

УДК 62—50

© 1991 г.

А. А. Меликян, Н. В. Овакимян

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ДВУМЕРНОМ КОНУСЕ

Рассматривается дифференциальная игра преследования, в которой игроки — управляемые по скорости точки трехмерного евклидова пространства осуществляют простое движение по двумерной конической поверхности, т. е. в каждый момент времени могут выбрать произвольное, касательное к конусу направление векторов своих скоростей, ограниченных по величине константами. Преследователь имеет строгое превосходство по скорости. Показано, что с использованием автомобильных переменных исходная игра с уравнениями динамики четвертого порядка может быть сведена к двумерной. На основе необходимых условий оптимальности построено полное решение позиционной игры преследования. Показано, что в основной части фазового пространства оптимальным является движение игроков вдоль соединяющей их геодезической линии. В другой части пространства каждый игрок движется вдоль своей геодезической линии; огибающие этих геодезических являются особыми эквивокальными траекториями. Эквивокальная поверхность является основным элементом синтеза, позволяющим построить полный оптимальный фазовый портрет игровой задачи. Установлено, что при некоторых значениях параметров задачи существует и третий тип оптимальных движений. В соответствующей подобласти фазового пространства время преследования не зависит от положения убегающей точки; из этих стартовых точек встреча игроков осуществляется в вершине конуса. Вопросы достаточности условий оптимальности не рассмотрены.

Исследования данной работы используют методику статьи [1] и развивают ее результаты.

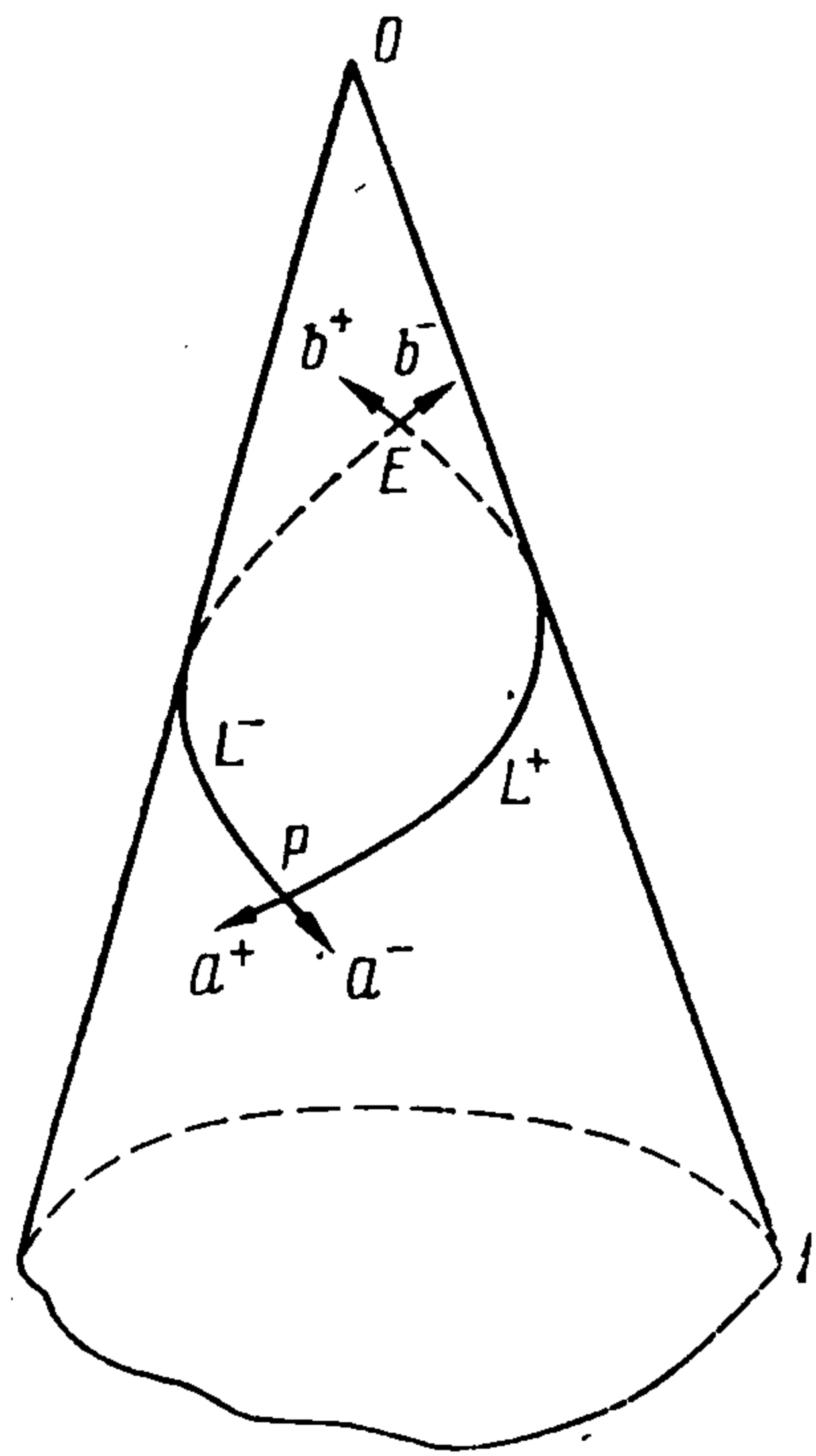
1. Постановка задачи. Пусть точки (игроки) P , E движутся по замкнутой двумерной конической поверхности K_0 , рассматриваемой в трехмерном евклидовом пространстве (фиг. 1). Скорость точки P по предположению не превышает единицы, скорость точки E не превышает v , $0 < v < 1$. Открытое множество $K_0 \setminus 0$, конус без вершины 0 будем обозначать K . Параметризовав конус K , уравнения движения точек P и E по двумерной поверхности можно представить в следующем виде:

