

В. Б. Колмановский, Н. И. Королева

ОБ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМОЙ ХИЩНИК — ЖЕРТВА ПРИ УЧЕТЕ ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Рассматривается задача оптимального управления по быстродействию системой хищник — жертва при учете внутривидовой конкуренции среди жертв. В роли управления выступают используемые на практике пестициды или инсектициды, действующие либо на жертвы, либо на хищников. Строится синтез оптимального управления и изучается зависимость времени быстродействия от параметров задачи. Задача управления по быстродействию системой хищник — жертва без учета внутривидовой конкуренции исследовалась ранее для модели Лотки — Вольтерры [1] и для модели Моно [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, моделирующую взаимодействие двух популяций при учете внутривидовой конкуренции [3]

$$\begin{aligned} X_1'(\tau) &= (a_1 - a_2 Y_1(\tau) - a_5 X_1(\tau) - a_6 u_1(\tau)) X_1(\tau) \\ Y_1'(\tau) &= (a_3 X_1(\tau) - a_4 - a_7 Y_1(\tau) - a_8 u_1(\tau)) Y_1(\tau) \end{aligned}$$

Здесь $X_1(\tau)$ и $Y_1(\tau)$ — численности жертв и хищников в момент времени τ , $u_1(\tau)$ — управляющее воздействие, $a_i > 0$ некоторые постоянные, характеризующие изменение численности популяций, при этом a_2, a_3 характеризуют межвидовое взаимодействие, а a_5, a_7 — внутривидовую конкуренцию в популяциях, a_6, a_8 учитывают влияние управляющего воздействия.

Перейдем к безразмерным переменным $X(t), Y(t), u(t), t$ по формулам $X_1(\tau) = a_4 a_3^{-1} X(t), Y_1(\tau) = a_1 a_2^{-1} Y(t), u_1(\tau) = a_1 a_6^{-1} u(t), \tau = a_1^{-1} t$
 $b = a_4 a_1^{-1}, \alpha = (a_1 a_3)^{-1} a_4 a_5, c = (a_2 a_4)^{-1} a_7 a_1, d = (a_4 a_6)^{-1} a_8 a_1$

В безразмерных переменных уравнения управляемой системы в предположении, что в популяции хищников отсутствует внутривидовая борьба ($c = 0$), имеют вид

$$\begin{aligned} X'(t) &= (1 - Y(t) - \alpha X(t) - u(t)) X(t) \\ Y'(t) &= b (X(t) - 1 - d u(t)) Y(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ заданы условия

$$X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, X_0 > 0, Y_0 > 0 \quad (1.2)$$

Относительно управления $u(t)$ предполагается, что

$$0 \leq u(t) \leq \gamma \quad (1.3)$$

где γ — заданная постоянная.

Задача управления состоит в переводе системы (1.1) из положения (X_0, Y_0) в ненулевое положение равновесия системы при $u = 0$ за минимально возможное время $T(X_0, Y_0, u_0)$, где u_0 — оптимальное управление (OU).

2. Задача быстродействия с влиянием управления на жертвы. Рассмотрим систему (1.1) в предположении, что управление действует только на жертвы, т. е. $d = 0$. Тогда (1.1) примет вид

$$X' = (1 - Y - \alpha X - u) X, Y' = b (X - 1) Y \quad (2.1)$$

при начальных условиях (1.2) и ограничениях на управление (1.3).

Выполнение естественного требования о том, что в отсутствие хищников стационарное значение численности жертв больше, чем при их присутствии, приводит к условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Отметим, что при любом измеримом управлении $u(t)$, удовлетворяющем условию (1.3), решение задачи (2.1), (1.2) для любого конечного t положительно. При $u = 0$ у системы (2.1) имеется только одно положение равновесия внутри первого квадранта — точка $R = (1, 1 - \alpha)$.

Задача быстрогодействия состоит в переводе системы (2.1) из положения (X_0, Y_0) в положение R за минимально возможное время. Таким образом, обозначая через $T(X_0, Y_0, u)$ момент первого достижения системой (2.1), (1.2), (1.3) точки R при управлении u , заключаем, что ОУ u_0 определяется соотношением

$$\inf_u T(X_0, Y_0, u) = T(X_0, Y_0, u_0) \quad (2.2)$$

Дальнейшее исследование задачи зависит от ее параметров.

