так как при  $s \rightarrow 0$  момент  $t_+ \rightarrow t_k$  и, следовательно, выигрыш в энергии достигается за счет равномерного дожатия при  $t > t_*$  с очень большой скоростью. Отметим, что в общем случае  $\eta$  — монотонная функция от  $s$ .

На фиг. 3 приведены кривые  $\eta(s)$  при  $\gamma = 1,1; 1,4; 5/3; 2; 3$ .



Фиг. 3

*Замечания.* 1°. Заманчивым было бы получение еще больших выигрышей за счет привлечения каких-либо более общих уравнений состояния с постепенным ростом давления в зависимости от плотности. Однако ряд расчетов при помощи соотношений (2.6), (2.7) и сформулированного принципа оптимальности для уравнений состояния с экспоненциальной зависимостью давления от плотности показал, что выигрыш, превосходящий величину  $1/3 e^4$ , получить не удастся.

2°. При  $t = t_k$  от жесткой стенки  $\xi = R_f$  начинает распространяться с постоянной

скоростью ударная волна до встречи ее с поршнем  $R_t$  в некоторый момент времени  $T$ . Ясно, что до этого момента выгодно продолжать двигать с постоянной скоростью  $v_*$  с целью получения еще большей степени сжатия при небольших затратах энергии.

4. Рассмотрим случай сжатия цилиндрического и сферического слоев газа с наименьшей затратой энергии. Точное аналитическое решение таких задач в отличие от плоского слоя получить не удастся. Это связано прежде всего с тем, что неизвестно точное соотношение между скоростью газа и скоростью звука на поршне, а это не позволяет явно написать функционал  $E(f)$ . Кроме того, неизвестно аналитическое решение задач об определении законов движения цилиндрического и сферического поршней, обеспечивающих неограниченное безударное сжатие слоев даже в автомодельных случаях сжатия цилиндра и шара [3, 4].

В связи с этим далее будем строить приближенное решение поставленной задачи, опираясь на следующую гипотезу: скорость звука и скорость газа на поршне связаны зависимостью (2.2), т. е. в окрестности поршня сохраняет постоянное значение один из инвариантов Римана. Такое предположение широко используется в газовой динамике одномерных течений [2] и часто дает хорошие количественные результаты. В частности, ясно, что при относительно небольших степенях сжатия такое приближение будет вполне приемлемым. Тогда для политропного цилиндрического случая, который рассмотрим более подробно, функционал  $E_c(f)$  можно записать в виде

$$E_c(f) = -2\pi p_0 \int_0^{t_k} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} f v dt, \quad v = f' \quad (4.1)$$

Здесь  $E_c$  — работа, приходящаяся на единицу длины образующей цилиндра.

Для построения класса допустимых управлений  $V$  и приближенного определения течения в области  $ACD$  воспользуемся методом характеристических рядов [7—11]. По аналогии с плоской задачей коэффициенты рядов для случая, когда радиусы внутреннего слоя отличны от нуля, определим из условия фокусировки в точке  $(t_k, R_f)$  всех характеристик, исходящих от линии поршня  $R_t$ . При этом если  $R_f \neq 0$ , возникающее течение газа уже не будет автомодельным, зависящим от переменной  $\xi (t - t_k)^{-1}$ .

Введем новую неизвестную функцию  $\Gamma(u, t)$  ( $u$  — скорость) так, что [7]:

$$c^2 = (\gamma - 1) \left( \Gamma_t - \frac{1}{2} u^2 \right), \quad \xi = \Gamma_u \quad (4.2)$$

Тогда систему уравнений (2.1) можно свести к одному уравнению Монжа — Ампера

$$\Gamma_u [\Gamma_{uu} \Gamma_{tt} - (\Gamma_{ut} - u)^2] + N (\gamma - 1) \left( \Gamma_t - \frac{1}{2} u^2 \right) (u \Gamma_{uu} + \Gamma_u) = 0 \quad (4.3)$$

Предполагается, что  $\Gamma_{uu} \neq 0$ , так что функция  $u(\xi, t)$  неявно определена вторым соотношением (4.2). Применение переменных  $u, t$  удобно тем, что в окрестности точки фокусировки характеристик градиенты газодинамических величин в физических переменных велики, а использование вместо  $\xi$  переменной  $u$  снимает эту трудность. Линия  $u = 0$ , соответствующая слабому разрыву  $AD$  (фиг. 1), является характеристикой для уравнения (4.3) (вдоль нее  $c = 1$ ).

