Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 532.5

А. С. Баранов

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ФОРМЫ ВЯЗКИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

Предлагается сравнительно простой метод вывода дисперсионного уравнения, описывающего колебания самогравитирующего вязкого однородного шара. Рассматривается асимптотика малой вязкости. Предлагается метод исследования невязких колебаний эллипсоидов вращения, допускающий обобщение на случай вязкости. Определяется спектр собственных колебаний фигуры. В качестве примера учета вязкости рассматриваются пульсационные колебания системы, когда имеет место трение газовой массы о пронизывающий ее фон. Найдено, что неустойчивость наступает для эллипсоидов, сплюснутость которых больше некоторого критического значения.

Рассматривая относительно простые примеры, будем прежде всего стремиться дать такую схему, которая может быть обобщена на более сложные случаи вязких колебаний эллипсоидальных фигур равновесия. К таким примерам относятся решаемые ниже задача о вязких колебаниях однородного шара и о невозмущенных колебаниях сфероидов Маклорена. Первая из них допускает точное решение (см., например, [1]) и в этом смысле может считаться вполне исследованной. Решение этой задачи будет дано в более простой и наглядной форме, чем это сделано, например, в [1]. Что же касается второй рассматриваемой здесь задачи, то уравнение для собственных частот колебаний в этом случае было получено Брайаном [2], но его конкретные вычисления представляются непригодными для анализа вековой устойчивости фигур равновесия. С другой стороны, выводы, сделанные Чандрасекхаром [3] при использовании вириального метода исследования влияния вязкой диссипации на устойчивость сфероидов Маклорена, нуждаются в уточнении, поскольку проблема решалась при некоторых предположениях, общность и даже правильность которых не вполне ясна.

Несмотря на формальное различие методов Брайана и Чандрасекхара, оба они используют возможность прийти для колебаний конкретного типа к системе с конечным числом степеней свободы [4]. Если задать компоненты лагранжевых перемещений полиномами (скажем, степени $n-1$ относительно декартовых координат), то это приводит к известному смещению граничной поверхности по нормали. С другой стороны, как указано в [5], деформация границы при рассматриваемых обстоятельствах порождает возмущение внутреннего потенциала, описываемого полиномом степени n. Тогда линеаризованные уравнения гидродинамики с обеих сторон содержат полиномы одинаковой степени и задача сводится к системе конечного числа дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (при определении частот эллипсоидов вращения эти дифференциальные уравнения оказываются имеющими простейший вид). Указанная схема реализовывалась Брайаном непосредственно, а Чандрасекхаром — косвенно. Но в случае вязких колебаний даже для простейшей модели — однородного шара — возмущения не полиномиальны [1] (ниже это будет подтверждено) и, строго говоря, теряется смысл величины n. Поэтому представляется необходимым изучить невязкие колебания с более общей точки зрения.

1. Рассмотрим конфигурацию жидкой массы, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ, постоянной во времени и пространстве, при изотропном давлении $p(\mathbf{x}, t)$ и обозначим через $\mathbf{u}$ скорость жидкого элемента, находящегося в точке $\mathbf{x}$ (t — время). Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности. Не ограничивая общности, можно считать, что ось x_3 декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности. Тогда граничные условия обращения в нуль нормальной составляющей полного напряже-

ния на свободной поверхности запишутся в виде

$$\frac{p}{2\rho}-\nu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=0,\qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=0 \tag{1.1}$$

(ν — коэффициент кинематической вязкости).

Если предположить вращательную симметрию фигуры равновесия, то одна из последних компонент граничного условия оказывается зависящей от других (скажем, первых) и выпадает из дальнейшего рассмотрения.

Пусть решение линеаризованной системы уравнений движения зависит от времени по закону $e^{-i\omega t}$ (ω — подлежащее определению характеристическое значение параметра). Тогда, отделяя временной множитель в линеаризованных уравнениях движения и применяя к получившимся уравнениям оператор Лапласа, получаем при учете условия несжимаемости: $\Delta(\nu\Delta-i\omega)u_1=0$ (такие же соотношения для двух других компонент скорости не выписываем).

