Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 62—50

А. В. Плотников, Л. И. Плотникова

ДВЕ ЗАДАЧИ ВСТРЕЧИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматриваются две задачи встречи нескольких управляемых объектов, описываемых нелинейными дифференциальными включениями, правая часть которых содержит управление. Получены необходимые условия оптимальности управлений в форме принципа максимума.

Ранее подобные задачи были рассмотрены для однозначного случая [1] и для многозначного линейного случая [1].

1. Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство с нормой $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Через $\operatorname{conv}(R^n)$ обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных и выпуклых подмножеств из R^n. Метрика $h(A, B)$ между множествами A, B из $\operatorname{conv}(R^n)$ определяется по формуле

$$h(A, B) = \min\{r \geqslant 0 \mid A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\},$$

где $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса $z > 0$ с центром в точке $a \in R^n$.

Обозначим через $\operatorname{cc}(R^n)$ пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства $\operatorname{conv}(R^n)$, с метрикой, определенной по формуле

$$\delta(A, B) = \max\{\max_{a \in A}\min_{b \in B} h(a, b), \max_{b \in B}\min_{a \in A} h(a, b)\}$$

Пусть $L_n^M[t_0, T]$ — пространство всех измеримых и интегрируемых на $[t_0, T]$ многозначных отображений F: $[t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ с метрикой

$$p(F, G) = \int_{t_0}^{T} h(F(t), G(t))\, dt$$

Определение 1 [2]. Будем говорить, что последовательность $\{F_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ из $L_n^M[t_0, T]$ сходится слабо к $F(\cdot) \in L_n^M[t_0, T]$, если справедливо одно из следующих эквивалентных утверждений:

1) для каждой ограниченной и измеримой функции p: $[t_0, T] \to R^n$ последовательность множеств $\left\{\int_{t_0}^{T} p^T(t) F_K(t)\, dt\right\}_{K=1}^{\infty}$ в R^1 сходится к $\int_{t_0}^{T} p^T(t) F(t) dt$;

2) для каждой ограниченной и измеримой функции p: $[t_0, T] \to R^n$ последовательность вещественных чисел $\left\{\int_{t_0}^{T} C(F_K(t), p(t))\, dt\right\}_{K=1}^{\infty}$ сходится к $\int_{t_0}^{T} C(F(t), p(t)) dt$;

---

[1] *Раджеф М. С.* Исследование одной задачи оптимального управления M-объектами с многозначными траекториями. ОГУ им. И. И. Мечникова. Одесса, 1983 22 с.—Деп. в УкрНИИНТИ 30.01.84, № 137—Ук84.

3) для каждого $p \in R^n$ и измеримого подмножества M из $[t_0, T]$ последовательность $\left\{\int\limits_M C(F_K(t), p)\,dt\right\}_{K=1}^{\infty}$ сходится к $\int\limits_M C(F(t), p)dt$.

Пусть поведение объекта описывается следующим дифференциальным уравнением с многозначной правой частью:

$$\dot{x} \in F(t, x, u), \; x \in R^n, \; u \in R^m \tag{1.1}$$
$$F\colon R^1 \times R^n \times R^m \to \operatorname{conv}(R^n),$$

где x — фазовый вектор, u — вектор управления, F — многозначное отображение (МО).

Считаем известным начальное состояние объекта

$$x(t_0) = x^\circ, \; x^\circ \in R^n \tag{1.2}$$

Пусть задано МО

$$U : R^1 \to \operatorname{conv}(R^m) \tag{1.3}$$

Определение 2. Класс LU допустимых управлений объекта (1.1), (1.2) состоит из всех измеримых селекторов МО (1.3).

Пусть система (1.1)—(1.3) удовлетворяет следующим предположениям.