$$P : \dot{x} = u, u \in E_1(x), E : \dot{y} = v, v \in E_v(y) \quad (1.1)$$

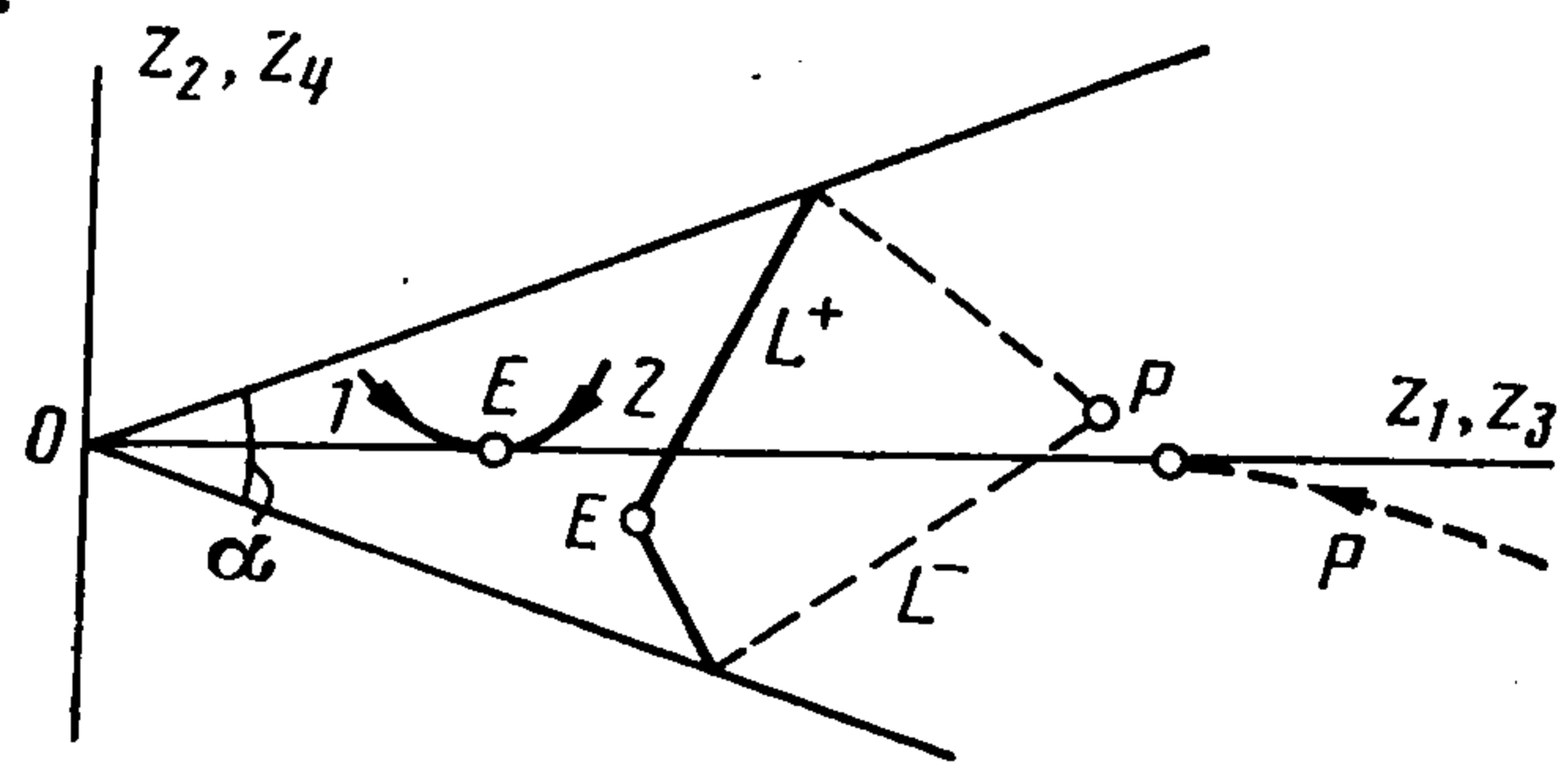
Здесь $x, y \in R^2$ — локальные координаты точек P и E ; $E_\alpha(x) \equiv \{u \in R^2: \langle G(x)u, u \rangle \leq \alpha^2\}$ — эллипс касательных векторов в точке $x \in K$, $\alpha \geq 0$; $G(x)$ — метрический тензор многообразия K . Полагаем, что метрика G индуцирована на K евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства. Положительно определенная матрица $G(x)$ определяет первую квадратичную форму поверхности [2]; ее элементы можно вычислить, выразив квадрат дифференциала евклидовой длины дуги на K через параметры x . Обозначим через $L = L(x, y)$ расстояние между точками $P, E \in K$, т. е. длину минимальной геодезической линии $\gamma \subset K$, соединяющей P и E . Игра начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается при $t = T > 0$, когда впервые выполняется условие

$$L(x(T), y(T)) = 0 \quad (1.2)$$

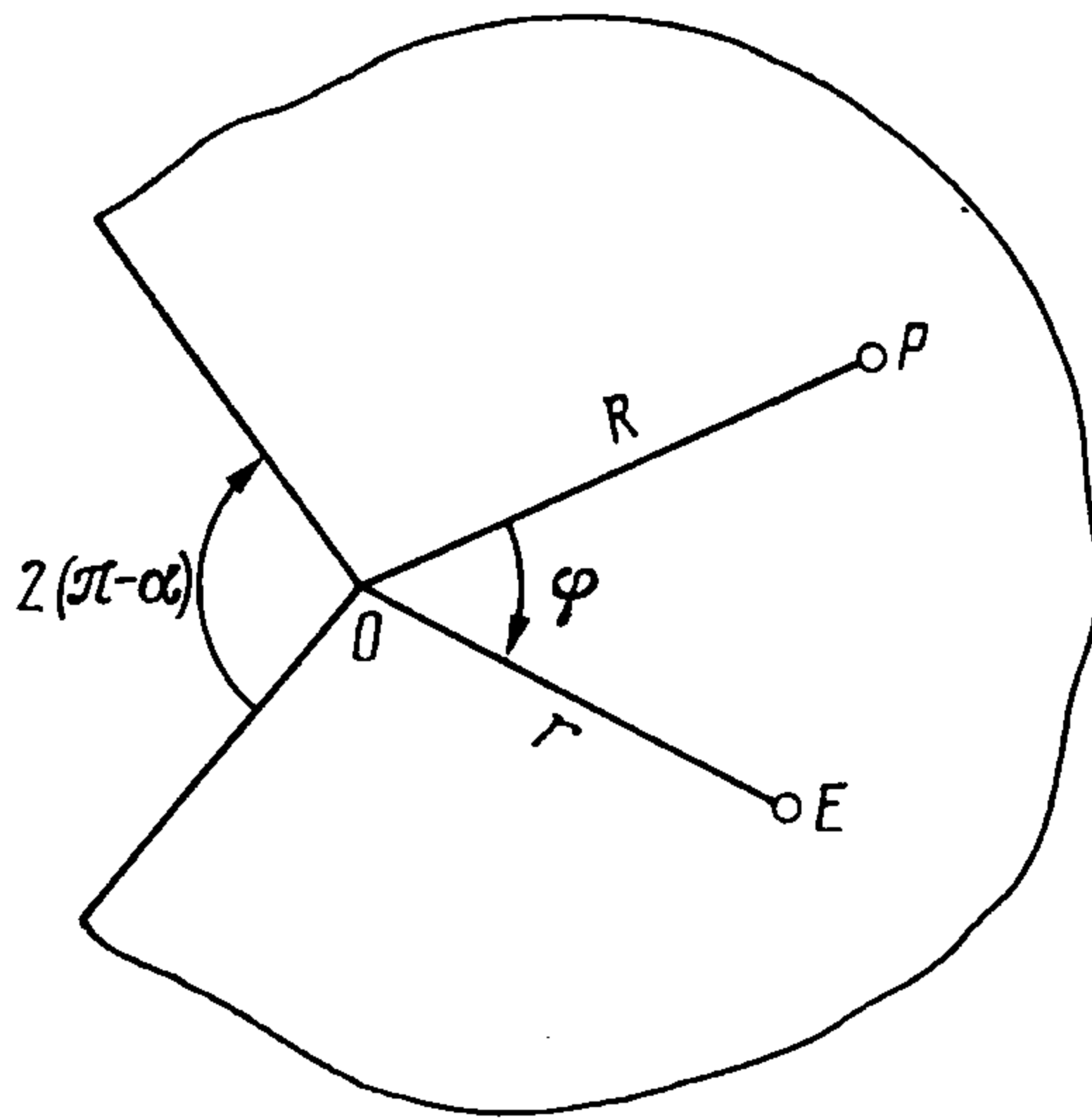
причем игрок P минимизирует время T , а E максимизирует. При $t = 0$ выполнено $L > 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Игровую задачу (1.1), (1.2) будем рассматривать в классе позиционных управлений игроков, предполагая их полную информированность о динамике игры и текущей позиции игры $(x, y) \in K \times K$ [3].

Поскольку конус K допускает развертку на плоскость, то локальные координаты можно выбрать евклидовыми, т. е. существует замена переменных $x, y \rightarrow x, y$, после которой уравнения простых движений (1.1) примут вид

$$P : \dot{x} = u, |u| \leq 1, E : \dot{y} = v, |v| \leq v \quad (1.3)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — локальные координаты точек P, E (фиг. 2), $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$ — евклидова длина вектора скорости u . Введем также четырехмерный вектор фазового состояния игры $z \in Q^4 : z_i = x_i, z_{i+2} = y_i, i = 1, 2$. Указанная замена переменных возникает, например, если подвергнуть конус специальной деформации: сложить по произвольной паре противоположных образующих $\gamma_1, \gamma_2 \subset K$ в плоский двусторонний угол, который также будем обозначать K . Длина геодезической линии при этом сохраняется (фиг. 2). Через α на фиг. 2, 3 обозначена половина угла полной развертки конуса на плоскость $0 < \alpha < \pi$. При $\alpha = 0$ K_0 превращается в луч, при $\alpha = \pi$ — в евклидову плоскость.

Геодезическими линиями на угле K будут ломаные линии, углы «падения и отражения» которых относительно сторон угла K равны (фиг. 2).

Таким образом, можно считать, что физическим пространством игры является плоский двусторонний угол K_0 ; игра заканчивается, если точки P и E находятся на одной и той же стороне угла и их евклидовы координаты совпадают.