Введем теперь вспомогательные функции $u'=\Delta u_1$ и $u''=(\nu\Delta-i\omega)u_1$, так что $\nu u'-u''=i\omega u_1$. Но $(\nu\Delta-i\omega)u'=(\nu\Delta-i\omega)\Delta u_1=0$ и $\Delta u''=\Delta(\nu\Delta-i\omega)u_1=0$, откуда заключаем, что величина u_1 (а также величины u_2 и u_3) распадается на два слагаемых, каждое из которых удовлетворяет более простому уравнению. Точнее, $u_1=u_1^{(1)}+u_1^{(2)}$, причем

$$(\nu\Delta-i\omega)u_1^{(1)}=0,\quad \Delta u_1^{(2)}=0 \tag{1.2}$$

В терминах введенных величин уравнения движения запишутся в виде

$$i\omega u_1^{(2)}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\qquad i\omega u_2^{(2)}=\frac{\partial V_1}{\partial x_2},\qquad i\omega u_3^{(2)}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3},\qquad V_1=V-\frac{p}{\rho} \tag{1.3}$$

где V_1 — суммарный потенциал, $V(\mathbf{x})$ — внутренний потенциал.

Далее полное возмущение давления (давление рассматривается на границе) складывается из двух слагаемых: возмущения $\delta_1 p$ в неподвижной точке и возмущения $\delta_2 p$ от смещения границы. Поскольку давление в невозмущенном состоянии определяется соотношениями

$$p=\rho V+\text{const}={}^2/_3\pi G\rho^2(a^2-r^2)$$

(G — постоянная тяготения, a — радиус шара, кроме того, будем использовать сферические координаты r и θ), то возмущение от смещения ζ границы будет таково: $\delta_2 p=\zeta\partial p/\partial r$.

Так как изучаемое тело сферически симметрично, то по общим правилам теории групп всякая скалярная величина, характеризующая возмущение, может быть принята пропорциональной конкретной сферической гармонике [6]. В частности, этой гармоникой можно считать полином Лежандра $P_n(\cos\theta)$ ($n\geqslant 1$, так как чисто радиального смещения несжимаемой жидкости быть не может), остальные решения с тем же ω получаются линейной суперпозицией. Имеем

$$\delta_2 p=-{}^4/_3\pi G\rho^2\zeta_0 aP_n(\cos\theta) \tag{1.4}$$

где ζ_0 — радиальное смещение поверхности на полюсе. Через радиальное смещение границы выражается также возмущение внутреннего потенциала

$$\delta V=4(2n+1)^{-1}\pi G\rho\zeta_0 aP_n(\cos\theta)$$

Применение к первым трем уравнениям (1.3) операции div дает $\Delta V_1=0$, и по соображениям непрерывности внутри шара имеем условие

$$V_1=Lr^nP_n(\cos\theta) \tag{1.5}$$

где L — некоторый коэффициент.

Возмущение суммарного потенциала в силу последней формулы (1.3) выразится следующим образом: $\delta V_1 = \delta V - \delta_1 p/\rho$.

Учитывая первое граничное условие (1.1), находим

$$\delta V_1 = {}^2/_3\,(2n+1)^{-1}\pi G\rho\zeta_0 a P_n(\cos\theta) - \nu\partial u_3/\partial x_3 = 0 \tag{1.6}$$

Обратимся ко второму граничному условию и в меридиональной плоскости перейдем от декартовых координат к полярным. Тогда при $\theta = 0$ второе граничное условие принимает вид

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0 \tag{1.7}$$

(при написании величины u_1 опущен индекс, поскольку здесь и далее величины u_r и u_θ связаны только с первой компонентой скорости).

Известно, что произвольное векторное поле может быть представлено в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{grad}\varepsilon + \mathbf{r}\cdot\chi + \mathbf{r}\times\operatorname{grad}\psi \tag{1.8}$$

где ε, χ и ψ — некоторые переменные скалярные функции. Последний член в правой части формулы (1.8) далее не рассматриваем, но его можно изучить отдельно, независимо от остальных (он дает колебания так называемого крутильного типа [7]).

Поскольку в несжимаемой жидкости дивергенция смещения равна нулю, то справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1} + x_1\chi\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_2} + x_2\chi\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_3} + x_3\chi\right) =$$
$$= \Delta\varepsilon + x_1\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\chi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\chi}{\partial x_3} + 3\chi = 0$$

Отсюда видно, что функции ε и χ могут быть выражены через одну функцию, скажем N. Имеем

$$\varepsilon = x_1\frac{\partial N}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial N}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial N}{\partial x_3} + N, \quad \chi = -\Delta N \tag{1.9}$$

Итак, условие обращения в нуль дивергенции смещения дает представление

$$(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{grad}\left(x_1\frac{\partial N}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial N}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial N}{\partial x_3} + N\right) - \mathbf{r}\cdot\Delta N$$

