Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 60—50


В. П. Малюков

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА КАЧЕСТВА ДВУХ ГРУПП ОБЪЕКТОВ

Рассматривается билинейная дифференциальная игра качества двух групп объектов с несколькими терминальными поверхностями. Предлагается дискретно-аппроксимационный метод, позволяющий решение дифференциальной игры находить в результате предельного перехода из решений многошаговых аппроксимирующих игр. Исследуется влияние согласованности или не согласованности выбора стратегий объектами в группе на исход конфликта.

**1. Постановка задачи.** Движение двух групп конфликтно-управляемых объектов: $P_1, \ldots, P_M$ (группа А) и $L_1, \ldots, L_K$ (группа Б), где $M$, $K$ — натуральные числа, задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$x_i^{\cdot}(t) = -x_i(t) + (E - U_i(t)) B_i^1 x_i(t) - \sum_{m=1}^{K} S_{im}^2 V_m(t) B_m^2 y_m(t)$$

$$y_j^{\cdot}(t) = -y_j(t) + (E - V_j(t)) B_j^2 y_j(t) - \sum_{m=1}^{M} S_{jm}^1 U_m(t) B_m^1 x_m(t)$$

$$x_i(t) \in R^n, \ \ x_i(0) \in \operatorname{int} R_+^n \ (i = 1, \ldots, M), \ y_j(t) \in R^n,$$
$$y_j(0) \in \operatorname{int} R_+^n$$

$$(j = 1, \ldots, K), \ u_i^l(t) \in [0, 1], \ v_j^l(t) \in [0, 1] \ \ (l = 1, \ldots, n), \ u_i(t) =$$
$$= (u_i^1(t), \ldots, u_i^n(t)), \ v_j(t) = (v_j^1(t), \ldots, v_j^n(t))$$

Здесь $x_i(t)$, $y_j(t)$ — состояния объектов $P_i$, $L_j$; $E$, $B_i^1$, $B_j^2$, $S_{ij}^1$, $S_{ji}^2$, $U_i(t)$, $V_j(t)$ — матрицы порядка $n$ с положительными элементами, $E$ — единичная матрица, $V_i(t)$, $V_j(t)$ — диагональные матрицы с элементами $u_i^l(t)$, $v_j^l(t)$; $u_i(t)$, $v_j(t)$ — значения стратегий объектов $P_i$, $L_j$ в момент времени $t$, $0 \leqslant t < +\infty$.

Игра оканчивается при выполнении следующих условий:

$$(x_1(t), \ldots, x_M(t), y_1(t), \ldots, y_K(t)) \in \left(\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{Kn} T_j\right) \tag{1.1}$$

$$(x_1(t), \ldots, x_M(t), y_1(t), \ldots, y_K(t)) \in \left(\bigcap_{j=1}^{Kn} T_j^*\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{Mn} S_i^*\right) \tag{1.2}$$

$$S_i = \{(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) : (x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) \in$$
$$\in R_+^{n(K+M)} x^i > 0\}$$

$$S_i^* = \{(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) : (x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) \in$$
$$\in R_+^{n(K+M)} x^i = 0\}$$

$x^i$ — компонента вектора $(x_1, \ldots, x_M)$ $(i = 1, \ldots, Mn)$

$$T_j = \{(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) : (x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) \in$$
$$\in R_+^{n(K+M)} y^j = 0\}$$

$$T_j^* = \{(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) : (x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K) \in \in R_+^{n(K+M)},\ y^j > 0\}$$

$y_j$ — компонента вектора $(y_1, \ldots, y_K)$ $(j = 1, \ldots, Kn)$

Информационная обеспеченность объектов существенно влияет на результат конфликта, структуру оптимальных стратегий [1—3]. Поэтому будем предполагать, что объекты в группах применяют позиционный способ формирования своих стратегий. Вследствие этого, как и в [4], исходная игра будет определять две задачи: с точки зрения группы $A$ и с точки зрения группы $Б$. В каждой задаче группа $A$ или $Б$ применяет позиционные стратегии, причем возможны различные варианты выбора своих стратегий объектами. Будут рассмотрены два крайних случая:

1) объекты в группе выбирают свои стратегии согласованно, как некий единый объект;

2) объекты в группе выбирают свои стратегии, не согласуя их ни с одним из объектов в группе.