Решение уравнения (4.3) в области  $ACD$  (фиг. 1) представим характеристическим рядом

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) u^k, \quad a_0 = (\gamma - 1)^{-1} t, \quad a_1 = R_0 - t \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $a_k(t)$  ряда (4.4) [7] определяются путем последовательного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для того чтобы характеристики фокусировались в точке  $A$  и скорость в ней была неопределенна (она зависит от угла наклона данной характеристики с осью в точке  $A$ ), из второго соотношения (4.2) следует, что

$$a_k(t_k) = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Условия (4.5) позволяют определить все произвольные постоянные при интегрировании уравнений для  $a_k(t)$ ,  $k \geq 2$ .

Вычисляя  $a_2(t)$  и  $a_3(t)$  и беря соответствующий отрезок ряда (4.4), получим приближенное соотношение

$$\begin{aligned} \xi = R_0 - t - [R_0 - t - R_f^{1/2} (R_0 - t)^{1/2}] (\gamma + 1) u + \frac{\gamma + 1}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{R_0 - t}{8} [19\gamma + 43 + 4(\gamma + 4) \ln R_f] - \frac{\gamma + 4}{2} (R_0 - t) + \frac{11}{8} (\gamma + 1) R_f - t \right. \\ \left. - \frac{15\gamma + 27}{4} R_f^{1/2} (R_0 - t)^{1/2} \right\} u^2 \quad (4.6) \end{aligned}$$

Для приближенного нахождения закона движения  $f(t)$  поршня  $R$ , следует в (4.6) положить  $\xi = f(t)$ ,  $u = f'(t)$ . Проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение для  $f(t)$  с начальным условием  $f(0) = R_0$ , можно, в частности, получить тейлоровские коэффициенты разложения для  $\eta(t)$ :

$$f'(t) = \eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k t^k, \quad q_1 = -(\gamma + 1)^{-1} R_0^{-1/2} (R_0^{1/2} - R_f^{1/2}) \quad (4.7)$$

Локальная сходимость рядов типа (4.4) при малых  $u$  и  $t$  установлена [11]. Однако ряд применений рядов (4.4), в частности, для задач об истечении газа в вакуум [12] показал, что область сходимости их (причем зачастую весьма быстрой) может быть достаточно большой и включать, например, и границу примыкания к вакууму. Чтобы получить решения для больших скоростей в части области  $ACD$ , прилегающей к поршню, целесообразно использовать характеристические ряды непосредственно в физических переменных  $\xi$ ,  $t$  для функций  $u$  и  $c$  вида

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) (\xi + t - R_0)^k \quad (4.8)$$

При этом можно применять склейку рядов типа (4.4) с рядами типа (4.8) и различные приемы ускорения сходимости их, например, при помощи аппроксимаций Паде [12]. Таким образом, будем считать, что функция  $\eta(t)$  ( $\eta(t) \leq 0$ ,  $\eta(0) = 0$ ), реализующая движения поршня с фокусировкой всех характеристик в точке  $A$ , приближенно определена. Отметим, что в случае  $R_f = 0$ , когда сжимаются цилиндр или сфера, аналитическое по  $t$  представление  $\eta(t)$  вида (4.7) невозможно. В разложениях появляются члены с логарифмическими особенностями и  $\eta(t)$  можно найти либо численно [7], либо использовать технику разложений из [13].

5. Рассмотрим задачу о построении оптимального управления  $v(t)$  в классе допустимых управлений  $V \{ \eta(t) \leq v(t) \leq 0 \}$ , минимизирующего

функционал (4.1). При помощи принципа максимума Понтрягина задача сводится к минимизации функции

$$\min_{v \in V} \left\{ -2\pi p_0 v f \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} - q(t) v \right\} \quad (5.1)$$

с условием (уравнение Эйлера)

$$q'(t) = -2\pi p_0 v \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \geq 0$$

и дополнительными условиями трансверсальности на  $q(t)$  — вспомогательную функцию — такими, что траектория поршня проходит через точку  $(R_k, t_k)$ .