Так как каждый компонент скорости должен удовлетворять условию (первому) (1.2), то естественно принять это условие и для функции $N(\mathbf{x})$. Вычисляя теперь радиальную и тангенциальную компоненты скорости

$$u_r^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial N}{\partial r} + N\right) - r\Delta N = \frac{n(n+1)}{r}N, \quad i\omega u_r^{(2)} = \frac{\partial V_1}{\partial r}$$
$$u_\theta^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\frac{\partial N}{\partial r} + N\right); \quad i\omega u_\theta^{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\theta} \tag{1.10}$$

перепишем второе граничное условие в виде

$$\frac{n(n+1)}{a}\frac{\partial N}{\partial\theta} - \frac{2}{a}\frac{\partial N}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(a\frac{\partial^2 N}{\partial r^2}\right) - \frac{2i}{\omega}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{a}\frac{\partial V_1}{\partial\theta}\right) = 0$$

Угол θ отсчитывается на сфере в произвольном направлении, поэтому выражение под знаком производной по θ должно быть постоянно на сфере из-за зависимости $\sim P_n(\cos\theta)$, т. е. второе граничное условие принимает вид

$$a\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{2n(n+1)-2}{a}N - \frac{2i}{\omega}\left(\frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{V_1}{a}\right) = 0 \tag{1.11}$$

Первое граничное условие в силу формул (1.5), (1.10) и соотношения $\zeta_0 = u_r/(i\omega)$ запишется следующим образом:

$$\left[\frac{8\pi G\rho n(n-1)}{3\omega^2(2n+1)} - 1 + \frac{2in(n-1)}{\varkappa a^2}\right] La^n -$$
$$- \frac{8\pi G\rho a(n-1)n(n+1)}{3i\omega(2n+1)a} N - 2\nu \frac{n(n+1)}{a}\left(\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{N}{a}\right) = 0, \quad \varkappa = \frac{\omega}{\nu} \qquad (1.12)$$

Раскроем теперь первое уравнение (1.2), где величина $u^{(1)}$ заменена функцией N:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} N - i\varkappa N = 0 \qquad (1.13)$$

Комбинируя предыдущее уравнение с уравнением (1.11), находим

$$-2\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{n(n+1)-2}{a} N + i\varkappa N - \frac{2i}{\omega}\left(\frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{V_1}{a}\right) = 0$$

Подставляя сюда выражение для V_1 посредством формулы (1.5), находим величину La^n, после чего уравнение (1.12) запишется следующим образом:

$$N\left\{-\frac{8\pi G\rho n^2}{3\omega^2(2n+1)}\left[1 + \frac{i\varkappa a^2(n-1)}{n}\right] - \frac{2in^2(n+2)}{\varkappa a^2} + \frac{i\varkappa a^2}{2(n-1)} + \frac{2n^2-1}{n-1}\right\} +$$
$$+ \frac{\partial N}{\partial r}\left[\frac{8\pi G\rho an}{3\omega^2(2n+1)} - \frac{a}{n-1} + \frac{2in(n+2)}{\varkappa a}\right] = 0 \qquad (1.14)$$

Для нахождения в явном виде функции N, фигурирующей в дисперсионном уравнении (1.14), обратимся вновь к уравнению (1.13). Подстановкой $F = N\sqrt{r}$ оно сводится к стандартному уравнению [8], решение которого (с точностью до несущественного здесь коэффициента) таково:

$$F = J_{n+1/2}(r\sqrt{-i\varkappa})$$

где J — бесселева функция. После незначительных преобразований окончательно находим дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[n - \frac{r\sqrt{-i\varkappa}\, J_{n+3/2}(r\sqrt{-i\varkappa})}{J_{n+1/2}(r\sqrt{-i\varkappa})}\right] \qquad (1.15)$$

совпадающее при сделанных предположениях с аналогичным результатом других авторов [1, 9].

2. Отметим, что развитый выше метод почти (если не упомянуть цилиндр) исчерпывает возможности точного решения задачи о вязких колебаниях эллипсоидальных фигур равновесия (тем более представляются непригодными для этой цели более громоздкие методы [1]). Поэтому основное внимание в дальнейшем должно быть уделено случаю малой вязкости (или, наоборот, большой вязкости, что, однако, выходит за рамки данной публикации).

Будем применять традиционный метод пограничного слоя [10].