**2. Случай согласованного выбора стратегий объектами в группе.** Обозначим через $z$, $x$, $y$ векторы $(x_1, \ldots, x_M, y_1, \ldots, y_K)$, $(x_1, \ldots, x_M)$, $(y_1, \ldots, y_K)$; $E_0$, $E_1$ — единичные матрицы порядка $Mn$, $Kn$; $B^1$, $S^1$, $B^2$, $S^2$, $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ — матрицы размерности $Mn \times Mn$, $Kn \times Mn$, $Kn \times Kn$, $Mn \times Kn$, $Mn \times Mn$, $Kn \times Kn$ — соответственно:

$$B^i = \begin{Vmatrix} B_1^i \ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots B_{n(i)}^i \end{Vmatrix}, \quad S^i = \begin{Vmatrix} S_{11}^i \ldots S_{1n(i)}^i \\ \ldots \\ S_{m(i)1}^i \ldots S_{m(i)n(i)}^i \end{Vmatrix}$$

$$U(\cdot) = \begin{Vmatrix} U_1(\cdot) \ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots U_M(\cdot) \end{Vmatrix}, \quad V(\cdot) = \begin{Vmatrix} V_1(\cdot) \ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \ldots V_K(\cdot) \end{Vmatrix}$$

$$i = 1, 2;\ n(1) = m(2) = M,\ n(2) = m(1) = K$$

*Определение* 1. Чистой стратегией $u_i(\cdot)$ объекта $P_i$ группы $A$ называется функция $u_i(\cdot)$: $R_+ \times R^{n(K+M)} \to [0, 1]^n$, т. е. $u_i(t, z) \in [0, 1]^n$ для $(t, z) \in R_+ \times R^{n(K+M)}$ $(i = 1, \ldots, M)$.

В группе Б объект $L_j$ $(j = 1, \ldots, K)$ выбирает реализацию стратегии $v_j(t) \in [0, 1]^n$ на основании любой возможной информации.

Пусть заданы начальная позиция $(0, z(0))$, стратегия группы А $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_M(\cdot))$, некоторая реализация стратегии группы Б $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_K(t))$. Рассмотрим разбиение $\Delta$ полуоси $0 \leqslant t < +\infty$ системой полуинтервалов

$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ \Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i\ (i = 0, 1, \ldots, \tau_0 = 0)$$

Запишем дискретный аналог системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} x(\tau_{k+1}) = x(\tau_k) + \Delta_k \{-x(\tau_k) + (E_0 - U(\tau_k, z(\tau_k)))B^1 x(\tau_k) - \\ - S^2 V(\tau_k)\, y(\tau_k)\} \\ y(\tau_{k+1}) = y(\tau_k) + \Delta_k \{-y(\tau_k) + (E_1 - V(\tau_k))\, B^2 y(\tau_k) - \\ - S^1 V(\tau_k, z(\tau_k))\, B^1 x(\tau_k)\} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Стандартным образом определим ломаные Эйлера [3, 5] и движения $z[t]$, порожденные стратегией $u(\cdot)$ из позиции $(0, z(0))$.

*Определение* 2. Множеством оптимальности группы А за время $T$ $(0 < T < +\infty)$ называется множество:

$$W_1^T = \{z(0) : z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)} : [\exists u^{op}(\cdot) : \forall z\, [t, 0, z(0), u^{op}(\cdot)]$$

$$\exists s: 0 \leqslant s \leqslant T: z(s) \in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} T_j), \quad x(\tau_0) \in \operatorname{int} R_+^{Mn},$$

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant s]; \forall \tau_1: 0 < \tau_1 < T \urcorner [\exists u(\cdot): \forall z [t, 0, z(0), u(\cdot)]$$

$$\exists s: 0 \leqslant s \leqslant \tau_1 \; z(s) \in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} T_j), \quad x(\tau_0) \in \operatorname{int} R_+^{nM}, 0 \leqslant \tau_0 \leqslant s]\}$$

Другими словами, это множество таких начальных состояний, что если игра начнется из них, то у группы А существует стратегия $u^{op}(\cdot)$, при применении которой она не позднее момента времени $T$ сможет получить выполнение условия (1.1), как бы ни действовала группа Б. Для $t < T$ указанное свойство не выполняется.

Стратегия $u^{op}(\cdot)$ называется оптимальной стратегией группы А за время $T$.

*Определение* 3. Множеством оптимальности группы А в дифференциальной игре называется множество:

$$W_1^* = \bigcup_{0<T<+\infty} W_1^T$$

*Задача* 1. Для любого $T \in (0, +\infty)$ построить множество $W_1^T$, найти оптимальную стратегию $u^{op}(\cdot)$ группы А, а также построить множество $W_1^*$.

Аналогично формулируется и решается задача 2, в которой требуется построить множества оптимальности и найти оптимальную стратегию группы Б.