Характер изменения минимизируемой функции  $W(v, t)$  в (5.1) такой же, как и у функции, изображенной на фиг. 2. При этом

$$W_v(v, 0) = -2\pi p_0 R_0 - \lambda_1 > 0, \quad q(0) = \lambda_1 < 0 \\ q(t_k) = -\lambda_2 < 0$$

Таким образом, до некоторого момента  $t_*$ , который определяется из условий

$$-2\pi p_0 \eta(t_*) \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v_* \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left( 1 - \frac{3\gamma-1}{2} v_* \right) - q(t_*) = 0 \quad (5.2) \\ v_* = \eta(t_*)$$

оптимальное управление, как и в плоском случае, совпадает с законом  $\eta(t)$ , когда характеристики фокусируются в точке  $A$ :

$$v(t) = \eta(t), \quad 0 \leq t \leq t_* \quad (5.3) \\ q(t) = -2\pi p_0 \int_0^t \eta(t) \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} \eta(t) \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} dt + \lambda_1$$

и при  $v = v_*$  функция  $W$  минимальна.

При  $t > t_*$  получим следующую систему уравнений, определяющих оптимальное управление:

$$\left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left( 1 - \frac{3\gamma-1}{2} v \right) = -\frac{1}{2\pi p_0} \frac{q(t)}{f(t)} \quad (5.4)$$

$$q' = -2\pi p_0 v \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}, \quad f' = v \quad (5.5)$$

Исключая из (5.5) при помощи (5.4)  $q(t)$ , получим соотношение

$$-v^2 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right) = f v' \left( 2 - \frac{3\gamma-1}{2} v \right) \quad (5.6)$$

Исключив далее из (5.6) при помощи (5.5) функцию  $f(t)$ , получим уравнение второго порядка для  $v(t)$ , общий интеграл которого запишем в виде ( $C_1, C_2$  — произвольные постоянные)

$$C_1 t + C_2 = \int_{v_*}^v \frac{(2 - (3\gamma-1)/2\eta) d\eta}{\eta^4 (1 - 1/2(\gamma-1)\eta)^{2\gamma/(\gamma-1)}} = \Lambda(v) \quad (5.7)$$

При этом выполняются соотношения:

$$C_1 v^2 f \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2} v \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = -1$$

$$R_* = f(t_*) > 0, \quad v_* = v(t_*) < 0, \quad v_k = v(t_k) \quad (5.8)$$

$$C_1 t_k + C_2 = \Lambda(v_k), \quad C_1 t_* + C_2 = \Lambda(v_*) = 0 \quad (5.9)$$

$$C_1(t_k - t_*) = \Lambda(v_k) < 0, \quad \frac{v_k^2 (1 - 1/2(\gamma-1)v_k)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{v_*^2 (1 - 1/2(\gamma-1)v_*)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} = \frac{R_*}{R_k} > 1 \quad (5.10)$$

Можно убедиться, что момент переключения  $t_* \in (0, t_+)$  всегда найдется.

Действительно, из (5.7)–(5.10) получим уравнение для нахождения  $t_*$ :

$$F(t_*) = v_*^2 f(t_*) \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_*\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} + \frac{t_k - t_*}{\Lambda(v_k(t_*))} = 0 \quad (5.11)$$

где функция  $v_k(t_*)$  неявно определяется из (5.10).