Естественно в качестве нулевого приближения рассмотреть колебания однородного шара без вязкости. В этом случае уравнение движения (при учете формулы (1.5)) таково:

$$\partial^2\zeta/\partial t^2 = \partial V_1/\partial r = nLr^{n-1}P_n(\cos\theta)$$

Отделяя временной множитель, после простых преобразований находим частоту колебаний однородного шара, состоящего из идеальной несжимаемой жидкости в соответствии с известной формулой Кельвина

$$\omega_0^2/(4\pi G\rho) = 2n(n-1)/(3(2n+1))$$

Ввиду того, что рассматривается приближение, соответствующее малой вязкости, напишем

$$\omega = \omega_0 + \nu\omega_1 + O(\nu^2) \tag{2.1}$$

Для вычисления асимптотики малых вязких колебаний шара рассмотрим вначале плоский пограничный слой со свободной поверхностью $x_3 = 0$ и найдем характерные порядки возмущения за счет вязкости в сравнении с основным невязким движением. Роль самогравитации в пограничном слое незначительна, поэтому можно считать ускорение силы тяжести g заданным. Невозмущенное давление внутри слоя определится формулой

$$p = -g\rho x_3. \tag{2.2}$$

Возмущение ищем в виде

$$\delta u_j = A_j(x_3)e^{ikx_1+i\omega t}, \quad A_2(x_3) = 0$$

Подставляя эти формулы в уравнения движения жидкости в плоском пограничном слое

$$\partial\delta u_j/\partial t = -\rho^{-1}\partial\delta p/\partial x_j + \nu\delta u_j$$

после некоторых преобразований находим

$$\nu(A_1'''(x_3) - k^2A_1'(x_3)) - i\omega A_1'(x_3) = ik\nu(A_3''(x_3) - k^2A_3(x_3)) + k\omega A_3(x_3) \tag{2.3}$$

Учитывая условие несжимаемости, имеющее в данном случае вид $ikA_1(x_3) + A_3'(x_3) = 0$, и полагая величину A пропорциональной $e^{\gamma x_3}$, сводим соотношение (2.3) к биквадратному уравнению

$$\nu\gamma^4 - (i\omega + 2k^2\nu)\gamma^2 + (k^4\nu + ik^2\omega) = 0$$

Видно, что физический смысл имеют только два корня из четырех, пропорциональные $\sqrt{i\varkappa}$, и наиболее общее решение таково:

$$A_1 = b_1e^{\gamma_1x_3} + b_2e^{\gamma_2x_3}, \quad A_3 = -\frac{ik}{\gamma_1}b_1e^{\gamma_1x_3} - \frac{ik}{\gamma_2}b_2e^{\gamma_2x_3} \tag{2.4}$$

Толщина вязкого пограничного слоя определяется корнем γ_2 и равна по порядку величины $\sqrt{1/\varkappa}$. Далее, в силу формулы (2.2) возмущение давления от смещения границы $\delta_2 p = -g\rho\zeta$. Поэтому с учетом формулы (2.4) первое граничное условие (1.1) запишется в виде

$$\frac{g}{\omega}\left(\frac{k}{\gamma_1}b_1 + \frac{k}{\gamma_2}b_2\right) + \frac{1}{ik}\left[b_1(\gamma_1^2\nu - k^2\nu - i\omega) + b_2(\gamma_2^2\nu - k^2\nu - i\omega) + 2\nu ik(b_1 + b_2)\right] = 0$$

Аналогичным образом, записывая второе граничное условие (1.1) в виде $ikA_3(x_3) + A_1'(x_3) = 0$, подставляя сюда величины A_1 и A_3, согласно формулам (2.4), из анализа обоих уравнений заключаем, что порядки величин A_1, A_3 и p соответственно 1, $\sqrt{\nu}$ и ν. Порядки величин δu_1, δu_2 и δu_3 следующие: 1 для членов с $e^{\gamma_1x_3}$ и $\sqrt{\nu}$, ν и $\sqrt{\nu}$ для членов с $e^{\gamma_2x_3}$. Эти же порядки можно ожидать и для границы со слабым искривлением. При этом в первое граничное условие величина δu_3 входит только в глобальном члене $e^{\gamma_1x_3}$. Во второе граничное условие входят как δu_1, так и δu_3, общий порядок ν от глобального члена. Эффект пограничного слоя присутствует только в выражении для δu_1.

По аналогии с предыдущим анализом изучим приближенные граничные условия для шара. Возьмем сначала второе граничное условие.