**3. Многошаговая игра качества.** Решение задач 1, 2 основано на исследовании многошаговых игр, аппроксимирующих дифференциальную игру. Поэтому рассмотрим разбиение $\Delta$ полуоси $[0, +\infty)$ и считаем, что движение групп конфликтно-управляемых объектов задается системой (2.1), а объекты группы А применяют стратегии $u_i(\cdot)$: $T_\Delta \times R^{n(K+M)} \to \to [0, 1]^n$, $u_i(t, z) \in [0, 1]^n$, $(t, z) \in T_\Delta \times R^{n(K+M)} T_\Delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots\}$, $i = 1, \ldots, M$.

Объекты группы Б выбирают $v_j(t) \in [0, 1]^n$, $j = 1, \ldots, K$, на основании любой возможной информации. Окончание в такой многошаговой игре определяется условиями:

$$z(t) \in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} F_j) \tag{3.1}$$

$$z(t) \in (\bigcap_{j=1}^{Kn} T_j^*) \cap (\bigcup_{i=1}^{Mn} C_i) \tag{3.2}$$

$$z(t) \in (\bigcup_{i=1}^{Mn} C_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} F_j) \tag{3.3}$$

$$C_i = \{z: z \in R^{n(K+M)}, \; x^i \leqslant 0\}, \; F_j = \{z: z \in R^{n(K+M)}, \; y^j \leqslant 0\}$$

*Определение* 4. Множество оптимальности группы А на шаге $m$ называется множество:

$$W_1^m = \{z(0): z(0) \in R^{n(K+M)}: [\exists u^{op}(\cdot) \forall v(t) \exists s \in T_\Delta: \tau_0 \leqslant s \leqslant \tau_m: z(s) \in$$

$$\in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} F_j), \quad x(\tau) \in \operatorname{int} R_+^{nM}, \tau_0 \leqslant \tau \leqslant s], \quad \forall \tau_*: \tau_0 \leqslant \tau_* \leqslant \tau_{m-1},$$

$$m \geqslant 1, \urcorner [\exists u(\cdot) \forall v(t) \exists s \in T_\Delta: \tau_0 \leqslant s \leqslant \tau_* \; z(s) \in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} F_j), x(\tau) \in$$

$$\in \operatorname{int} R_+^{nM}, \tau_0 \leqslant \tau \leqslant s]\}$$

Стратегия $u^{op}(\cdot)$ называется оптимальной стратегией группы А на шаге $m$.

*Определение* 5. Множеством оптимальности группы А в многошаговой игре называется множество

$$W_1^{**} = \bigcup_{T=1}^{\infty} W_1{}^T$$

*Задача* 1*. Для любого $m = 1, \ldots$ построить множество $W_1{}^m$, найти оптимальную стратегию $u^{op}(\cdot)$ группы А на шаге $m$, а также построить множество $W_1{}^{**}$. ∎

Задача 2* формулируется и решается таким же образом.

**4. Обозначения и утверждения, необходимые для решения задач 1 и 1*.** Пусть $\Delta t > 0$. Полагаем:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\Delta t} - 1, \quad \Gamma_0 = \gamma_0 E_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 E_1, \quad x^+ = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$D_0 = S^1B^1,\ D_m = D_{m-1}\Gamma_0 + D_{m-1}B^1 + (Q_{m-1}S^1 - D_{m-1})^+B^1$$

$$Q_0 = \Gamma_1 + B^2,\ Q_m = Q_{m-1}\Gamma_1 + Q_{m-1}B^2 + (D_{m-1}S^2 - Q_{m-1})^+B^2$$

$$R_0 = \Gamma_0,\ R_m = R_{m-1}\Gamma_0 + T_{m-1}S^1B^1$$

$$T_0 = S^2B^2,\ T_m = T_{m-1}\Gamma_1 + T_{m-1}B^2 + (R_{m-1}S^2 - T_{m-1})^+B^2,$$

$$m = 1, \ldots$$

$$q_m{}^{ij} = \begin{cases} \dfrac{(Q_mS^1)_{ij}}{(D_m)_{ij}}, & \text{если } (D_m)_{ij} > 0; \\ 1, & \text{если } (D_m)_{ij} = 0,\ (Q_mS^1)_{ij} = 0; \\ +\infty, & \text{если } (D_m)_{ij} = 0,\ (Q_mS^1)_{ij} > 0; \end{cases}$$

$$\delta_m{}^{ij} = \begin{cases} \dfrac{(Q_m)_{ij}}{(D_mS^2)_{ij}}, & \text{если } (D_mS^2)_{ij} > 0 \\ 1, & \text{если } (D_mS^2)_{ij} = 0,\ (Q_m)_{ij} = 0 \\ +\infty, & \text{если } (D_mS^2)_{ij} = 0,\ (Q_m)_{ij} > 0 \end{cases}$$

$$\theta_m{}^{ij} = \begin{cases} \dfrac{(T_m)_{ij}}{(R_mS^2)_{ij}}, & \text{если } (R_mS^2)_{ij} > 0 \\ 1, & \text{если } (R_mS^2)_{ij} = 0,\ (T_m)_{ij} = 0 \\ +\infty, & \text{если } (R_mS^2)_{ij} = 0,\ (T_m)_{ij} > 0 \end{cases}$$