А1. а) МО $F(\cdot, x, u)$ измеримо по t на R^1 при фиксированных $(x, u) \in R^n \times R^m$; б) МО $F(t, \cdot, u)$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L по x на R^n при фиксированных $(t, u) \in R^1 \times R^m$; в) МО $F(t, x, \cdot)$ непрерывно по u на R^m при фиксированных $(t, x) \in R^1 \times R^n$;

А2. Существует функция $k(\cdot) \in L_1^1(R^1)$, такая, что $|F(t, x, u)| \leqslant k(t)$ для почти всех $(t, x, u) \in R^1 \times R^n \times R^m$;

А3. МО U: $R^1 \to \operatorname{conv}(R^m)$ измеримо по t на R^1;

А4. Существует функция $l(\cdot) \in L_1^1(R^1)$, такая, что $|U(t)| \leqslant l(t)$ для почти всех $t \in R^1$.

А5. Если последовательность $\{u_K(\cdot)\}_{K=1}^{\infty}$ из LU сходится слабо к $u_*(\cdot) \in$ LU, то для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot)$ последовательность $\{F(\cdot, x(\cdot), u_K(\cdot))\}_{K=1}^{\infty}$ слабо сходится к $F(\cdot, x(\cdot), u_*(\cdot))$;

А6. При почти всех $t \in R^1$ и для любых чисел $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ и точек $x_1, x_2 \in S_{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}(0)$ выполняется условие

$$\alpha R(t, x_1) + \beta R(t, x_2) \subset R(t, \alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$\Big(R(t, x) \equiv \bigcup_{u \in U(t)} F(t, x, u)\Big)$$

и для любого $u(\cdot) \in LU$ выполняется условие

$$\alpha F(t, x_1, u(t)) + \beta F(t, x_2, u(t)) \in F(t, \alpha x_1 + \beta x_2, u(t)).$$

А7. Опорная функция $C(F(t, x, u), \psi)$ множества $F(t, x, u)$ непрерывно дифференцируема по x при почти всех $(t, u, \psi) \in R^1 \times R^m \times R^n$;

А8. Существует функция $m(\cdot) \in L_1^1(R^1)$, такая, что для любых двух векторов $\psi_1, \psi_2 \in R^n$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial C(F(t, x, u), \psi_1)}{\partial x} - \frac{\partial C(F(t, x, u), \psi_2)}{\partial x} \right| \leqslant m(t)\,|\psi_1 - \psi_2|$$

Определение 3. Будем называть многозначной траекторией (МТ) системы (1.1), (1.2), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot) \in$ LU, МО $X(\cdot, u)$, значение которого в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ равно сечению множества решений дифференциального включения (1.1), (1.2), соответствующего управлению $u(\cdot) \in$ LU.

Определение 4. Множеством достижимости $Y(T)$ системы (1.1)—(1.3) назовем множество всех подмножеств пространства $\operatorname{conv}(R^n)$, в которое можно перейти на отрезке времени $[t_0, T]$ из начального состояния $x^\circ \in R^n$ по решениям дифференциального включения (1.1) при всевозможных допустимых управлениях семейства LU, т. е. $Y(T) = \{X(T, u), u(\cdot) \in \mathrm{LU}\}$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A1 — A6. Тогда множество достижимости $Y(T)$ системы (1.1)—(1.3) компактно, т. е. $Y(T) \in \operatorname{cc}(R^n)$.[2]

2. Рассмотрим N ($N \geqslant 2$) управляемых объектов, поведение которых описываются дифференциальными включениями, содержащими управление

$$x_i^{\cdot} \in F_i(t, x_i, u_i);\ x_i \in R^n,\ u_i \in R^{m_i} \tag{2.1}$$
$$F_i\colon R^1 \times R^n \times R^{m_i} \to \operatorname{conv}(R^n)$$

где x_i — фазовый вектор, u_i — вектор управления, F_i — МО, здесь и всюду далее $i = 1, 2, \ldots, N$.

Считаем известными начальное положение каждого объекта

$$x_i(t_0) = x_i^\circ \tag{2.2}$$

Пусть заданы МО

$$U_i\colon R^1 \to \operatorname{conv}(R^{m_i}) \tag{2.3}$$

Обозначим через LU_i множество допустимых управлений i-го объекта.

Пусть МО $F_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $U_i(\cdot)$ удовлетворяют условиям A1 — A8.

Рассмотрим следующие задачи оптимального приведения всех N объектов в одну и ту же точку (или в одно и то же множество) фазового пространства R^n.