Имеем в полюсе:

$$A_1 = b_1 e^{kx_3} + b_2 e^{(1+i)\sqrt{\varkappa/2}x_3}$$

$$A_3 = -ib_1 e^{kx_3} - \frac{ik}{1+i}\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\, b_2 e^{(1+i)\sqrt{\varkappa/2}\,x_3}$$

Подставляя эти соотношения в формулы (1.1), получаем

$$2b_1 k + b_2 (1+i)\sqrt{\varkappa/2} = 0$$

Следовательно, и в шаре в пограничном слое преобладает тангенциальная компонента скорости. При составлении первого граничного условия от основной части радиальной скорости входит поправка, пропорциональная вязкости, течение же в пограничном слое дает пренебрежимо малую поправку. Во втором граничном условии для тангенциальной компоненты скорости берется как основной член, так и член, обусловленный течением в пограничном слое, что касается радиальной компоненты скорости, то для нее во втором граничном условии учитываем только основное течение.

Снова рассмотрим второе граничное условие в терминах радиальной и тангенциальной составляющих (формула (1.7)). В соответствии со сделанными замечаниями компоненты скорости, фигурирующие в ней, таковы:

$$u_r = \frac{Ln}{i\omega} r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

$$u_\theta^{(1)} = \frac{L}{i\omega} r^{n-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta), \quad u_\theta^{(2)} = fe^{(1+i)\sqrt{\varkappa/2}\,(r-a)} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)$$

Подставляя написанные формулы в условие (1.7), находим при $r = a$

$$f = -\frac{2L(n-1)a^{n-2}}{i(1+i)\omega\sqrt{\varkappa/2}} \tag{2.5}$$

Записывая в терминах u_r, u_θ уравнение неразрывности $[\partial(r^2 u_r)/\partial r]/r^2 + [\partial(u_\theta \sin\theta)/\partial\theta]/(r\sin\theta) = 0$ и отбрасывая малую величину $2u_r/r$, получим после некоторых преобразований

$$\partial u_r^{(2)}/\partial r = -n(n+1)a^{-1} f e^{(1+i)\sqrt{\varkappa/2}(r-a)}$$

Отсюда, учитывая формулу (2.3), находим

$$u_r^{(2)} = -\frac{2Ln(n+1)(n-1)}{i(1+i)\omega a\sqrt{\varkappa/2}} e^{(1+i)\sqrt{\varkappa/2}\,(r-a)} P_n(\cos\theta) \tag{2.6}$$

Теперь из уравнений (1.1), (1.5) и (2.6) получаем дисперсионное уравнение, определяющее малые вязкие колебания шара:

$$-\frac{8\pi G\rho n(n-1)}{3\omega^2} - 2\nu\frac{n(n-1)}{i\omega a^2} - \nu\frac{2\sqrt{2}\,n(n+1)(n-1)}{i(1+i)\omega a\sqrt{\varkappa}} = 0 \tag{2.7}$$

Подставляя выражение (2.1) в уравнение (2.7), находим поправку, обусловленную вязкостью, к основной частоте колебаний однородного шара

$$\omega_1 = i\left[\frac{3(2n+1)\omega_0^2}{8\pi G\rho a^2} + \frac{(n+1)(n-1)}{a^2}\right] = \frac{i(n-1)(2n+1)}{a^2} \tag{2.8}$$

Формула (2.8) совпадает с аналогичным результатом других авторов (см., например, [1]).

3. Рассмотрим конфигурацию жидкой массы, состоящей из идеальной жидкости (обозначения предыдущих разделов сохраняем). Пусть фигура равномерно вращается с угловой скоростью Ω (для определенности считаем, что вектор Ω направлен по оси x_3). Полагая, что решение линеаризованной системы уравнений движения, отнесенных к системе координат, вращающейся с той же угловой скоростью, зависит от времени по закону $e^{i\omega t}$, найдем

$$i\omega u_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 2\Omega u_2, \quad i\omega u_2 = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - 2\Omega u_1, \quad i\omega u_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \tag{3.1}$$

условие несжимаемости запишется в виде

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3'^2} = 0; \quad x_3' = \frac{x_3}{\tau}, \quad \tau^2 = 1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \tag{3.2}$$

Кроме того, будем обозначать $a_3' = a_3/\tau$, при этом a_1 $(=a_2)$ и a_3 — полуоси граничного эллипсоида.