справедливы следующие леммы:

*Лемма* 1. При $(B^2S^1)_{ij} \geqslant (S^1B^1)_{ij}$, $(B^2)_{ij} \geqslant (S^1B^1S^2)_{ij}$, $i = 1, \ldots, Kn$; $j = 1, \ldots, Mn$ будет $q_m{}^{ij} \geqslant 1$, $\delta_m{}^{ij} \geqslant 1$ $\forall m = 1, \ldots$.

*Лемма* 2. При $(B^2)_{ij} \geqslant (S^1B^1S^2)_{ij}$, $i = 1, \ldots, Kn$; $j = 1, \ldots, Mn$; $\forall (i, j) \exists N_0{}^{ij}: \forall m \geqslant N_0{}^{ij}$ $\theta_m{}^{ij} \geqslant 1$.

**5. Решение многошаговой игры качества.** Метод решения основан на применении принципа динамического программирования и заключается в построении некоторой дискретной попятной конструкции. Он состоит в поэтапном нахождении множеств $W_1{}^m$, начиная с $m = 1, \ldots$ При этом на первом этапе, находятся начальные состояния $z(0)$, принадлежащие $W_1{}^1$, на втором этапе,— состояния $z(0) \in W_1{}^2$, т е. такие, из которых, в результате реализации группой А своей оптимальной стратегии и наихудшей, для группы А, реализации стратегии группы Б, произойдет переход в состояния $z(1) \in W_1{}^1$ и т. д.

Построим множества $W_1{}^m$. Видно, что

$$W_1{}^1 = \bigcup_{i=1}^{Kn} (W_1{}^1)_i,$$

где $(W_1^1)_i = \{z(0): z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)}: \exists u^{op}(\cdot)\ \forall v(0)\ x(\tau_1) \in \operatorname{int} R_+^{Mn},$ $(y(\tau_1))_i \leqslant 0\}$.

Ясно, что $x(\tau_1) \in \operatorname{int} R_+^{Mn}$ при любой реализации стратегии группы Б, в двух случаях:

а) $(E_0 - \Delta_0 E_0)\, x(0) - \Delta_0 S^2 B^2 y(0) \in \operatorname{int} R_+^{Mn}$

б) $(E_0 - \Delta_0 E_0)\, x(0) + \Delta_0 [B^1 x(0) - S^2 B^2 y(0)] \in \operatorname{int} R_+^{Mn}$

$\exists i_0 \in \{1, \ldots, Mn\}$: $\{(E_0 - \Delta_0 E_0)\, x(0) - \Delta_0 S^2 B^2 y(0)\}\ i_0 \leqslant 0$

Рассмотрим случай а). Подставим в неравенство $(y(\tau_1))_i \leqslant 0$ оптимальную реализацию стратегии $u^{op}(0) = (1, \ldots, 1)$ группы А и наихудшую с точки зрения группы А, реализацию стратегии $v(0) = (0, \ldots, 0)$ группы Б. Тогда имеем

$$(W_1^1)_i = \Big\{z(0) : z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)},\ (E_0 - \Delta_0 E_0)\, x(0) -$$

$$- \Delta_0 S^2 B^2 y(0) \in \operatorname{int} R_+^{Mn},\ (S^1 B^1 x(0))_i \geqslant \left(\left(\left(\frac{1}{\Delta_0} - 1\right) E_1 + B^2\right) y(0)\right)_i\Big\}.$$

При $(S^1 B^1)_{ik} = 0\ \forall k = 1, \ldots, Mn$, $(W_1^1)_i = \varnothing$; $W_1^1 = \bigcup\limits_{i=1}^{Kn} (W_1^1)_i$

Оптимальной стратегией группы А является одна из функций $u_i^{op}(\cdot)$: $: u_i^{op}(0, z(0)) = (u_i^{op,1}(0, z(0)), \ldots, u_i^{op,Mn}(0, z(0)))$, где

$$u_i^{op,j}(0, z(0)) = \begin{cases} 1, z(0) \in (W_1^1)_i \\ \text{в ином случае не определена};\ j = 1, \ldots, Mn \end{cases}$$