При этом игроки, находясь на сторонах γ_1, γ_2 угла K , могут продолжить движение как по «прямой», так и «обратной» стороне угла. Строго говоря, компоненты векторов x, y следует снабдить еще одним двузначным индексом, указывающим сторону поверхности, на которой находятся точки P, E . Для простоты он опущен, в необходимых случаях даются дополнительные пояснения. Отметим, что различный выбор образующих конуса γ_1, γ_2 , по которым он складывается в плоский угол, соответствует различным разбиениям многообразия K на карты [2].

В вершине O конуса K_0 игроки также могут находиться. В точке O не существует

касательной плоскости к K_0 , поэтому ограничения на допустимые скорости игроков не описываются включениями вида (1.1). В точке O существует касательный конус (совпадающий с K). Допустимыми скоростями движения при $P = O$, ($E = O$) являются векторы трехмерного евклидова пространства, направленные по образующим конуса K и не превышающие по модулю единицы (величины v). Более подробный анализ особенности, связанной с вершиной O , оказывается ненужным, поскольку, как будет показано ниже, при оптимальном поведении игроков вершина может служить лишь начальной или конечной точкой траекторий игроков. Иными словами, в качестве фазового можно рассматривать также гладкое многообразие K , заменив условие (1.2) для случая поимки в точке O предельным соотношением $L \rightarrow O$ при $t \rightarrow T - 0$.

Поскольку для формирования позиционных управлений и условия окончания игры достаточно знать лишь относительное положение игроков, то, используя переменные r, R, φ , смысл которых ясен из фиг. 3, можно игровую задачу (1.1)–(1.3) сформулировать в терминах трехмерных уравнений динамики и условия окончания следующего вида:

$$\begin{aligned} R' &= u_1, \quad r' = v_1, \quad \varphi' = v_2/r - u_2/R, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq v \\ R(T) &= r(T), \quad \varphi(T) = 0 \quad (R(T) = r(T) = 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь u_i, v_i — проекции скоростей точек P, E на оси подвижных прямоугольных систем координат; равенство в скобках соответствует встрече игроков в вершине O , значение угла $\varphi(T)$ при этом не определено.

Переменные r, R, φ ; $0 \leq r, R < \infty, |\varphi| \leq \alpha$ однозначно выражаются через локальные координаты x, y , использованные в (1.3).

2. Автомодельные переменные. Двумерная игровая задача. Рассмотрим преобразование конуса K в себя, состоящее в сжатии вдоль всех образующих в λ раз, $\lambda > 0$. Аналогичному равномерному сжатию подвергнется плоская развертка, изображенная на фиг. 3. Точки P, E перейдут в некоторые точки P_λ, E_λ , длина любой траектории, пройденной игроками, а также время движения по ним (с исходными скоростями) сократятся в λ раз. Поэтому анализ задачи при любой начальной позиции (r, R, φ) можно сжатием в $\lambda = 1/R$ раз свести к рассмотрению стандартной позиции (ρ, I, φ) , где $\rho = r/R$. Подобная возможность объясняется отсутствием в задаче характерного размера; в задаче преследования на плоскости с препятствием [4], например указанное сжатие изменит размер препятствия, т. е. автомодельность не имеет места.

Используя приведенные рассуждения, можно показать, что полная система соотношений, описывающих игровую задачу, включая уравнение Беллмана, инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований сжатия. Более прямой путь состоит в формулировке эквивалентной игровой задачи в терминах переменных ρ, φ : $0 \leq \rho < \infty, |\varphi| \leq \alpha$. Переменными ρ, φ в указанной области можно параметризовать конус K , отождествив пары $(\rho, 0), (\rho, 2\alpha)$. Точка конуса определяется углом φ на развертке, отсчитываемым от некоторой фиксированной образующей, и расстоянием ρ от вершины O . Таким образом, отображения $(x, y) \rightarrow (r, R, \varphi) \rightarrow (\rho, \varphi)$ задают отображение $K \times K \rightarrow K$. Следовательно, описав автономно игровую задачу в терминах (ρ, φ) , придем к ситуации, когда относительная динамика двух точек на K описывается движением одной точки на K . Подобный прием понижения размерности широко применяется в случае, когда физическое пространство игры является евклидовым, см., например, [3].

Введем новое время τ , связанное с исходным временем t дифференциальным соотношением $dt/d\tau = R$. Дифференцируя по τ (эта операция обозначается штрихом) равенство $\rho = r/R$ и используя (1.4), получим уравнения движения в виде

$$\rho' = v_1 - \rho u_1, \quad \varphi' = v_2/\rho - u_2, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq v \quad (2.1)$$

Отметим, что отображение $t \rightarrow \tau$ зависит от конкретной реализации функции $R(t)$, $0 \leq t \leq T$, т. е. от выбора управления $u_1(t)$ (см. (1.4)). Полагаем, что момент $\tau = 0$ соответствует $t = 0$.

Для представления функционала задачи потребуется зависимость $R = R(\tau) = R_0 I(\tau)$, $\tau \geq 0$, которая получается интегрированием соотношения $R' = Ru_1$, вытекающего из (1.4), и определения времени τ . Имеем:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^\theta R(\tau) d\tau = R_0 \int_0^\theta I(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$I(\tau) = \exp\left(\int_0^\tau u_1(\mu) d\mu\right) R_0 = R(0)$$

Опуская положительный множитель R_0 , можно представить функционал игровой задачи в переменных ρ , φ , τ в виде

$$J = \int_0^\theta I(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Функционал (2.3) не обладает свойством аддитивности, которое, например, обеспечивает в задачах оптимального управления применимость принципа максимума. Подход динамического программирования приводит к уравнению Беллмана, содержащему не только градиент функции Беллмана, но и саму функцию.

В переменных ρ , φ , τ несколько усложняются условия окончания игры. Если, например, встреча игроков происходит в вершине конуса при $R = 0$, то из приведенной выше зависимости $R(\tau)$ видно, что интервал $[0, T]$ отображается на бесконечный интервал $[0, \infty)$, причем функционал (2.3) остается конечным (равным T/R_0). Таким образом, поимка в игре может произойти за конечное или бесконечное время $\tau = \theta$ при выполнении следующих условий:

$$\theta < \infty; \rho(\theta) = 1, \varphi(\theta) = 0 \quad (2.4)$$

$$\theta = \infty; \rho_0 + \int_0^\theta v_1(\xi) I(\xi) d\xi = 0, \int_0^\infty u_1(\mu) d\mu = -\infty$$

Равенства во втором случае вытекают из условий $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Встрече игроков в этом случае может соответствовать любая точка пространства ρ , φ , включая $\rho = \infty$, поскольку отображение $(r, R, \varphi) \rightarrow (\rho, \varphi)$ имеет особенность в точке $O = (0, 0, \varphi)$, и ее образом (в предельном смысле) может оказаться любая точка конуса K . Это обстоятельство не оказывается принципиальным, во-первых, в силу отмеченной выше роли точки O в картине оптимального синтеза, и во-вторых, переменные (ρ, φ) будут использоваться в основном для представления результатов, построение которых ведется с использованием переменных (1.3), (1.4).

Отметим, что управляющие параметры u_i , v_i в соотношениях (1.3) и (1.4) представляют собой проекции скоростей u , v точек P , E на разные прямоугольные системы координат, хотя используются одинаковые обозначения. Таким образом, динамика рассматриваемой игровой задачи представлена в (1.3), (1.4) и (2.1) в терминах трех совокупностей координат, которые будем называть соответственно декартовыми, относительными и автомобильными переменными.

Области и поверхности (кривые) в пространстве ρ , φ будем обозначать

для простоты теми же символами, что и их прообразы при отображении $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$.