Задача 1. Определить величины $T_i > t_0$ и управления $u_i(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$, такие, что для соответствующих МТ $X_i(\cdot, u_i)$ системы (2.1)—(2.3): во-первых, пересечение множеств $X_i(T_i, u_i)$ непусто, т. е.

$$X_1(T_1, u_1) \cap \ldots \cap X_N(T_N, u_N) \neq \varnothing \tag{2.4}$$

и, во-вторых, достигает минимума величина

$$J = T,\ T = \max\{T_i\} \tag{2.5}$$

Определение 5. Набор допустимых управлений $u_* = (u_{1*}, \ldots, u_{N*})$ называется оптимальным, если для соответствующих им МТ $X_i(\cdot, u_{i*})$ системы (2.1)—(2.3) имеют место следующие соотношения:

1) $X_1(T_1, u_{1*}) \cap \ldots \cap X_N(T_N, u_{N*}) \neq \varnothing$;

2) для любого $j \in \{1, \ldots, N\}$ при $\tau_J < T_J$ имеем

$$X_1(T_1, u_{1*}) \cap \ldots \cap X_j(\tau_J, u_J) \cap \ldots \cap X_N(T_N, u_{N*}) \neq \varnothing,$$
$$\forall u_j(\cdot) \in \mathrm{LU}_J$$

В этом случае МТ $X_i(\cdot, u_{i*})$ назовем оптимальными.

Определение 6. Будем говорить, что пары $(u_{i*}(\cdot), X_i(\cdot, u_{i*}))$ удовлетворяют принципу максимума соответственно на отрезках $[t_0, T_i]$, если существуют векторные функции $\psi_{i*}(\cdot)$, которые являются нетривиальными решениями соответствующих дифференциальных уравнений

$$\psi_i^{\cdot} = -\frac{\partial C(F_i(t, x_{i*}(t), u_{i*}(t)), \psi_i)}{\partial x} \tag{2.6}$$

и справедливы следующие условия:

---

[2] Доказательство дано в работе: *Плотников А В.* Компактность множества достижимости дифференциального включения, содержащего управление. ОГУ им. И. И. Мечникова. Одесса, 1988. 31 с.— Деп в УкрНИИНТИ 11.05.88, № 1145—Ук88.

1) условие максимума

$$C\,(F_i\,(t,\,x_{i*}(t),\,u_{i*}(t)),\ \psi_{i*}(t)) = \max_{u_i\in U_i(t)} C\,(F_i\,(t, x_{i*}(t), u_i), \psi_{i*}(t)), \quad (2.7)$$

где $x_{i*}(\cdot)$ — решение уравнения

$$(x_{i*}^{\cdot}(t), \psi_{i*}(t)) = \frac{\partial C\,(X_i\,(t, u_{i*}), \psi_{i*}(t))}{\partial t} = C\,(F_i\,(t, x_{i*}(t), u_{i*}(t)), \psi_{i*}(t))$$

для почти всех $t \in [t_0,\ T_i]$;

2) условие трансверсальности

$$C\,(X_i\,(T_i, u_{i*}), \psi_{i*}(T_i)) = -C\,(\bigcap_{i=1}^{N} X_i\,(T_i, u_{i*}), -\psi_{i*}(T_i))$$

Теорема 2. Предположим, что в задаче 1 набор допустимых управлений $u_*(\cdot) = (u_{1*}(\cdot), \ldots, u_{N*}(\cdot))$ оптимален, а $X_i\,(\cdot,\,u_{i*})$ — соответствующие им МТ системы (2.1)—(2.3). Тогда пары $(u_{i*}(\cdot),\ X_i\,(\cdot,\,u_{i*}))$ удовлетворяют принципу максимума на отрезках $[t_0,\ T_i]$.

Доказательство. Пусть $u_{i*}(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$ — оптимальное управление i-го объекта, а $X_i\,(\cdot,\,u_{i*})$ — соответствующая ему МТ. Тогда имеем

$$X_i\,(T_i,\,u_{i*}) \in Y_i\,(T_i),\ X_i\,(T_i,\,u_{i*}) \cap S_k \neq \varnothing \quad (2.8)$$

$$S_K = \bigcap_{i=1}^{N} X_i\,(T_i, u_{i*})$$

где $Y_i\,(T_i)$ — множество достижимости i-го объекта в момент времени T_i.