Положение равновесия — устойчивый фокус. Наличие устойчивого фокуса соответствует параметрам, удовлетворяющим неравенству

$$\alpha^2 < 4b(1 - \alpha) \quad (2.3)$$

Заметим, что при $u = 0$ точка R , являющаяся устойчивым фокусом, недостижима ни за какое конечное время.

Покажем, что при выполнении неравенства (2.3) существует ОУ. Перейдем к обратному времени $t \rightarrow -t$. В обратном времени уравнения (2.1) принимают вид

$$X' = (Y + \alpha X + u - 1)X, \quad Y' = b(1 - X)Y \quad (2.4)$$

Обозначим через APR часть траектории $X(t), Y(t), t \geq 0$ системы (2.4) при управлении $u = \gamma$ и начальном условии $X(0) = 1, Y(0) = 1 - \alpha$, для которой $X(t) \geq 1, t \geq 0$ (фиг. 1).

Положим управление $u = \gamma$ на APR и $u = 0$ всюду вне APR . Поскольку R — устойчивый фокус, то при указанном управлении u время достижения системой (2.1) точки R конечно при любом начальном условии (1.2). Отсюда и из [4] следует существование ОУ u_0 . Значит, на основании принципа максимума, существует такое ненулевое решение ψ_1, ψ_2 системы уравнений

$$\psi_1' = \psi_1(Y - 1 + u + 2\alpha X) - b\psi_2 Y, \quad \psi_2' = \psi_1 X + b\psi_2(1 - X) \quad (2.5)$$

что [5]

$$\max_u H(X, Y, \psi_1, \psi_2, u) = H(X, Y, \psi_1, \psi_2, u_0) \equiv 0 \quad (2.6)$$