Поскольку имеем дело со слабо возмущенным однородным эллипсоидом, то его внутреннее состояние может быть полностью описано движением граничной поверхности и, в частности, составляющей смещения, нормальной к поверхности. Удобно использовать сфероидальные координаты [11]. Введем две сфероидальные системы координат, поскольку уравнение Лапласа встречается в двоякой форме: для потенциала и для гидродинамических характеристик.

Пусть ξ и η — указанные координаты в первом случае. Они связаны с декартовыми координатами, точнее с координатами $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и x_3, соотношениями

$$R = \left[\frac{(a_1^2 - a_3^2 + \xi)(a_1^2 - a_3^2 + \eta)}{a_1^2 - a_3^2}\right]^{1/2}, \quad x_3 = \pm\left[-\frac{\xi\eta}{a_1^2 - a_3^2}\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

($\xi = a_3^2$ на поверхности эллипсоида).

Аналогичные формулы имеем и для искаженных сфероидальных координат λ и μ (при замене в (3.3) ξ, η на λ, μ и a_3 на a_3').

Отметим, что в выражениях для x_3 (и x_3') двузначность возникает из-за возможности выбора положения точки на верхней или нижней половине эллипсоида. Из связи между старыми и новыми координатами на поверхности следует, что $\eta/\mu = (a_1^2 - a_3^2)/(a_1^2 - a_3^2)$.

В обоих случаях азимутальный угол $\varphi = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ остается тем же самым.

Далее будем действовать следующим образом: зададим потенциал возмущения сначала в общем виде, по нему найдем соответствующее поле скоростей и вызванную колебаниями деформацию границы. С другой стороны, смещение этой границы должно порождать то возмущение потенциала, с которого и начинается расчет. Сравнение обоих результатов позволит найти частоты собственных колебаний ω и форму возмущений.

Считая возмущения потенциала пропорциональными $e^{ik\varphi}$, выберем общее решение для внутреннего и внешнего потенциала, выраженное известным рядом

$$\begin{gathered} V_i = \sum_n \beta_n P_n^k(\eta')\, p_n^k(\xi')\, q_n^k(z)\, e^{ik\varphi} \\ V_e = \sum_n \beta_n P_n^k(\eta')\, q_n^k(\xi')\, p_n^k(z)\, e^{ik\varphi} \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\eta' = \sqrt{-\eta/(a_1^2 - a_3'^2)}, \quad \xi' = \sqrt{\xi/(a_1^2 - a_3'^2)}, \quad z = a_3/\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$$

(β_n — некоторые коэффициенты). Здесь использованы функции $p_n^k(z) = i^{k-n} P_n^k(iz)$, $q_n^k(z) = i^{-k+n+1} Q_n^k(iz)$, $P_n^k(z)$ — присоединенная функция Лежандра. $Q_n^k(z)$ — функция Лежандра второго рода.

Скачок нормальной производной на границе определится формулой

$$\partial V_e/\partial n - \partial V_i/\partial n = -4\pi G\rho\zeta$$

($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль на элементе поверхности), левая часть которой в силу формул (3.4) приводится к виду

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = \sum_n \beta_n P_n^k(\eta') \frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 - \eta)}} (q_n^{k\prime} p_n^k - p_n^{k\prime} q_n^k) e^{ik\varphi}$$

Но поскольку $q_n^{k\prime} p_n^k - p_n^{k\prime} q_n^k = -(1 + z^2)^{-1}$, нормальное смещение выразится следующим образом:

$$\zeta = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{4\pi G\rho a_1 \sqrt{a_3^2 - \eta}} \sum_n \beta_n P_n^k(\eta') e^{ik\varphi} \tag{3.5}$$

Необходимо учесть теперь изменение давления в возмущенном состоянии. Физическое граничное условие для давления, требующее, чтобы оно обращалось в нуль на поверхности граничного эллипсоида, должно приводиться к форме $p = p_0^{(c)} \sqrt{1 - R^2/a_1^2 - x_3^2/a_3^2}$ ($p_0^{(c)}$ — давление в центре), т. е. $|\operatorname{grad} p| = 2_{p_0}^{(c)} \sqrt{R^2/a_1^4 + x_3^2/a_3^4}$. Учитывая предыдущую формулу, из соотношения $\delta_1 p + \zeta \operatorname{grad} p = 0$ находим изменение давления в неподвижной точке

$$\delta_1 p = \frac{2p_0^{(c)} \sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{4\pi G\rho a_1^2 a_3} \sum_n \beta_n P_n^k(\eta') e^{ik\varphi} \tag{3.6}$$