Следовательно, из (2.8) и предположения А6 имеем

$$\max_{X_i\in Y_i(T_i)} C\,(X_i, \psi_i) + C\,(S_K, -\psi_i) \geqslant 0, \quad \forall \psi_i \in R^n \quad (2.9)$$

Если обозначить

$$\omega_i = \max_{X_i\in Y_i(T_i)}\ \min_{\psi_i\in S_1(0)} [C\,(X_i, \psi_i) + C\,(S_K, -\psi_i)], \quad (2.10)$$

то $\omega_i \geqslant 0$. Действительно, если $\omega_i < 0$, то не существует такого множества $X_i \in Y_i\,(T_i)$, чтобы для всех $\psi_i \in S_1\,(0)$ выполнялось неравенство

$$C\,(X_i,\,\psi_i) + C\,(S_K,\,-\psi_i) \geqslant 0$$

(это противоречит неравенству (2.9)).

Докажем, что $\omega_i = 0$ и равенство нулю достигается при $X_i = X_i\,(T_i,\,u_{i*})$ и некотором $\psi_i = \psi_i^\circ \in S_1\,(0)$.

Действительно, из соотношения $X_i\,(T_i,\,u_{i*}) \cap S_K \neq \varnothing$ следует, что

$$\omega_i = C\,(X_i\,(T_i,\,u_{i*}),\,\psi_i) + C\,(S_K,\,-\psi_i) \geqslant 0,\ \forall \psi_i \in S_1\,(0)$$

Функция $\omega_i\,(T_i, \psi_i)$ непрерывна по T_i и ψ_i в силу свойства непрерывности опорных функций и множества $Y_i\,(T_i)$.

Если предположить, что

$$\omega_i\,(T_i,\,\psi_i) > 0,\ \forall \psi_i \in S_1\,(0)$$

а следовательно, и $\omega_i \neq 0$, то получим

$$\omega_i^\circ(T_i) = \min_{\psi_i\in S_1(0)} \omega_i\,(T_i, \psi_i) \geqslant \alpha_i > 0$$

и функция $\omega_i^\circ\,(T_i)$ непрерывна. Следовательно, существует $\tau_i < T_i$, такое, что $\omega_i^\circ\,(\tau_i) \geqslant 0$. Это значит, что

$$C\,(X_i\,(\tau_i,\,u_{i*}),\,\psi_i) + C\,(S_K,\,-\psi_i) \geqslant 0,\ \forall \psi_i \in S_1\,(0),$$

т. е. $X_i\,(\tau_i,\,u_{i*}) \cap S_K \neq \varnothing$, что противоречит оптимальности траектории $X_i,\,(\cdot,\,u_{i*})$.

Если предположить, что $\omega_i > 0$ и максимум в (2.10) достигается при $X_i \neq X_i(T_i, u_{i*})$, то аналогично предыдущему приходим к противоречию.

Таким образом, существует такой вектор $\psi_i = \psi_i^\circ$, что

$$C(X_i(T_i, u_{i*}), \psi_i^\circ) = \max_{X_i \in Y_i(T_i)} C(X_i, \psi_i^\circ) \tag{2.11}$$

$$C(X_i(T_i, u_{i*}), \psi_i^\circ) = -C(S_K, -\psi_i^\circ) \tag{2.12}$$

Другими словами, вектор $x_i^\circ \in \partial X_i(T_i, u_{i*})$, для которого справедливы равенства

$$(x_i^\circ, \psi_i^\circ) = \max_{X_i \in Y_i(T_i)} C(X_i, \psi_i^\circ) = C(X_i(T_i, u_{i*}), \psi_i^\circ), \tag{2.13}$$

$$(x_i^\circ, \psi_i^\circ) = -C(S_K, -\psi_i^\circ) \tag{2.14}$$

Тогда существует функция $x_{i*}(\cdot)$, такая, что

$$x_{i*}(t) \in \partial X_i(t, u_{i*}), \quad t \in [t_0, T_i] \text{ и } x_{i*}(T_i) = x_i^\circ \tag{2.15}$$

и следовательно, существует функция $\psi_{i*}(\cdot) \in S_1(0)$, такая, что $(x_{i*}(t), \psi_{i*}(t)) = C(X_i(t, u_{i*}), \psi_{i*}(t))$ для почти всех $t \in [t_0, T_i]$ и $\psi_{i*}(T_i) = \psi_i^\circ$.