3. **Необходимые условия оптимальности.** Обозначим через V цену рассматриваемой игровой задачи (функцию Беллмана), рассматривая ее как функцию аргументов $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, $z \in R^4$, либо r, R, φ . Если функция V дифференцируема по направлению, то обобщенные необходимые условия оптимальности записываются в следующем виде [1, 5]:

$$\min_u \max_v V \geq -1 \geq \max_v \min_u V, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq v \quad (3.1)$$

Здесь V^* — полная производная по времени в силу уравнений (1.3) или (1.4), т. е. производная по направлению вектора правых частей. В точках дифференцируемости функции V в (3.1) имеют место равенства, определяющие уравнение Беллмана соответственно в декартовых и относительных переменных:

$$\begin{aligned} F(p) \equiv -\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + v \sqrt{p_3^2 + p_4^2} &= -1 \quad (p = V_z \in R^4) \\ -\sqrt{V_R^2 + V_\varphi^2/R^2} + v \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2/r^2} &= -1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обозначим через $Q = Q(\rho, \varphi)$ функцию оптимального результата в задаче (2.1), (2.3). В силу (2.2) справедливо тождество $V(r, R, \varphi) = RQ(r/R, \varphi)$, дифференцируя которое получаем

$$V_r = Q_\rho, \quad V_\rho = Q - \rho Q_\rho, \quad V_\varphi = RQ_\varphi \quad (\rho = r/R)$$

Используя эти равенства во втором соотношении (3.2), имеем уравнение Беллмана для задачи (2.1), (2.3):

$$\Phi = -\sqrt{Q_\varphi^2 + (Q - \rho Q_\rho)^2} + v \sqrt{Q_\rho^2 + Q_\rho^2/\rho^2} + 1 = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3), содержащее искомую функцию Q , можно также получить, применив подход динамического программирования непосредственно к игровой задаче (2.1), (2.3).

Граничные условия для искомых функций в уравнениях (3.2), (3.3) имеют соответственно вид

$$V(x, x) = 0, \quad V(r, r, 0) = 0, \quad Q(1, 0) = 0 \quad (3.4)$$

и означают, что время преследования равно нулю, если точки P и E совпадают, т. е. выполнено условие (1.2).

Уравнения Беллмана (3.2), (3.3) являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка вида $F(z, V_z(z), V(z)) = 0$, $z \in Z \subset R^n$. Они порождают систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n + 1$ (характеристическую систему) [6]:

$$z^{\cdot} = F_p, \quad p^{\cdot} = -F_z - pF_V, \quad V^{\cdot} = \langle p, F_p \rangle \quad (p = V_z) \quad (3.5)$$

при помощи которой ведется локальное построение искомой функции $V(z)$. Функция F для уравнений вида (3.2) не зависит явно от V , поэтому последнее уравнение (3.5) отщепляется от гамильтоновой системы $z^{\cdot} = F_p, \quad p^{\cdot} = -F_z$.

Оптимальные траектории игроков в областях, для которых выполнены условия регулярности (дважды гладкость функций V, F , единственность экстремумов (3.1)), определяются уравнениями характеристик. В декартовых переменных при использовании функции F в (3.2) гамильтоновы уравнения имеют вид

$$z_i^{\cdot} = F_{p_i} \equiv -\frac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad z_{i+2}^{\cdot} = F_{p_{i+2}} \equiv \frac{v p_{i+2}}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}} \quad (i = 1, 2), \quad p^{\cdot} = F_z \equiv 0 \quad (3.6)$$

Компоненты вектора F_p в (3.6) определяют оптимальные управления u, v в (1.3) в зависимости от сопряженного вектора p ; эти управления доставляют экстремумы в (3.1). Подстановка $p = V_z(z)$ в вектор F_p дает оптимальные позиционные управления игроков $u(z), v(z)$. Система (3.6) имеет восьмой порядок, гамильтоновы уравнения в относительных переменных — шестой порядок, полная система характеристических уравнений в автомодельных переменных — пятый порядок:

$$\rho^{\cdot} = \Phi_\xi, \quad \varphi^{\cdot} = \Phi_\eta, \quad \xi^{\cdot} = -\Phi_\rho - \xi\Phi_Q, \quad \eta^{\cdot} = -\Phi_\varphi - \eta\Phi_Q, \quad Q^{\cdot} = \xi\Phi_\xi + \eta\Phi_\eta \quad (3.7)$$

Здесь $\xi = Q_\rho, \eta = Q_\varphi$; функция $\Phi = \Phi(\rho, \varphi, \xi, \eta, Q)$ определена в (3.3).

4. **Первичное решение.** В некоторой области $Z_1 \subset K \times K$ фазового многообразия игры оптимальное поведение игроков состоит в преследовании и убегании с максимальными скоростями вдоль минимальной геодезической, соединяющей точки P и E (как это имеет место на евклидовой плоскости). Это утверждение может быть доказано независимо [1], а также следует из обоснования оптимального синтеза во всем пространстве игры в данной работе. Время преследования при таком движении (цена игры) равно

$$S(z) = L(z)/(1 - v), \quad L(z) = \min [L^+(z), L^-(z)] \quad (4.1)$$

Здесь L — длина минимальной геодезической, L^+ , L^- — локальные минимумы длины, соответствующие двум возможным направлениям движения от точки P к E (фиг. 2). В декартовых переменных величины L^+ , L^- определяются равенствами

$$L^\pm = [|x|^2 + |y|^2 - 2 \cos \alpha (x_1 y_1 - x_2 y_2) \mp 2 \sin \alpha (x_2 y_1 + x_1 y_2)]^{1/2} \quad (4.2)$$

получаемыми из решения задачи о двузвенной ломаной линии минимальной длины, соединяющей точки P и E и имеющей излом на луче γ_1 и γ_2 . Таким образом, $S(z) = V(z)$ при $z \in Z_1$.

Показано [1] что время (4.1) гарантировано игроку P из любой позиции, т. е. $V(z) \leq S(z)$, $z \in Z = K \times K$.

Функция (4.1) удовлетворяет граничному условию (3.4) (см. (1.2)) и уравнению (3.2) в точках $z \in Z_1$, где $L^+(z) \neq L^-(z)$, т. е. функция $S(z)$ дифференцируема. Последнее свойство обеспечивается тем, что функции (4.2) по первой и второй паре аргументов удовлетворяют уравнению эйконала [1]: $L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 = 1$, $L_{y_1}^2 + L_{y_2}^2 = 1$.

В автономных переменных первичное решение уравнения (3.3) имеет вид

$$W(\rho, \varphi) = h(\rho, \varphi)/(1 - v), \quad h(r/R, \varphi) = L(r/R, 1, \varphi) = L(r, R, \varphi)/R, \quad h = \min [h^+, h^-], \quad h^\pm = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha \pm \alpha)} \quad (4.3)$$

т. е. $W = Q$ при $(\rho, \varphi) \in Z_1$ (обозначение Z_1 используется и для первичной области в переменных ρ, φ). Здесь $L(r, R, \varphi)$ — длина минимальной геодезической в зависимости от относительных координат.

Оптимальными траекториями игроков на двустороннем угле в первичной области являются ломаные линии. В полярных координатах ρ, φ они представлены на фиг. 4, 5. В силу симметрии изображена лишь половина фазового пространства, соответствующая $0 \leq \varphi \leq \alpha$; другая половина картины зеркально симметрична относительно луча OB . Семейство первичных траекторий в координатах ρ, φ определяется равенствами