При построении множеств $W_1^m$, для $m \geqslant 2$, будем полагать, что $\Delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k = \Delta t > 0\ \forall k = 0, 1, \ldots$. Обозначим $z(\tau_m)$, $x(\tau_m)$, $y(\tau_m)$ через $z_m$, $x_m$, $y_m$. Из определения множеств $W_1^m$ следует, что два условия являются основными для их построения:

$$\exists i : 1 \leqslant i \leqslant Kn\ (y_m)_i \leqslant 0 \qquad (5.1)$$

$$x_m \in \operatorname{int} R_+^{Mn} \qquad (5.2)$$

Проводя такие же рассуждения, как и при $m = 1$, получим, что если $z_0 \in R_+^{(K+M)n}$:

$$\{D_m x_0\}_i \geqslant \{Q_m y_0\}_i$$

то группа А получит выполнение условия (5.1) на шаге $m$, как бы ни действовала группа Б. Из процедуры нахождения состояний $z_0$, удовлетворяющих (5.1) вытекает, что определение реализации оптимальной стратегии группы А и реализации оптимального противодействия группы Б зависит от соотношения элементов матриц, определяющих динамику.

Пусть выполняются матричные неравенства

$$B^2 S^1 \geqslant S^1 B^1,\ B^2 \geqslant S^1 B^1 S^2$$

Тогда, на основании леммы 1, реализация оптимальной стратегии группы А такова: $U^{op}(m) = E_0$, а оптимальное противодействие группы Б такое: $V^*(m) = 0$ (матричный нуль) $\forall m = 1, \ldots$. Нахождение

$z_0 \in \operatorname{int} R_+^{(K+M)n}$, удовлетворяющих (5.2), будем проводить в предположении, что группа А применяет реализацию $U^{op}(m) = E_0 \; \forall m = 1, \ldots$ При таком предположении аналогичным образом показывается, что (5.2) при любом $m = 1, \ldots$ эквивалентно условию

$$R_m x_0 > T_m y_0$$

В каждом из $Mn$ неравенств, определяющих совокупность $z_0$, удовлетворяющих (5.2), группа Б выбирает $V^*(0)$ следующим образом: $(V^*(0))_{jj} = 1$ при $(R_m S^2)_{ij} > (T_m)_{ij}$; $(V^*(0))_{jj} = 0$ при $(R_m S^2)_{ij} \leqslant \leqslant (T_m)_{ij}$, $j = 1, \ldots, Kn$ (в $i$-ом неравенстве). На основании леммы 2 вытекает, что $\exists N_0^{ij}$: $\forall m \geqslant N_0^{ij}$ будет: $(V^*(k))_{jj} = 0$, $k = 0, \ldots, m - N_0^{ij}$, $(V^*(k))_{jj} = 1$, $k = m - N_0^{ij} + 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, Mn$; $j = 1, \ldots, Kn$. Таким образом, при $B^2S^1 \geqslant S^1B^1$, $B^2 \geqslant S^1B^1S^2$, $S^1B^1 \neq \neq 0$ в случае а) получим

$$W_1^m = \bigcup_{i=1}^{Kn} \{z_0 : z_0 \in \operatorname{int} R_+^{(K+M)n}, \forall j : 1 \leqslant j \leqslant m, R_j x_0 -$$

$$- T_j y_0 \in \operatorname{int} R_+^{Mn}, (D_m x_0)_i \geqslant (Q_m y_0)_i\} / \bigcup_{j=1}^{m-1} W_1^j$$

$$W_1^1 = \bigcup_{i=1}^{Kn} \{z_0 : z_0 \in \operatorname{int} R_+^{(K+M)n}, R_0 x_0 - T_0 y_0 \in \operatorname{int} R_+^{Mn}, (D_0 x_0)_i \geqslant$$

$$\geqslant (Q_0 y_0)_i\}, \; W_1^{**} = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_1^m$$

Оптимальная стратегия группы А, при таком соотношении параметров игры, есть функция $u^{op}(\cdot)$: $R_+^{(K+M)n} \to [0, 1]^{Mn}$, т. е. $u^{op}(z) = (u^{op,1}(z), \ldots, u^{op,Mn}(z))$, где

$$u^{op,i}(z) = \begin{cases} 1, & z \in W_1^{**} \\ \text{в ином случае не определена} \end{cases}$$

Множества $W_1^m$, $W_1^{**}$, оптимальная стратегия $u^{op}(\cdot)$ группы А находятся точно так же, как при неравномерном разбиении полуоси $[0, +\infty)$ в случае *а*), так и при любом разбиении полуоси $[0, +\infty)$ в случае *б*).

Отметим, что решение многошаговых игр, найденное в случае б), не может быть полезным при нахождении множеств $W_1^T$, $W_1^*$, оптимальной стратегии $u^{op}(\cdot)$ в дифференциальной игре, так как такими многошаговыми играми нельзя аппроксимировать исходную дифференциальную игру. Действительно, вследствие того что в дифференциальной игре начальное состояние $z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)}$, то $\exists \Delta^* > 0$: что для $\Delta_0 < \Delta^*$ $z(0)$ не будет начальным состоянием любой многошаговой игры, у которой начальные состояния удовлетворяют условию *б*).