Очевидно, что $x_{i*}(\cdot)$ — граничное решение включения $\dot{x}_i \in R_i(t, x_i)$ и, следовательно, является оптимальным решением этого включения. Тогда, воспользовавшись известным результатом [3], можно записать для почти всех $t \in [t_0, T_i]$:

$$(\dot{x}_{i*}(t), \psi_{i*}(t)) = C(R_i(t, x_{i*}(t)), \psi_{i*}(t)) \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) следует, что для почти всех $t \in [t_0, T_i]$:

$$C(F_i(t, x_{i*}(t), u_{i*}(t)), \psi_{i*}(t)) = C(R_i(t, x_{i*}(t)), \psi_{i*}(t))$$

Отсюда для почти всех $t \in [t_0, T_i]$:

$$C(F_i(t, x_{i*}(t), u_{i*}(t)), \psi_{i*}(t)) = \max_{u_i \in U_i(t)} C(F_i(t, x_{i*}(t), u_i), \psi_{i*}(t))$$

Аналогично из [3] получаем, что функция $\psi_{i*}(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6) при $\psi_i(T_i) = \psi_i^\circ$.

Теорема доказана.

Задача 2. Определить величины $T_1 = \ldots = T_N = T$, $T > t_0$ и допустимые управления $u_{i*}(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$, такие, что для соответствующих МТ $X_i(\cdot, u_{i*})$ системы (2.1) — (2.3) имеет место соотношение (2.4) и величина (2.5) достигает минимума.

Обозначим через $R_0 = R^{K_1} \times \ldots \times R^{K_N}$ декартово произведение евклидовых пространств $R^{K_1}, \ldots, R^{K_N}$. Элементы x_0 пространства R_0 будем записывать в виде $x_0 = (x_1, \ldots, x_N)$, $x_i \in R^{K_i}$.

Введем в пространстве R_0 расстояние по формуле

$$\rho(x_0, y_0) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}, \quad x_0 = (x_1, \ldots, x_N), \quad y_0 = (y_1, \ldots, y_N)$$

Приведем задачу 2 с N объектами к задаче с одним фиктивным объектом в пространстве R_0. Введем в задаче 2 следующие обозначения [1]:

$$x_0 = (x_1, \ldots, x_N), \; x_i \in R^n; \; u_0 = (u_1, \ldots, u_N)$$

$$u_i \in R^{m_i}; \; F_0(t, x_0, u_0) = F_1(t, x_1, u_1) \times \ldots \times F_N(t, x_N, u_N)$$

Тогда система дифференциальных включений (2.1) — (2.3) принимает вид

$$\dot{x}_0 \in F_0(t, x_0, u_0), \; x_0(t_0) = x_0^\circ, \; x_0^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_N^\circ) \tag{2.17}$$

Условие (2.4) можно переписать в виде

$$H = X_0(T, u_0) \cap G \neq \varnothing \tag{2.18}$$

$$G = \{x_0 = (x_1, \ldots, x_N) \in R_0,\ x_1 = \ldots = x_N\}$$

$$X_0(T, u_0) = X_1(T, u_1) \times \ldots \times X_N(T, u_N)$$

Очевидно, что если отображения $F_i(.,.,.)$, $U_i(\cdot)$ удовлетворяют условиям А1 — А8, то и отображение $F_0(.,.,.)$, $U_0(\cdot) = U_1(\cdot) \times \ldots \times U_N(\cdot)$ удовлетворяют условиям А1 — А8.

Аналогично доказанному ранее (см. работу, цитированную в сноске на с. 754) можно доказать, что задача 2 эквивалентна следующей задаче.