Из (5.10) следует, что  $|v_k(t_*)| > |v_*|$ , т. е. всегда  $\Lambda(v_k(t_*)) < 0$ . При  $t_*$ , близких к нулю,  $v_*$  и  $v_k(t_*)$  также близки к нулю. Из (5.7) для таких  $t_*$  следует, что

$$\Lambda(v_k(t_*)) \sim -\frac{2}{3}(v_k^{-3}(t_*) - v_*^{-3}) \sim -\frac{2}{3}v_*^{-3} \left[ \left(\frac{R_k}{R_0}\right)^{3/2} - 1 \right] < 0$$

Но тогда из (5.11) получим, что

$$F(t_*) \sim v_*^2 R_0 + O(v_*^3) > 0$$

С другой стороны, при  $t_* \rightarrow t_+ - 0$  (фиг. 1) будем иметь

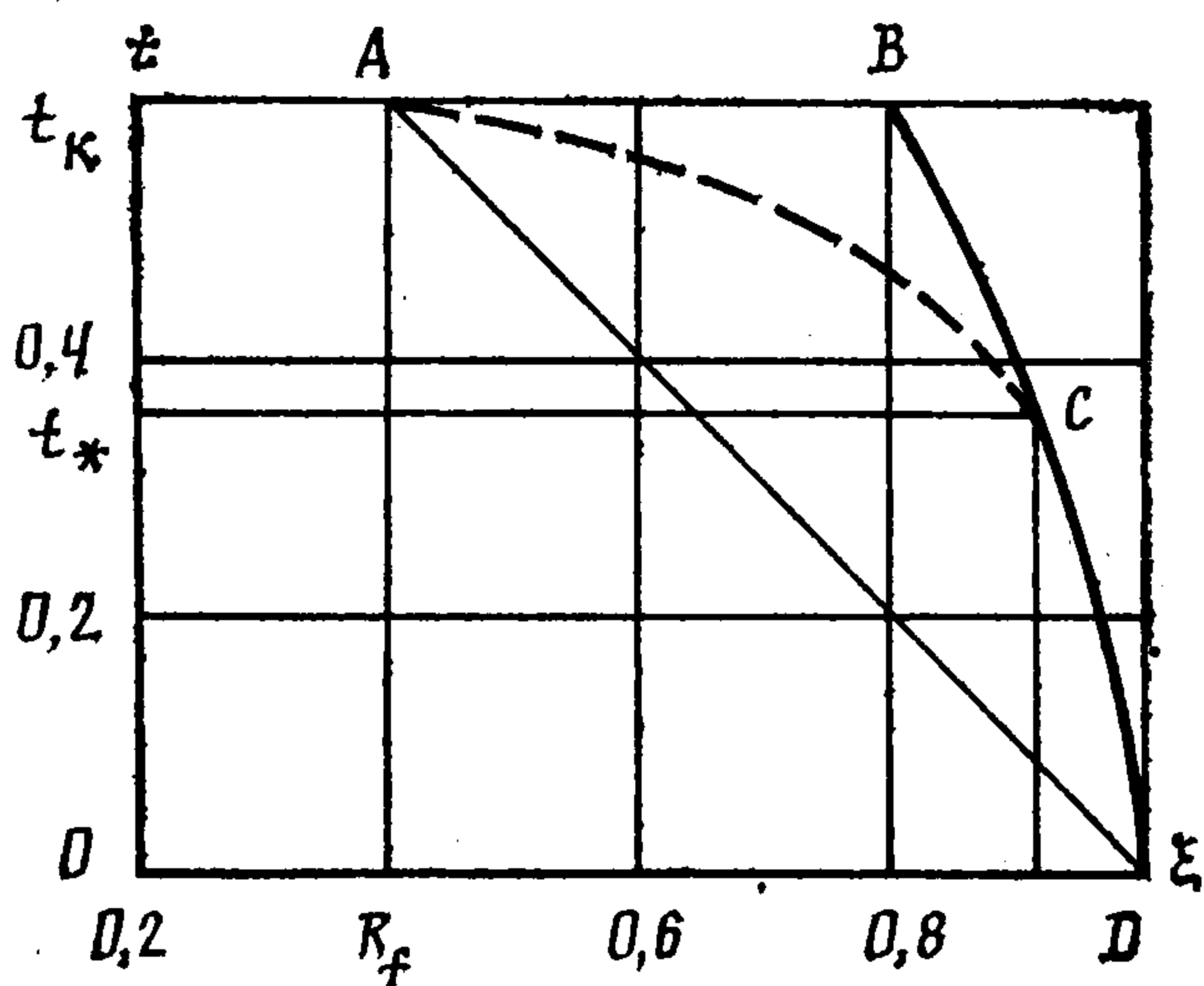
$$v_* \rightarrow \eta(t_+), \quad \Lambda(v_k(t_*)) \rightarrow -0, \quad t_k - t_+ > 0$$

и, таким образом, из (5.11) получим, что  $F(t_*) \rightarrow -\infty$ .  $F(t_*)$  — непрерывная функция от  $t_*$  и, следовательно, в интервале  $(0, t_+)$  корень  $F(t_*)$  всегда найдется.