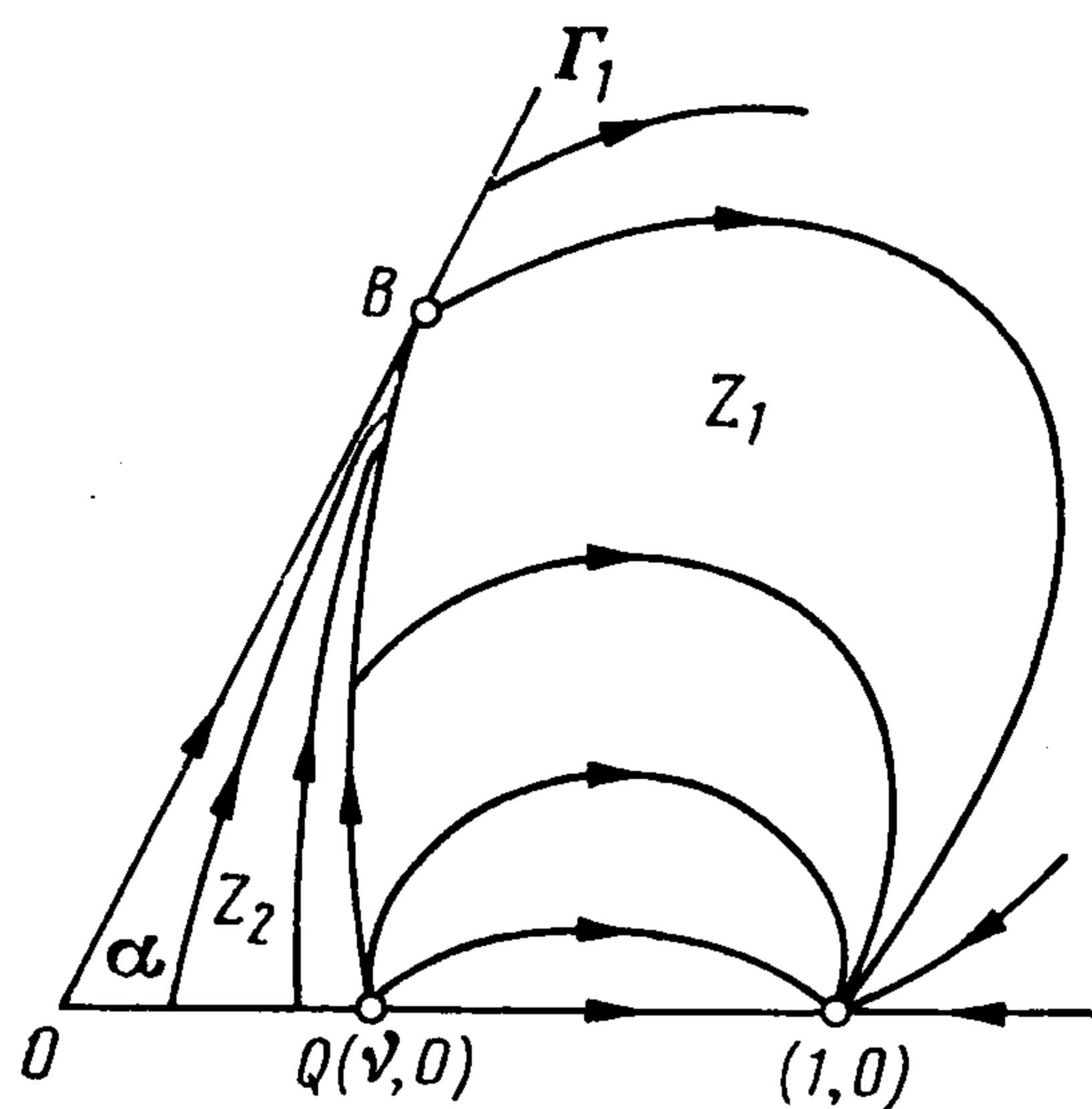
$$\rho^2 = \frac{1 + v^2 \sigma^2 - 2v\sigma \cos \mu}{1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \mu}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma(1 - v) \sin \mu}{1 + v^2 \sigma^2 - \sigma(1 + v) \cos \mu} \quad (4.4)$$

$$0 \leq \mu \leq \pi, \quad \sigma \geq 0$$

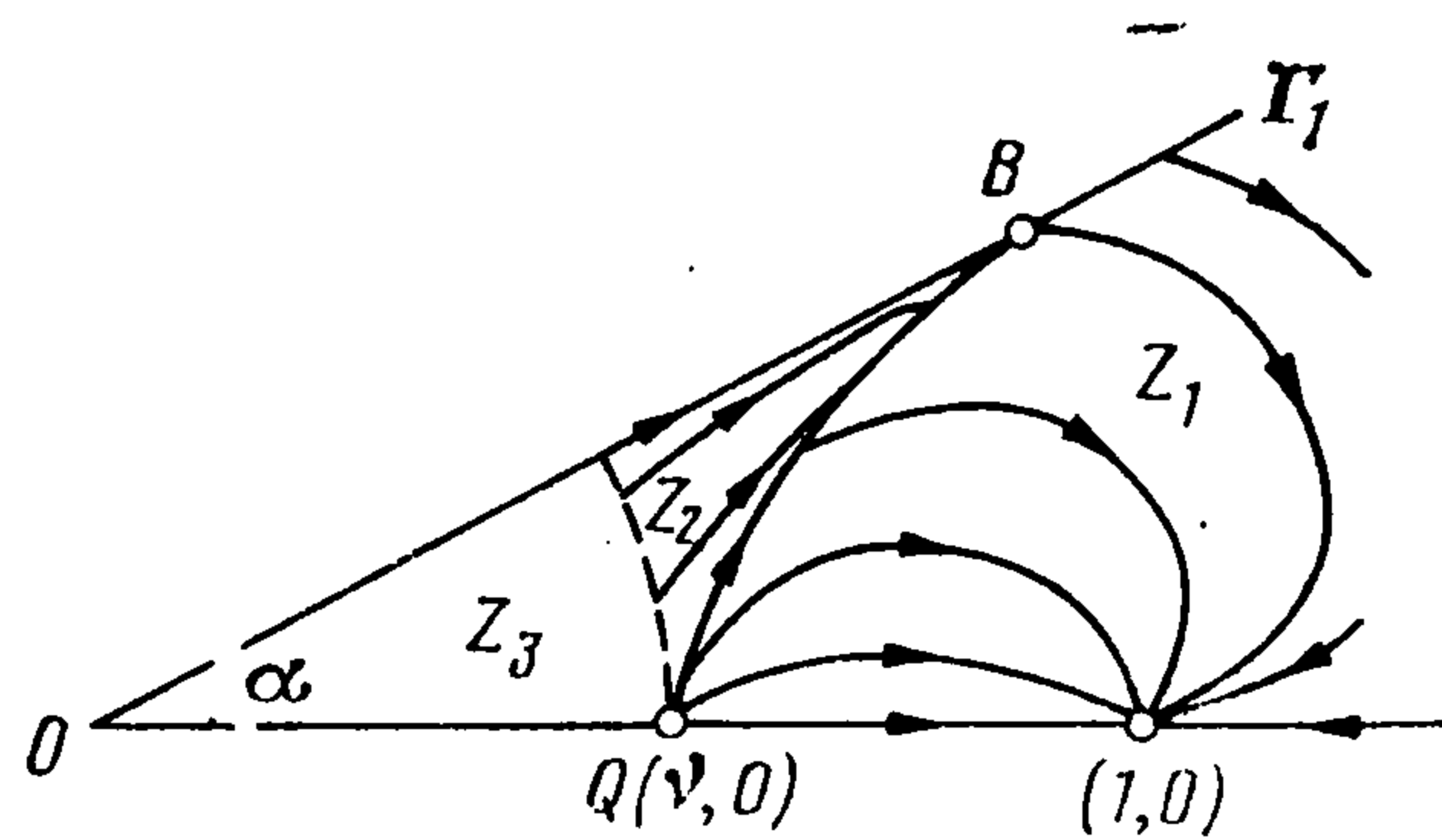
Параметр μ , выделяющий кривую семейства (4.4), равен углу между траекторией (геодезической PE) и образующей конуса, проходящей через точку встречи. Каждая кривая параметризована переменной $\sigma \geq 0$, значение $\sigma = 0$ соответствует поимке: $\rho = 1, \varphi = 0$.

Формулы (4.4) могут быть получены рассмотрением в переменных r, R, φ прямолинейного движения на плоскости игроков P и E с максимальными скоростями вдоль соединяющего их луча к точке встречи M с использованием параметра $\sigma = (T - t)/|OM|$, где $|OM|$ — расстояние от вершины конуса до точки встречи.