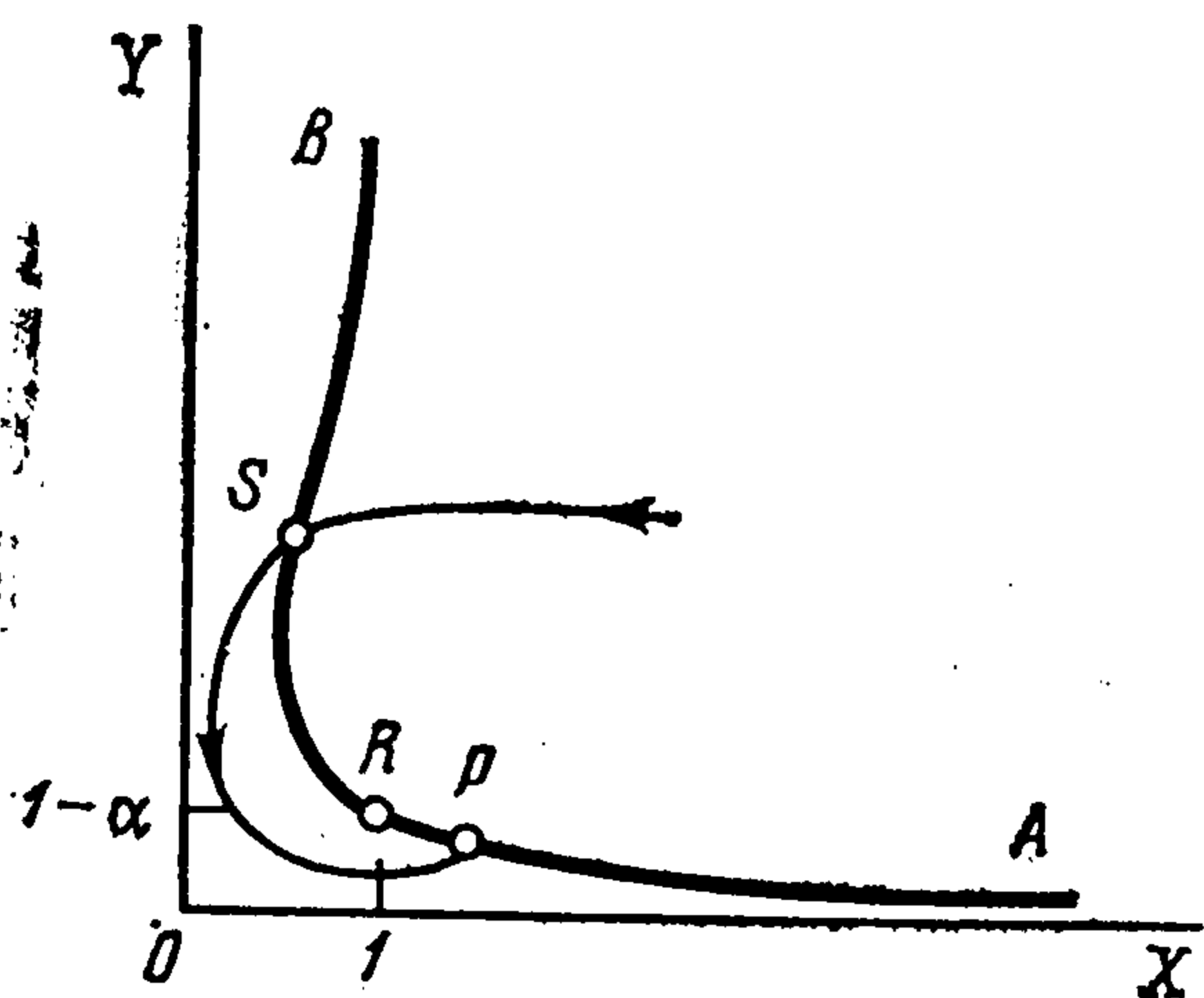
Здесь

$$H = \psi_1([1 - Y - u - \alpha X]X + \psi_2 b(X - 1)Y) + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const} \leq 0$$

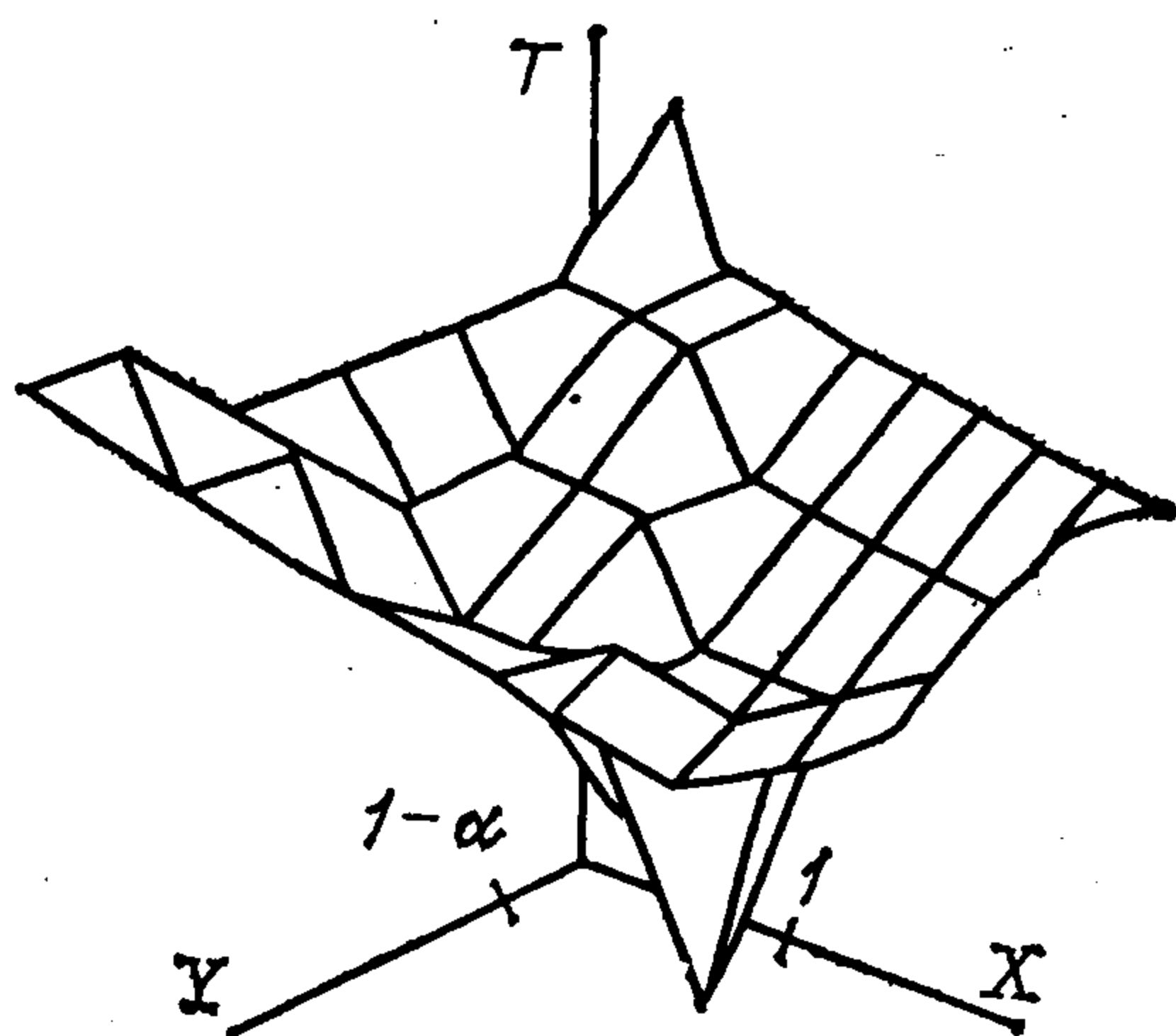
Из уравнений (2.5) вытекает, что функции $\psi_i(t)$ не могут обращаться в нуль на целых интервалах. Действительно, если, например, $\psi_1(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2], t_1 < t_2$, то $\psi_1'(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Поэтому в силу первого из уравнений (2.5) функция $\psi_2(t) \equiv 0, t_1 \leq t \leq t_2$, т. е. обе сопряженные переменные ψ_1, ψ_2 равны нулю одновременно, что невозможно. Подобные же аргументы показывают, что функции ψ_1 и ψ_2 могут иметь только простые нули. Поэтому на основании (2.6) ОУ u_0 кусочно-постоянно и равно либо нулю, либо γ .