**6. Решение дифференциальной игры качества.** Пусть $\delta > 0$. Обозначим через $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A_\delta}$ — семейство разбиений полуоси $[0, +\infty)$, обладающих свойством: $\sup_k (\tau_{k+1}^{\Delta\alpha} - \tau_k^{\Delta\alpha}) \leqslant \delta$, через $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A_\delta^T}$ семейство разбиений сегмента $[0, T]$, $T > 0$, обладающих свойством: $\sup_k (\tau_{k+1}^{\Delta\alpha} - \tau_k^{\Delta\alpha}) \leqslant \delta$. В любой многошаговой игре, порожденной разбиением $\Delta_\alpha$ $(\alpha \in A_\delta)$ полуоси $[0, +\infty)$, решение которой находилось в случае *а*), найдем множество $(W_1^{**})_{\Delta_\alpha} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_1^n$. Аналогично в многошаговой игре, порожденной разбиением $\Delta_\alpha$ $(\alpha \in A_\delta^T)$ сегмента $[0, T]$, решение которой находилось в случае а), найдем множество $(\overline{W}_1)_{\Delta_\alpha} = \bigcup_{n=1}^{N(T)} W_1{}^n$, где $N(T)$ — число шагов в такой многошаговой игре. Положим

$$V_1{}^T = \bigcup_{\delta_0>0} \bigcap_{0<\delta\leqslant\delta_0} \bigcap_{\{\Delta_\alpha\}_{\alpha\in A_\delta^T}} (\overline{W}_1)_{\Delta_\alpha};\quad V_1 = \bigcup_{\delta_0>0} \bigcap_{0<\delta\leqslant\delta_0} \bigcap_{\{\Delta_\alpha\}\alpha\in A_\delta} (W_1^{**})_{\Delta_\alpha}$$

*Теорема* 1. Задача 1 имеет решение в следующих случаях соотношения параметров игры:

1) $B^2S^1 \geqslant S^1B^1,\ B^2 \geqslant S^1B^1S^2,\ S^1B^1 \neq 0$;
2) $B^2S^1 \leqslant S^1B^1,\ S^1B^1S^2 \geqslant B^2,\ S^1S^2 \leqslant E_1,\ S^2S^1 \leqslant E_0,\ S^1B^1 \neq 0$;
3) $B^1 \geqslant S^2B^2S^1,\ S^1S^2 \geqslant E_1,\ S^1B^1 \neq 0$;
4) $B^2S^1 \geqslant S^1B^1,\ B^2 \leqslant S^1B^1S^2,\ S^1S^2 \geqslant E_1,\ S^2S^1 \geqslant E_0,\ S^1B^1 \neq 0$

причем $W_1{}^T = V_1{}^T - \bigcup_{0<t<T} V_1{}^t,\ W_1 = V_1$.

В случае 1 доказательство теоремы 1 легко получается из лемм 1, 2 и определения множеств $V_1{}^T$, $V_1$. В остальных случаях оно получается аналогично.

**7. Случай несогласованного выбора стратегий объектами в группе.** В этом случае, при построении множества оптимальности $P_i$-го объекта в группе А, он должен партнеров по группе считать относящимися к объектам группы Б. С учетом этого, как и ранее, определяются чистая стратегия $P_i$-го объекта в группе, ломаные Эйлера и движения, порожденные стратегией $u_i(\cdot)$ из позиции $(0, z(0))$. Изменится определение множества оптимальности группы А.

*Определение* 1*. Множеством оптимальности группы А за время $T$ $(0 < T < +\infty)$ называется множество:

$$\overline{W}_1{}^T = \bigcup_{i=1}^{M} (\overline{W}_1{}^T)_i$$

Здесь

$$(\overline{W}_1{}^T)_i = \{z(0) : z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)} : [\exists u_i^{op}(\cdot) : \forall z[t, 0, z(0), u_i^{op}(\cdot)]\ \exists s : 0 \leqslant$$
$$\leqslant s \leqslant T : z(s) \in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} T_j), x(\tau_0) \in \operatorname{int} R_+^{nM}, 0 \leqslant \tau_0 \leqslant s],\ \forall \tau_1 : 0 <$$
$$< \tau_1 < T\ \neg [\exists u_i(\cdot) : \forall z[t, 0, z(0), u_i(\cdot)]\ \exists s : 0 \leqslant s \leqslant\ \tau_1\ z(s) \in$$
$$\in (\bigcap_{i=1}^{Mn} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{Kn} T_j),\ x(\tau_0) \in \operatorname{int} R_+^{nM},\ 0 \leqslant \tau_0 \leqslant s]\}$$

Стратегия $u_i^{op}(\cdot)$ называется оптимальной стратегией $P_i$-го объекта в группе.