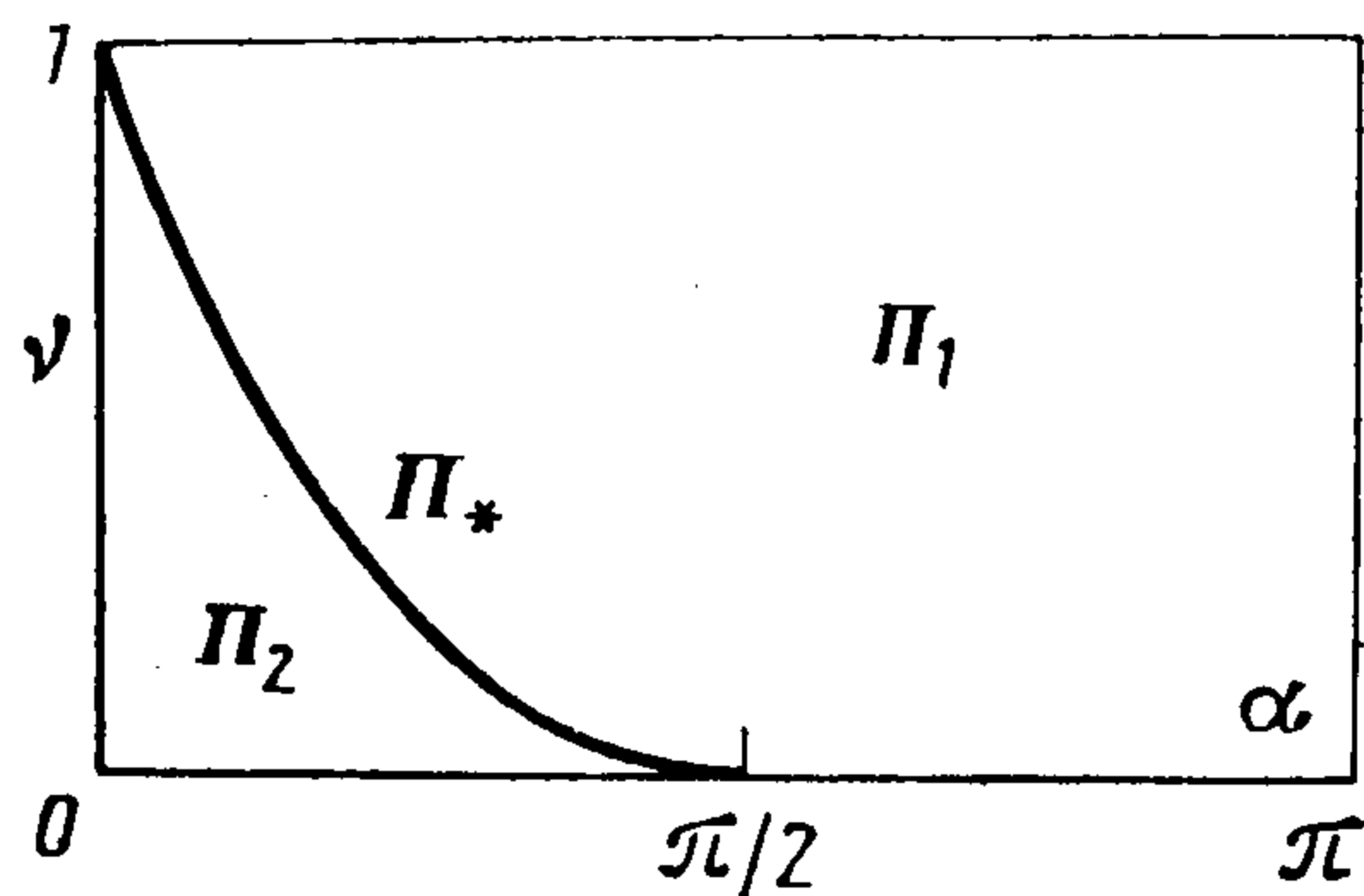
Отметим также, что семейство (4.4) состоит из интегральных кривых (приходящих в точку $\rho = 1, \varphi = 0$) системы из первых двух уравнений (3.7) при подстановке в них $\xi = W_\rho, \eta = W_\varphi$, где W определена в (4.3).



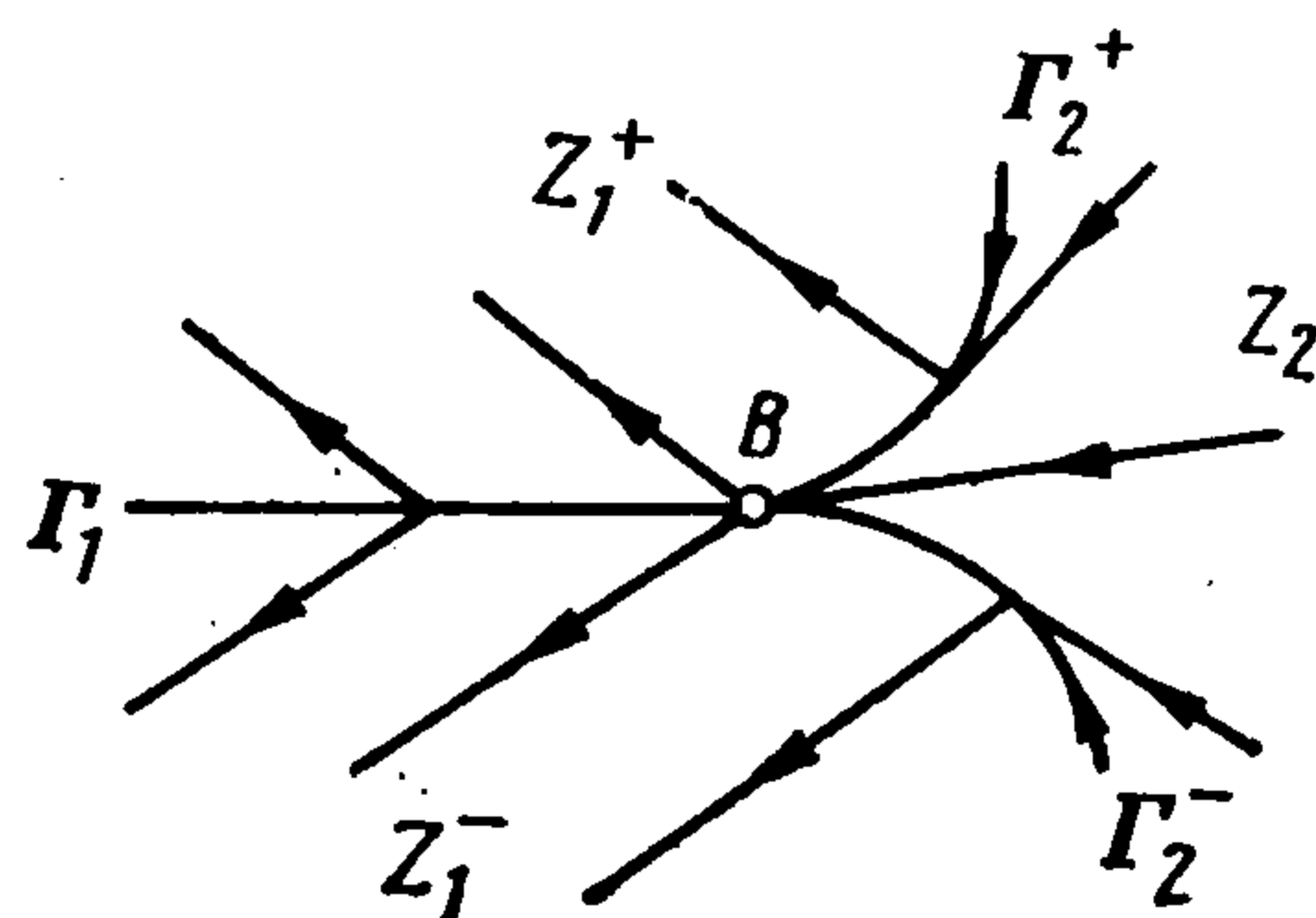
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Луч $\varphi = \alpha$ с началом в некоторой точке B (фиг. 4, 5) является рассеивающей линией, которая соответствует расположению точек P и E на противоположных образующих конуса. Рассеивающая кривая определяется условием $h^+ = h^-$. Луч $\varphi = 0$ включает две траектории, приходящие в терминальную точку $\rho = 1$; на исходном конусе им соответствует движение игроков по общей образующей по направлению к вершине или от нее.

Точка B и особая эквивокальная траектория, приходящая в нее, строятся на основе методики, развитой в [1].