Перейдем к искаженным в вышеуказанном смысле координатам λ и μ. В них суммарный потенциал на поверхности определится формулой

$$V_1 = \sum_n \beta_n s_n P_n^k(\mu') e^{ik\varphi} \quad (\mu' = \sqrt{-\mu/(a_1^2 - a_3'^2)})$$

где в соответствии с формулой (3.6)

$$s_n = p_n^k(z) q_n^k(z) - 2p_0^{(c)} \sqrt{a_1^2 - a_3^2}/(4\pi G\rho^2 a_1^2 a_3) \tag{3.7}$$

После продолжения во внутреннюю область (т. е. решения задачи Дирихле для функции V_1) имеем

$$\begin{gathered} V_1 = \sum_n \beta_n s_n P_n^k(\mu') p_n^k(\lambda') e^{ik\varphi}/p_n^k(z') \\ \lambda' = \sqrt{\lambda/(a_1^2 - a_3'^2)}, \quad z' = a_3'/\sqrt{a_1^2 - a_3'^2} \end{gathered} \tag{3.8}$$

С другой стороны, нормальное смещение

$$\zeta = \alpha_1 \delta x_1 + \alpha_2 \delta x_2 + \alpha_3 \delta x_3 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)/(i\omega)$$

где α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы внешней нормали на элементе поверхности. Отсюда и из формул (3.1) находим

$$\zeta = -\frac{a_1 a_3}{\omega^2 \tau^2 \sqrt{a_3^2 - \eta}} \left(\frac{1}{a_1^2} R \frac{\partial V_1}{\partial R} + \frac{1}{a_3'^2} x_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{2k\Omega}{\omega a_1^2} V_1 \right) \tag{3.9}$$

Вычисляя согласно формуле (3.8) значения входящих в формулу (3.9) производных потенциала на поверхности, представим смещение в виде

$$\begin{gathered} \zeta = -\frac{a_1 a_3}{\omega^2 \tau^2 \sqrt{a_3^2 - \eta}} \sum_n c_n P_n^k(\mu') \left[\frac{2k\Omega}{\omega a_1^2} p_n^k(z') + \frac{p_n^{k\prime}(z')}{a_3' \sqrt{a_1^2 - a_3'^2}} \right] e^{ik\varphi}, \\ c_n = \frac{\beta_n s_n}{p_n^k(z')} \end{gathered} \tag{3.10}$$

(величины s_n определены формулой (3.7)).

Сравнение формул (3.5) и (3.10) показывает, что члены с разными значениями n ведут себя независимым образом: величина ζ каждого собственного колебания оказывается пропорциональной своей функции $P_n^k(\mu')$. Чтобы при взаимном согласовании уравнений все c_n не обратились одновременно в нуль, необходимо выпадение одного из c_n за счет обращения в нуль коэффициента перед ним, зависящего от ω. Этим в принципе определяется возможный спектр значений ω. Подчеркнем также, что симметрия по азимуту очевидна, так как для любой системы с вращательной симметрией собственные колебания классифицируются по индексу k. Симметрия по n не вызвана столь наглядными соображениями ее трудно было предсказать заранее.

Таким образом, приходим к выводу, что для справедливости гидродинамических уравнений требуется, чтобы только одна из величин c_n была отлична от нуля.

Приведенные рассуждения позволяют вывести из формул (3.5) и (3.10) дисперсионное уравнение для собственных частот колебаний эллипсоидов вращения. После некоторых преобразований, которые здесь опускаем, указанное уравнение может быть представлено в виде, нередко приводимом в литературе [12]

$$[p_1^\circ(z)q_1^\circ(z) - p_n^k(z)q_n^k(z)]\,[k\omega D^k P_n(\vartheta_0) + \vartheta_0(\omega - 2\Omega)(1 + z^{-2})D^{k+1}P_n(\vartheta_0)] = \\ = \omega^2(\omega - 2\Omega)q_2^\circ(z)D^kP_n(\vartheta_0)/\Omega^2,\ \vartheta_0 = iz' \tag{3.11}$$

где D — оператор дифференцирования. Уравнение (3.11) было впервые получено Брайаном [2].

Таким образом, найдены собственные колебания эллипсоидов вращения. Для каждого набора k и n определены собственные колебания с точностью до произвольного множителя. Характерно, что форма возмущения потенциала при заданных n и k не зависит от конкретного выбора корня дисперсионного уравнения.