Окончательно закон оптимального управления при  $t_* \leq t < t_k$  запишем в параметрическом виде так:

$$\begin{aligned} \xi &= A\mu^{-2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \mu\right)^{-(\gamma+1)/(\gamma-1)}, \quad \mu \in [v_*, \mu_k] \\ t &= -A \int_{v_*}^{\mu} \mu^{-4} \left(2 - \frac{3\gamma-1}{2} \mu\right) \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \mu\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} d\mu + t_* \end{aligned} \quad (5.12)$$

где постоянные  $t_*$ ,  $A$ ,  $\mu_k$  определяются из условия прохождения поршнем точек  $B$  и  $D$ ,  $\mu$  — параметр.



Фиг. 4

Важно отметить, что закон оптимального управления (5.12) универсален и не зависит от конкретного вида функции  $\eta(t)$ , при помощи которой до момента переключения  $t = t_*$  осуществляется по (5.3) управление на начальной стадии движения поршня.

На фиг. 4 приведены расчеты закона оптимального управления по построенным в разд. 3, 4 формулам при сжатии цилиндрического слоя ( $R_f = 0,4$ ;  $R_0 = 1$ ) газа с  $\gamma = 1,4$ . Оказалось, что заключительный участок

$CB$  траектории поршня, рассчитанный по (5.12), практически прямолинейен, при этом  $t_* = 0,361$ ,  $R_* = 0,918$ . Расчет поля течения в криволинейном треугольнике  $ABC$  (или сразу во всем треугольнике  $ABD$ ) может быть проведен, например, методом характеристик. При этом требуется решать смешанную задачу Коши с приближенными данными на известной криволинейной характеристике  $DCA$  (или  $DA$ ) и условиями непротекания на известной траектории поршня  $CB$  (после точки переключения управления) или  $B CD$ .

В сферическом случае можно использовать рассуждения, совершенно аналогичные случаю осевой симметрии. Вместо функционала (4.1) для

энергии поршня  $E_s(f)$  будем иметь

$$E_s(f) = -4\pi p_0 \int_0^{t_k} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} f^2 v dt$$

Решить задачу о построении оптимального управления поршнем удастся до конца в квадратурах и здесь, хотя закон управления будет существенно отличаться от (5.3), (5.12). Сильно усложняется и доказательство существования точки  $t_*$  переключения управления. Окончательные формулы для законов оптимального управления в сферическом случае приведены в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 2. С. 283—287.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
3. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 172 с.
4. Накколлс Дж. Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // Успехи физ. наук. 1984. Т. 143, № 3. С. 467—482.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехиздат, 1957. 375 с.
6. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
7. Сидоров А. Ф. Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 426—434.
8. Зубов Е. Н., Сидоров А. Ф. О решении одной краевой задачи для неустановившегося пространственного течения газа и распространения слабых сферических ударных волн // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. Т. 3. № 3. С. 32—50.
9. Сидоров А. Ф. Приближенный метод решения некоторых задач о пространственном истечении газа в вакуум // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. Т. 7. № 5. С. 137—148.
10. Sidorov A. F. Application of characteristic series to the solution of three-dimensional problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics M.: Mir, 1984. P. 184—205.
11. Баутин С. П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Т. 4. № 1. С. 3—15.
12. Башкирцева И. А. Применение численно-аналитических методов к задачам об истечении газа в вакуум // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. М.: ЦНИИатоминформ, 1990. Вып. 3. С. 84—89.
13. Вершинин С. В., Сидоров А. Ф. О поведении решений уравнений двойных волн в окрестности области покоя // ПММ. Т. 39. Вып. 6. С. 1043—1050.