5. Особые эквивокальные движения. Обозначим через Γ_1 ту часть рассеивающей поверхности $L^+(z) = L^-(z)$, которая попадает в первичную область Z_1 , т. е. является элементом оптимального синтеза. Доказано [1], что Γ_1 выделяется условием:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: L^+(z) = L^-(z), F(R_z(z)) \geq 0, \\ R(z) = (L^+(z) + L^-(z))/(2(1-\nu)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Неравенство (5.1) вытекает из левого неравенства (3.1) при подстановке в последнее $V = \min [L^+, L^-]/(1-\nu)$ (см. (4.1)). При этом на множестве (5.1) левое условие (3.1) (минмаксмин) выполнено со знаком равенства, что означает наличие у игрока P чисто позиционной стратегии [3, 5] на Γ_1 . Правое условие (3.1) (максминмин) оказывается выполненным на всей поверхности $L^+(z) = L^-(z)$ со знаком строгого неравенства (игрок E не располагает чисто позиционным управлением).

Край B поверхности (5.1) определяется двумя равенствами $B: L^+(z) = L^-(z), F(R_z(z)) = 0$ (5.2), второе из которых можно представить также в виде [1]

$$|a^+ + a^-| - \nu |b^+ + b^-| = 2(1-\nu) \quad (a = L_x, b = L_y) \quad (5.2)$$

где $a^\pm(z), b^\pm(z)$ — единичные внешние касательные векторы к двум геодезическим равной длины L^+, L^- , соединяющим точки P и E (фиг. 1). Равенства в скобках выполнены в силу упомянутых уравнений эйконала.

Размерность множества B (5.2) в четырехмерном z -пространстве равна двум. В автономных переменных B имеет нулевую размерность, т. е. является точкой с координатами $\rho = \rho_B$, $\varphi = \alpha$.

Уравнение относительно ρ_B можно получить геометрически, используя представление (5.2). Более простой путь состоит в подстановке в функцию Φ в (3.3) полусуммы первичных решений (4.3), аналогичной (5.1); тогда равенство $\Phi = 0$, выделяющее край многообразия (5.1) в переменных ρ , φ , примет вид

$$\rho |1 + h^2 - \rho^2| - \nu |\rho^2 + h^2 - 1| = 2(1 - \nu) \rho h; \quad (5.3)$$

$$h = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \alpha}$$

В плоскости параметров α , ν (фиг. 6) корень ρ_B уравнения (5.3) в областях Π_1 , Π_2 определяется соответственно равенствами:

$$\rho_B = [v(1 \pm \cos \alpha) \mp (1 - v) \sqrt{2v(1 \mp \cos \alpha)}] / [\cos \alpha \pm (2v - 1)] \quad (5.4)$$

На критической кривой $\Pi_* = \{(\alpha, \nu): \nu = 1 - \sin \alpha, 0 < \alpha < \pi/2\}$, разделяющей области Π_1 , Π_2 , оба корня равны $\rho_B = \cos \alpha$.

Наличие единственного корня (5.4) уравнения (5.3) означает, что каждой точке $E \in K$, находящейся на расстоянии $r > 0$ от вершины (фиг. 3), соответствует единственная точка $P \in K$, лежащая на противоположной образующей на расстоянии $R = r/\rho_B$ от вершины и такая, что пара P, E принадлежит множеству $B \subset K \times K$. Это соответствие задает гладкое отображение $K \rightarrow B$; иными словами, в декартовых переменных множество B — гладкое двумерное многообразие, диффеоморфное конусу K .

Дальнейшие построения опираются на предположение о том, что край B поверхности Γ_1 является одновременно и краем другой особой поверхности Γ_2 — экивокальной, состоящей из двух ветвей Γ^+ , Γ^- [1, 7], в соответствии с качественной картиной, представленной на фиг. 7.

Экивокальная поверхность (ЭП) представляет собой поверхность переключения (разрыва) оптимальных управлений обоих игроков, состоящая из особых оптимальных движений [7]. Последние реализуются, если по достижении поверхности один из игроков (выделенный для данной поверхности) не переключается и использует «старое» управление. В случае простых движений, когда экстремумы в (3.1) для точек гладкости функции $V(z)$ достигаются на единственных векторах, оптимальные траектории подходят к ЭП необходимо с касанием. На ЭП выполнены три необходимых условия оптимальности в форме равенств — уравнение Беллмана, условие касания и условие непрерывности

$$F(p) = 0, \langle F_p(p), p - q(z) \rangle = 0, V - S(z) = 0 \quad (5.5)$$

Здесь $S, q = S_z$ — первичное решение, $V, p = V_z$ — значение цены и ее градиента во вторичной области Z_2 .

Совокупность условий (5.5) однозначно определяет систему уравнений для особых траекторий на ЭП. Методика их получения изложена в [7]. В обратном времени, удобном для попятных построений, эти уравнения вместе с начальными условиями имеют вид [4, 7]:

$$\dot{z} = -F_p, \dot{p} = -[\langle S_{zz}^\pm F_p, F_p \rangle / \langle F_{pp} q^\pm, q^\pm \rangle] (p - q^\pm) \quad (5.6)$$

$$z(0) = z^0, p(0) = R_z(z^0), z^0 \in B$$

Здесь S_{zz}, F_{pp} — симметрические матрицы вторых частных производных функции, определенных в (4.1), (3.2). Функция $R(z)$ введена в (5.1). Для ветвей Γ^\pm в (5.5), (5.6), используются первичные решения $S^\pm(z) = L^\pm(z)/(1 - \nu)$.

Начальные значения сопряженной переменной в точках многообразия B , представленные в (5.6), найдены как решение следующей системы четырех уравнений:

$$F(p) = 0, \langle F_p(p), q^\pm(z) \rangle + 1 = 0, \langle p - q^\pm, r_j \rangle = 0, j = 1, 2 \quad (5.7)$$

Здесь $r_j(z) \in R^4$ — два линейно независимых касательных к многообразию B вектора в точке $z \in B$. Два последних уравнения (4.6) получены дифференцированием левой части последнего равенства (5.5) по направлениям r_j . Второе равенство (5.7) представляет собой условие касания (5.5), преобразованное с использованием свойства однородности функции (3.2): $F = \langle F_p, p \rangle + 1$. Для каждой ветви Γ^\pm рассматривается соответствующая система (5.7). Кроме тривиальных решений $p = q^\pm$ обе системы (5.7) имеют для некритических значений α, ν общее решение $p = (q^+(z) + q^-(z))/2 = R_z(z)$, которое и использовано в (5.6). Первое уравнение (5.7) удовлетворяется значением $p = R_z$ в силу (5.2). При подстановке этого значения в условие касания (второе равенство (5.7)) оно преобразуется к первому равенству. Наконец выполнение последних равенств (5.7) проверяется с помощью дифференциальных следствий $\langle q^+ - q^-, r_j \rangle = 0$ равенства $S^+(z) - S^-(z) = 0, z \in B$.

Тот факт, что для обеих ветвей эквивокальной поверхности существует общее значение $p(z), z \in B$, означает, во-первых, что градиент цены игры непрерывно продолжим на множество $\Gamma^+ + B + \Gamma^-$ из вторичной области и, во-вторых, что ветви Γ^+ и Γ^- касаются на множестве B друг друга и поверхности Γ_1 . В соответствии с этим на фиг. 7 представлены касающиеся поверхности.

Вектор $p = R_z(z)$ непрерывен по параметрам $(\alpha, \nu) \in \Pi$. Для критических значений $(\alpha, \nu) \in \Pi_*$ имеем $R_z(z) = p^* = (1, 0, 0, 0)$. Функция F_p негладкая в точке p^* , ее градиент F_p , используемый во втором уравнении (5.7), не существует. Как функция параметров (α, ν) вектор $F_p(R_z(z))$ оказывается разрывным на кривой Π_* . Его предельные значения при $(\alpha, \nu) \rightarrow \Pi_*$ из областей Π_1 и Π_2 равны соответственно

$$\Pi_1: F_p = (1, 0 - \nu, 0), \quad \Pi_2: F_p = (1, 0, \nu, 0) \quad (5.8)$$

Вообще говоря, четные компоненты вектора $F_p(R_z(z))$ равны нулю, а первая компонента положительна во всей области Π ; третья компонента меняет знак на Π_* .

Три уравнения системы (5.7) удовлетворяются значением p^* , а второе выполняется в следующем обобщенном смысле: оба вектора (5.8) принадлежат конусу опорных нормалей к поверхности уровня $F(p) = 0$ в точке p^* (субдифференциалу) и ортогональны обоим векторам $p^* - q^\pm$.