Задача 3. Определить величину $T > t_0$ и допустимое управление $u_0(\cdot) \in \mathrm{LU}_0$, такие, что для МТ $X_0(\cdot, u_0)$ системы (2.17) имеет место условие (2.18) и величина (2.5) достигает минимума.

Замечание. Если $u_0(\cdot) \in \mathrm{LU}_0$ — оптимальное управление в задаче 3, то оно представимо в виде $u_0(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot))$, $u_i(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$ и управления $u_i(\cdot)$ являются оптимальными в задаче 2.

Если $u_i(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$ оптимальны в задаче 2, то управление $u_0(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot))$ является оптимальным в задаче 3.

Определение 7. Будем говорить, что пары $(u_{i*}(\cdot), X_i(\cdot, u_{i*}))$ удовлетворяют принципу максимума на отрезке $[t_0, T_i]$, если существует вектор $z \in R^n$ и векторные функции $\psi_{i*}(\cdot)$, являющиеся соответственно решениями системы дифференциальных уравнений (2.6) и выполняются следующие условия:

1) условие максимума, которое отличается от условия максимума в определении 6 тем, что оно должно выполняться хотя бы для одного значения i при почти всех $t \in [t_0, T]$;

2) условие трансверсальности

$$C(X_i(T, u_{i*}), \psi_{i*}(T)) = (z, \psi_{i*}(T))$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия А1 — А8 и пусть в задаче 2 T — минимальное значение функционала (2.5), $u_{i*}(\cdot) \in \mathrm{LU}_i$ — оптимальное управление, а $X_i(\cdot, u_{i*})$ — соответствующие им МТ системы (2.1)—(2.3). Тогда пары $(u_{i*}(\cdot), X_i(\cdot, u_{i*}))$ удовлетворяют принципу максимума на отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство. В силу замечания управление $u_{0*}(\cdot) = (u_{1*}(\cdot), \ldots, u_{N*}(\cdot))$ оптимально, а $X_0(\cdot, u_{0*}) = \prod_{i=1}^{N} X_i(\cdot, u_{i*})$ — соответствующая ему МТ в задаче 3. Следовательно, имеем

$$X_0(T, u_{0*}) \in Y_0(T),\ X_0(T, u_{0*}) \cup G \neq \varnothing$$

Используя схему рассуждений доказательства теоремы 2, получим существование векторной функции $\psi_{0*}(\cdot)$ — решения системы (2.6), такой, что

$$C(F_0(t, x_0(t), u_{0*}(t)), \psi_{0*}(t)) = \max_{u_0 \in U_0(t)} C(F_0(t, x_0(t), u_0), \psi_{0*}(t)) \tag{2.19}$$

для почти всех $t \in [t_0, T]$;

$$C(X_0(T, u_{0*}), \psi_{0*}(T)) = -C(G, -\psi_{0*}(T)) \tag{2.20}$$

Соотношение (2.20) можно записать в следующем виде:

$$C(X_0(T, u_{0*}), \psi_{0*}(T)) = C(z, \psi_{0*}(T)).$$

$$z = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N),\ \bar{x}_1 = \ldots = \bar{x}_N = \bar{x},\ \bar{x} \in R^n \tag{2.21}$$

Из (2.19) и (2.21), получим

$$C\ (X_i\ (T,\ u_{i*}),\ \psi_{i*}\ (T)) = (\bar{x},\ \psi_{i*}\ (T))$$

и существует хотя бы одно значение i, для которого выполняется условие (2.7) при почти всех $t \in [t_0,\ T]$; $\psi_{i*}\ (\cdot)$ — решение системы (2.6). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотникова Л. И.* Об одной задаче оптимального управления // Управляемые системы. Новосибирск: Наука, 1970. Вып. 6. С. 36—43.
2. *Artstein Z.* Weak convergence of set-valued functions and control // SIAM J. Control. 1975. V. 13. No. 4. P. 865—878.
3. *Благодатских В. И.* Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т. 166. С. 23—43.

Одесса

Поступила в редакцию
3.VII.1990