*Определение* 2*. Множеством оптимальности группы А в дифференциальной игре называется множество:

$$\overline{W}_1 = \bigcup_{0<T<+\infty} \overline{W}_1{}^T$$

Множество оптимальности $\overline{W}_1$ можно представить и таким образом:

$$\overline{W}_1 = \bigcup_{i=1}^{M} (\overline{W}_1)_i\quad (\overline{W}_1)_i = \bigcup_{0<T<+\infty} (\overline{W}_1{}^T)_i$$

При этом $(\overline{W}_1)_i$ называется множеством оптимальности $P_i$-го объекта в группе, в дифференциальной игре.

Задачи 1 и 2 формулируются аналогично. И точно так же рассматриваются многошаговые игры качества, аппроксимирующие дифференциальную игру при несогласованном выборе стратегий объектами в группе.

Введем некоторые обозначения. Пусть $A$ — некоторая матрица размерности $m \times n$. Тогда $A^*_{[k,l]}$ $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$ это матрица следующего вида: $a_{ij}^* = -a_{ij}^-$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$; $l+1 \leqslant j \leqslant n$; $a_{ij}^* = a_{ij}^+$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $k \leqslant j \leqslant l$; а $\bar{A}_{[k,l]}$ — матрица следующего вида: $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}^-$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$; $l+1 \leqslant j \leqslant n$; $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $k \leqslant j \leqslant l$. Здесь

$$x^- = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Если $i_0$: $1 \leqslant i_0 \leqslant M$, то

$$D_0 = S^{1,*}_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]} \cdot B^1, \quad D_m = D_{m-1}\Gamma_0 + D_{m-1}B^1 + (Q_{m-1}S^1 - D_{m-1})^*_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]} \cdot B^1$$

$$Q_0 = \Gamma_1 + B^2, \quad Q_m = Q_{m-1}\Gamma_1 + Q_{m-1}B^2 + (D_{m-1}S^2 - Q_{m-1})^+ B^2$$

$$R_0 = \Gamma_0, \quad R_m = R_{m-1}\Gamma_0 + R_{m-1}B^1 + \overline{(T_{m-1}S^1 - R_{m-1})}_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]}B^1$$

$$T_0 = S^2B^2, \quad T_m = T_{m-1}\Gamma_0 + T_{m-1}B^2 + (R_{m-1}S^2 - T_{m-1})^+B^2$$

Так как и в данном случае основой для решения дифференциальной игры служит исследование многошаговых игр, аппроксимирующих дифференциальную игру, то покажем, как введенные величины позволяют записать множества оптимальности в многошаговой игре группы А при несогласованном выборе стратегий объектами в группе. Пусть $B^2S^1 \geqslant S^1B^1$, $B^2 \geqslant S^1B^1S^2$. Считаем $m = 1$.

Рассмотрим построение множеств $(\overline{W}_1{}^m)_{i_0}$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant M)$. Тогда из условия $(y(\tau_1))_i \leqslant 0$, при не согласованном выборе, получим

$$[S^{1,*}_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]} \cdot B^1 x(0) \geqslant (\Gamma_1 + B^2)\, y(0)]_i, \quad i = 1, \ldots, Kn$$

И в совокупности с условием а) имеем

$$(\overline{W}_1{}^1)_{i_0} = \bigcup_{i=1}^{Kn} \{z(0) : z(0) \in \operatorname{int} R_+^{n(K+M)},\ \Gamma_0 x(0) - S^2B^2 y(0) \in \operatorname{int} R_+^{Mn}\ [S^{1,*}_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]} B^1 x(0) \geqslant (\Gamma_1 + B^2)\, y(0)]_i\}$$

При $(S^{1,*}_{[(i_0-1)n+1,\, i_0 n]} \cdot B^1)_{ik} = 0\ \forall i = 1, \ldots, Kn; k = 1, \ldots, Mn\ (\overline{W}_1{}^1)_{i_0} = \varnothing$.

Аналогично находятся множества $(\overline{W}_1{}^m)_{i_0}$ $(m = 2, \ldots)$:

$$(\overline{W}_1{}^m)_{i_0} = \bigcup_{i=1}^{Kn} \{z(0) : z(0) \in \operatorname{int} R_+^{(K+M)n},\ \forall j : 1 \leqslant j \leqslant m,\ R_j x(0) - T_j y(0) \in \operatorname{int} R_+^{Mn},\ (D_m x(0))_i \geqslant (Q_m y(0))_i\} \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (\overline{W}_1{}^j)_{i_0},\ \overline{W}_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i_0=1}^{m} (\overline{W}_1{}^m)_{i_0}$$

Как и ранее, при таком соотношении элементов матриц, выписываются оптимальные стратегии объектов в группе. Для дифференциальной игры будет справедлива теорема 1.