Кроме того в критическом случае $(\alpha, \nu) \in \Pi_*$ теряет смысл коэффициент при $p - q$ во втором уравнении (5.6). Строгий анализ задачи Коши (5.6) требует исследования асимптотики ее решения, которое в данной работе не проводится. Ниже предполагаем, что параметры α, ν принимают некритическое значение.

Для построения поверхностей Γ^\pm следует выпустить траектории системы (5.6) из всех точек B ; z — компоненты решений составят искомые поверхности.

Наличие автомодельности (разд. 2) показывает, что совокупность траекторий (5.6) может быть построена путем простого пересчета какой-либо одной траектории. В самом деле, уравнения (5.6) и функция $R_z(z)$ инвариантны относительно замены координат и времени $z = \lambda z', t = \lambda t', \lambda > 0$. Учитывая вращательную симметрию, можно так подобрать локальные координаты x, y , чтобы привести произвольную точку множества B к виду

$$z^0 = \lambda z_B, \quad z_B = (1, 0, \rho_B, 0), \quad \lambda > 0 \quad (5.9)$$

где ρ_B определено в (5.4). Таким образом, в (5.6) достаточно численно проинтегрировать одну стандартную траекторию, выпущенную из точки (5.9), например, при $\lambda = 1$. Стандартные траектории для областей Π_1, Π_2 различаются знаком третьей компоненты вектора F_p в (5.6) в начальный момент времени. Это означает, что на начальном участке траектории

(в обратном времени) точка E в области Π_1 (Π_2) движется в сторону вершины (от вершины) конуса. Игрок P всегда удаляется от вершины. Соответствующие участки траектории даны на фиг. 2; рядом с кривой указан индекс области Π_i .

Экивокальная линия в автомодельных переменных изображена на фиг. 4, 5. В обратном времени интегрирование идет от точки B к Q . Выход к точке Q происходит за бесконечное время; первичные траектории пересекают линию BQ под ненулевым углом. Последние утверждения вытекают из следующего свойства системы (5.6): лагранжево многообразие $\Sigma = \{(z, p): p = q(z), z \in Z\}$ содержит притягивающее подмногообразие системы, к которому ее решение выходит за бесконечное время. Иными словами, при больших значениях (обратного) времени экивокальное движение близко к первичному движению. Указанное свойство устанавливается путем анализа уравнения в вариациях относительно вектора $w = p - q$, получаемого разложением правых частей (5.6) по степеням w .

Кривая BQ касается луча OB в точке B , причем $\rho' < 0$ (в обратном времени) для всех значений параметров. Эффект, представленный на фиг. 2 в декартовых переменных, соответствует разрыву ρ' на критической кривой со следующими значениями пределов: $\Pi_1: \rho' = -(\rho_B + \nu) < 0$ $\Pi_2: \rho' = -(\rho_B - \nu) < 0$.

6. Вторичное решение. Завершение оптимального синтеза. На экивокальную поверхность Γ траектории приходят в прямом времени с касанием. Для их построения следует выпустить из точек Γ решения регулярной системы (3.6) в обратном времени. Начальными значениями сопряженных переменных являются значения вектора $p(z)$, $z \in \Gamma$, полученные интегрированием системы особых характеристик (5.5). Выпущенные из Γ в обратном времени траектории заполнят некоторую (вторичную) область Z_2 .

Для области параметров Π_1 множество Z_2 совпадает с криволинейным треугольником OBQ (фиг. 4), при этом отрезок OB является вторичной траекторией, касающейся в точке B обеих ветвей Γ^+ и Γ^- экивокальной линии (изображена одна ветвь, другая лежит в симметричной половине картины). Вторичные траектории разных половин картины пересекаются в точках открытого отрезка OQ , которых достигают за равные интервалы времени, т. е. отрезок OQ для $(\alpha, \nu) \in \Pi_1$ является рассеивающей линией.

Данное и ряд других утверждений этого раздела основаны на исследовании некоторых глобальных свойств решений задачи Коши (5.6), проведенных в декартовых и автомодельных переменных.

Таким образом, в области Π_1 параметров (α, ν) все фазовое пространство разбивается на две области Z_1, Z_2 , границы которых включают три особые линии — две рассеивающие и одну экивокальную.

При $(\alpha, \nu) \in \Pi_2$ появляется также область Z_3 третьего типа: $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ (фиг. 5), в которой оптимальный результат определяется только положением игрока P и равен времени его движения до вершины O , где и должна произойти поимка при оптимальном поведении игрока E .

Более детальному описанию картины синтеза для Π_1 удобно предпослать качественное сравнение стратегий оптимального преследования в областях Π_1, Π_2 на примере граничных значений $\alpha = 0, \pi$. Для области Π_1 движение игроков напоминает преследование на плоскости ($\alpha = \pi$), когда точка E убегает от P и наличие вершины этому не препятствует, а лишь в определенной мере «деформирует» траектории.

Пусть $\alpha = 0$, т. е. пространство K превращается в луч с концом O . Если вершина O'

и игрок E находятся в начальный момент по разные стороны от точки P , то игрок P с максимальной скоростью движется в сторону E по поимки. Аналогичное оптимальное преследование реализуется, когда E и O находятся по одну сторону от P , но отношение расстояний игроков до вершины удовлетворяет условию $r/R \geq v$. Тогда поимка происходит не позже достижения игроками точки O . Если $r/R < v$, то очевидно, что поимка происходит в вершине, к которой игрок P движется с максимальной скоростью, а игрок E , действуя однозначно, должна подойти к ней в нужный момент времени $T = R$. Здесь время поимки не зависит от значения r .

Преследование на конусе для $(\alpha, v) \in \Pi_2$ напоминает ситуацию на луче. Область Z_3 , которая определяется тем же неравенством $\rho = r/R < v$, соответствует такому положению игроков, когда точке P удается «оттеснить» игрока E к вершине, наличие которой ограничивает маневренные возможности E .

В предыдущем разделе дано описание скачкообразного изменения характера стандартной эквивокальной траектории игрока E (изменение знака производной z_3) при переходе параметров из области Π_1 в Π_2 . Эквивокальные особые траектории для области Π_2 оказываются такими, что вторичные траектории, исходящие в обратном времени из ветвей Γ^+ , Γ^- , не пересекаются друг с другом и продолжаются на бесконечный интервал времени. Совокупность вторичных z -траекторий, исходящих из решения системы (5.6) с условием (5.9) при $\lambda \rightarrow 0$ стремится к некоторой поверхности Γ_3 , выделяющей область Z_3 . Поверхность Γ_3 состоит из всех траекторий, по которым точки P и E , двигаясь с максимальными скоростями к вершине, достигают ее одновременно. В автомобильных переменных Γ_3 оказывается дугой окружности $\rho = v$, $|\varphi| \leq \alpha$, к точкам которой за бесконечное время приходят траектории, стартующие на кривой BQ .

Внутри области Z_3 оптимальный результат зависит только от положения преследователя: $V = V(z_1, z_2) = R$, $V_{z_3} = V_{z_3} = 0$. На Γ_3 функция $V(z)$ оказывается негладкой (тем самым Γ_3 — особая поверхность), однако оба условия (3.1) выполняются со знаком равенства. Это означает, что игроки P и E имеют на Γ_3 чисто позиционные управления.

Эквивокальные и вторичные регулярные траектории, в частности, представленные на фиг. 4, 5, строились путем численного интегрирования. Вывод о свойствах выпуклости стандартных траекторий игроков, обеспечивающих однозначное заполнение регулярными траекториями вторичной области, также частично основан на анализе результатов расчета.

Таким образом, использование необходимых условий оптимальности (3.1)—(3.7), (5.5) и их следствий (5.1), (5.6) позволило провести однозначные построения во всем пространстве игры. Полное обоснование оптимальности построенного синтеза требует дальнейших исследований, в частности, свойств решений задачи Коши (5.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Меликян А. А., Овакимян Н. В. Особые траектории в задаче простого преследования на многообразии // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 54—62.
2. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 431 с.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Вишневецкий Л. С., Меликян А. А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 613—620.
5. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 10—18.

Москва

Поступила в редакцию
11.XII.1990