Для дальнейшего исследования ОУ удобно перейти от переменных ψ_i к переменным φ_i по формулам

$$\varphi_1(t) = X(t)\psi_1(t), \quad \varphi_2(t) = Y(t)\psi_2(t)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Ввиду положительности $X(t)$ и $Y(t)$ знаки функций φ_1 и φ_2 совпадают со знаками ψ_1 и ψ_2 соответственно. Из (2.1), (2.5) вытекают следующие уравнения для φ_i :

$$\varphi_1'(t) = (-b\varphi_2 + \alpha\varphi_1)X, \quad \varphi_2'(t) = \varphi_1Y \quad (2.7)$$

Разделим теперь оптимальную траекторию на участки, целиком расположенные либо в области $X > 1$, либо в области $X < 1$. Оказывается, что на любом участке оптимальной траектории, целиком расположенном в области $X > 1$, может быть не более одной точки переключения ОУ и переключение возможно только от значения $u = 0$ к значению $u = \gamma$.

Действительно, пусть $X(t) > 1$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ и имеется скачок управления в момент времени $\tau \in [t_1, t_2]$. Поскольку τ — точка переключения ОУ, то в силу (2.6) в этой точке $\varphi_1(\tau) = 0$. Далее из (2.6), (2.1) вытекает, что

$$\varphi_1 X'/X + \varphi_2 Y'/Y + \psi_0 = 0$$

Отсюда, учитывая, что в силу (2.1) $Y'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, следует соотношение

$$\varphi_2(t) = Y[-\psi_0 - \varphi_1 X'/X]/Y', \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Значит, на основании (2.7) при $t_1 \leq t \leq t_2$ справедливы уравнения:

$$\varphi_1'(t) = \varphi_1(\alpha X + bYX'/Y') + b\psi_0 XY/Y', \quad \varphi_1(\tau) = 0 \quad (2.8)$$

Если бы $\psi_0 = 0$, то ввиду (2.8) функция $\varphi_1(t) \equiv 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, что невозможно. Но $\psi_0 \leq 0$. Поэтому постоянная $\psi_0 < 0$, ввиду чего $\varphi_1(t) < 0$ при $\tau < t \leq t_2$ и $\varphi_1(t) > 0$ при $t_1 \leq t < \tau$. Следовательно, используя принцип максимума, заключаем, что до тех пор, пока оптимальная траектория остается в области $X > 1$, ОУ $u_0 = \gamma$ при $t > \tau$ и $u_0 = 0$ при $t < \tau$. Подобным же образом устанавливается, что на участке оптимальной траектории, целиком расположенном в области $X < 1$, может быть не более одной точки переключения ОУ и переключение возможно только от значения $u = \gamma$ к значению $u = 0$.

Качественный характер линии переключения ОУ зависит от соотношения чисел α , b , γ .