Отметим, что при несогласованном способе выбора стратегий объектами в группе, множества оптимальности $\overline{W}_1{}^T$, $\overline{W}_1$ будут «меньше» множеств оптимальности $W_1{}^T$, $W_1{}^*$, т. е. $\overline{W}_1{}^T \subset W_1{}^T$, $W_1 \subseteq W_1{}^*$, что вытекает из их определения.

8. **Пример.** Покажем, например, что $W_1 \subset W_1{}^*$. Рассмотрим дифференциальную игру качества группы, состоящей из двух объектов и группы, состоящей из одного объекта. Движение объектов первой группы задается системой

$$x_1^{\cdot}(t) = -x_1(t) + (1 - u_1(t))\, x_1(t) - v(t) \cdot 2y(t)$$
$$x_2^{\cdot}(t) = -x_2(t) + (1 - u_2(t))\, x_2(t) - v(t) \cdot 2y(t)$$

второй группы — уравнением

$$y^{\cdot}(t) = -y(t) + (1 - v(t))\,2y(t) - u_1(t)\,x_1(t) - u_2(t)\,x_2(t)$$

В данной игре выполняется условие 1) теоремы 1. В случае согласованного выбора стратегий объектами в группе, получаем

$$W_1^* = \{(x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)):\ (x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)) \in \operatorname{int} R_+^3,\ y(0) < \sqrt{x_1(0)\,x_2(0)}\},$$

$$u_i^{op}(\cdot) : u_i^{op}(x_1(0), x_2(0), y(0)) = \begin{cases} 1, & (x_1(0), x_2(0), y(0)) \in W_1^*, \\ \text{в ином случае не определена} \end{cases}$$

При не согласованном выборе стратегий объектами в группе получаем множества оптимальности $(\overline{W}_1)_1$, $(\overline{W}_1)_2$ первого и второго объектов в группе

$$(\overline{W}_1)_1 = \{(x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)):\ (x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)) \in \operatorname{int} R_+^3,\ y(0) < \sqrt{x_1(0)\,x_2(0)},\ y(0) < {}^1/_2 x_1(0)\},$$

$$(\overline{W}_1)_2 = \{(x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)):\ (x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)) \in \operatorname{int} R_+^3,\ y(0) < \sqrt{x_1(0)\,x_2(0)},\ y(0) < \frac{1}{2}x_2(0)\}$$

Множество оптимальности первой группы такое

$$\overline{W}_1 = (\overline{W}_1)_1 \cup (\overline{W}_1)_2$$

Оптимальные стратегии в этом случае определяются так

$$u_i^{op}(\cdot) : u_i^{op}(x_1(0), x_2(0), y(0)) = \begin{cases} 1, & (x_1(0), x_2(0), y(0)) \in (\overline{W}_1)_i \\ \text{в ином случае не определена}; & i = 1, 2 \end{cases}$$

Таким образом: $\overline{W}_1 \subset W_1^*$. Тогда, если начальные состояния объектов в группах такие: $(x_1(0),\ x_2(0),\ y(0)) = (1,\ 1,\ (0{,}75))$, то первая группа объектов при согласованном выборе стратегий объектами в группе получит выполнение условия (1.1) не позднее, чем за время $t^* = (\ln 7 - \ln 4)/4$, применяя свои оптимальные стратегии $u_1^{op}(\cdot)$, $u_2^{op}(\cdot)$. Если объекты первой группы будут действовать несогласованно, то они не могут получить выполнение условия (1.1) при любом $t$, при таких начальных состояниях.

**9. Заключение.** Как уже отмечалось [3], изложенный метод удобен для численной реализации, так как основан на решении аппроксимирующих многошаговых игр, являющихся дискретным аналогом исходной дифференциальной игры. Этот метод позволяет для определения оптимальных стратегий, множеств оптимальности обходиться без нахождения решения системы дифференциальных уравнений, что в случае большой размерности системы, большого количества объектов в группах связано с большими вычислительными трудностями. Отметим также, что рассмотренная дифференциальная игра двух групп объектов может хорошо описывать процесс конфликтного взаимодействия двух групп экономических систем, непрерывно функционирующих во времени [6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кононенко А. Ф.* Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 5. С. 1105—1116.
2. *Чикрий А. А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906—913.
3. *Малюков В. П.* Конструктивный метод решения дифференциальной игры качества с двумя терминальными поверхностями // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 3. С. 323—331.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
6. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973. 335 с.



Киев

Поступила в редакцию
6.III.1990