4. Для учета вязкости введем так называемую внешнюю вязкость, т. е. трение газовой массы (фигуры) о пронизывающий ее фон. Плотность газовой среды предполагается все время постоянной. Фон считается вращающимся с заданной угловой скоростью Ω, с которой вращается и сам сфероид. Очевидно, в стационарном состоянии трение отсутствует и появляется только в результате колебаний фигуры. Зависимость трения от относительной скорости газа и фона считаем, как обычно [13], линейной с коэффициентом пропорциональности σ ($\sigma > 0$). Линеаризованные уравнения движения (3.1) перепишутся таким образом, что величины $i\omega u_k$ в левых частях заменятся на $i\omega u_k + \sigma u_k$ ($k = 1, 2, 3$). Эти уравнения вместе с условием несжимаемости снова приводят к формуле (3.2), но в выражении для τ происходит замена ω на $\omega - i\sigma$. Далее, в формуле (3.10) величина ω^2 просто меняется на $\omega(\omega - i\sigma)$. Наконец, тот же самый коэффициент $(\omega - i\sigma)/\omega$ переходит и в левую часть дисперсионного уравнения (3.11), в других местах опять-таки вместо ω фигурирует $\omega' = \omega - i\sigma$.

В качестве наиболее важного приложения рассмотрим пульсационные колебания фигуры, что соответствует $n = 2$, $k = 0$. Дисперсионное уравнение (3.11) после незначительных преобразований примет вид

$$6h(z)(1 + z^2)\Omega^{-2}\omega' - q_2^\circ(z)[(3z^2 + 1)\omega'^2 - 4\Omega^2(1 + z^2)](\omega' + i\sigma) = 0 \\ h(z) = p_1^\circ(z)q_1^\circ(z) - p_2^\circ(z)q_2^\circ(z) \tag{4.1}$$

Если $\sigma = 0$, то имеем нулевой корень, причем рассмотрим тот корень дисперсионного уравнения, который в случае идеальной жидкости обратился бы в нуль. Существование такого нулевого корня ω соответствует просто возможности небольшого изменения угловой скорости вращения Ω. При отличном от нуля, но малом значении σ по непрерывности соответствующий корень мал и его можно искать в виде $\omega' = y\sigma + O(\sigma^2)$, причем $\omega = (y + i)\,\sigma$. Находим

$$\omega = i\sigma h(z) \,/\, [h(z) + {}^2/_3 q_2^\circ (z)] \tag{4.2}$$

Простые вычисления позволяют получить

$$h(z) = (1 + z^2)\,[-(9z^2 + 1)(\operatorname{arctg} z^{-1})/4 + z\,(9z^2 + 7) \,/\, (4\,(1 + z^2))]$$

Обращение в нуль написанного выражения соответствует максимуму угловой скорости вращения фигуры [3], для которого $\Omega^2_{\max} = 0{,}449331$ (при этом эксцентриситет меридионального сечения $e = 0{,}92995$).

С другой стороны,

$$3h(z) + 2q_2^\circ(z) = (1 + 6z^2 + 27z^4)\operatorname{arctg} z^{-2} + 9z + 27z^3$$

Воспользовавшись очевидным неравенством $\operatorname{arctg}\varphi < \varphi$ при $\varphi > 0$ ($\operatorname{tg}\varphi_1 > \varphi_1$, $0 < \varphi_1 < 2\pi$), устанавливаем, что знаменатель в формуле (4.2) положителен.

Поскольку случай $\operatorname{Im} z < 0$ соответствует неустойчивости колебаний, то заключаем, что неустойчивость пульсаций получается при $h(z) < 0$, т. е. при $z > z^*$, где z^* соответствует наиболее быстро вращающемуся сфероиду Маклорена (критическому). Иначе говоря, неустойчивость наступает для эллипсоидов, сплюснутость которых больше некоторого критического значения. Таким образом, имеем дело с вековой неустойчивостью при фиксированной угловой скорости вращения.

Подчеркнем, что рассматривалась только одна колебательная мода.

Автор благодарит В. А. Антонова за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. *Bryan G. H.* The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1889. V. 180. P. 187—219.
3. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
4. *Антонов В. А.* Фигуры равновесия // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 10. С. 7—60.
5. *Аппелль П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 375 с.
6. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
7. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
9. *Chandrasekhar S.* The oscillations of viscous liquid globe // Proc. London Math. Soc. 1959. V. 9. No. 33. P. 141—149.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
11. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 269 с.
12. *Поляченко В. Л., Фридман А. М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976. 447 с.
13. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
25.IV.1990