Пусть вначале

$$\gamma \geq 1 - \alpha - \alpha^2/(4b) \quad (2.9)$$

Если выполнены неравенства (2.3), (2.9), то уравнения (2.1) при $u = \gamma$ в области $X > 0$, $Y > 0$ либо не имеют точек покоя, либо имеют одну точку покоя с координатами $(1, 1 - \alpha - \gamma)$, которая будет устойчивым узлом. В любом из этих случаев часть APR линии переключения представляет собой траекторию системы (2.1) при $u = \gamma$ (фиг. 1).

Для получения кривой APR можно решить уравнения (2.4) при $u = \gamma$, $t > 0$ с начальным условием $X(0) = 1$, $Y(0) = 1 - \alpha$. Часть RSB линии переключения была получена численно.

Алгоритм численного решения состоял в следующем. Запишем уравнения (2.7) в обратном времени $t \rightarrow -t$

$$\dot{\varphi}_1(t) = (b\varphi_2 - \alpha\varphi_1) X, \quad \dot{\varphi}_2(t) = -\varphi_1 Y, \quad t > 0 \quad (2.10)$$

Рассмотрим систему (2.4), (2.10) при $u = \gamma$ и начальных условиях

$$X(0) = 1, \quad Y(0) = 1 - a, \quad \varphi_1(0) < 0, \quad \varphi_2(0) \quad (2.11)$$

где $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ — некоторые заданные величины. Решим задачу (2.4), (2.10), (2.11) при $u = \gamma$ на отрезке $[0, \tau_1]$, где τ_1 — первый нуль функции $\varphi_1(t)$. В момент τ_1 происходит переключение управления, которое становится равным нулю. Далее решение задачи (2.4), (2.10) ищется при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $u = 0$ с начальными условиями, задаваемыми в точке τ_1 , определенными на предшествующем шаге алгоритма. Здесь τ_2 — следующий после τ_1 нуль функции $\varphi_1(t)$. Точка с координатами $X(\tau_2)$, $Y(\tau_2)$ лежит на линии переключения RSB . Для определения других точек кривой RSB надлежит проделать описанные выше процедуры при других начальных значениях $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$.

Для значений параметров $\gamma = 2$, $\alpha = 0.5$, $b = 1/2$ на фиг. 1 приведена линия переключения $APRSB$, а на фиг. 2 — функция Беллмана.

Рассмотрим теперь случай

$$0 < \gamma < 1 - \alpha - \alpha^2/(4b) \quad (2.12)$$

При выполнении неравенств (2.3), (2.12) система (1.1) с $u = \gamma$ имеет точки покоя $R_1 = (1, 1 - \alpha - \gamma)$ и $R_2 = (\alpha^{-1}(1 - \gamma), 0)$, причем R_1 — устойчивый фокус, а R_2 — седло. Рассмотрим сепаратрису в системе (2.1) с $u = \gamma$, выходящую из точки R_2 и входящую в точку R_1 . Эта сепаратриса выходит из седла R_2 с угловым коэффициентом $\alpha^{-1}(\gamma - 1)(b + \alpha) < 0$. Обозначим через Y_1 максимальное значение ординаты сепаратрисы. В силу (2.1) точка сепаратрисы, в которой она достигает значение Y_1 , расположена на прямой $X = 1$. В зависимости от значения Y_1 при условиях (2.3), (2.12) линия переключения ОУ имеет следующий вид. Если $Y_1 < 1 - \alpha$, то качественный характер линии переключения сохраняется тем же, что и в случае (2.3), (2.9) (фиг. 1). Если $Y_1 = 1 - \alpha$, то линия переключения приведена на фиг. 3 (при значениях параметров $\alpha = 0,03$, $\gamma = 0,4884$, $b = 1/16$). Здесь R_2APR — часть сепаратрисы системы (2.1) с $u = \gamma$, выходящей из точки R_2 и входящей в точку R_1 . Наконец, при $Y_1 > 1 - \alpha$ линия переключения приведена на фиг. 4 (при параметрах $\alpha = 0,03$, $\gamma = 0,02$, $b = 1/16$), где PR — траектория системы (2.4) при $u = \gamma$ и начальном условии $X(0) = 1$, $Y(0) = 1 - \alpha$. Во всех случаях участок RSB , а также участок AP в последнем случае получены численно (алгоритм численного счета описан выше). Однако в отличие от описанных на фиг. 1, 3 ситуаций, где число точек переключения не более двух, в случае фиг. 4 число точек переключения зависит от начального положения системы (2.1) и может быть больше двух.

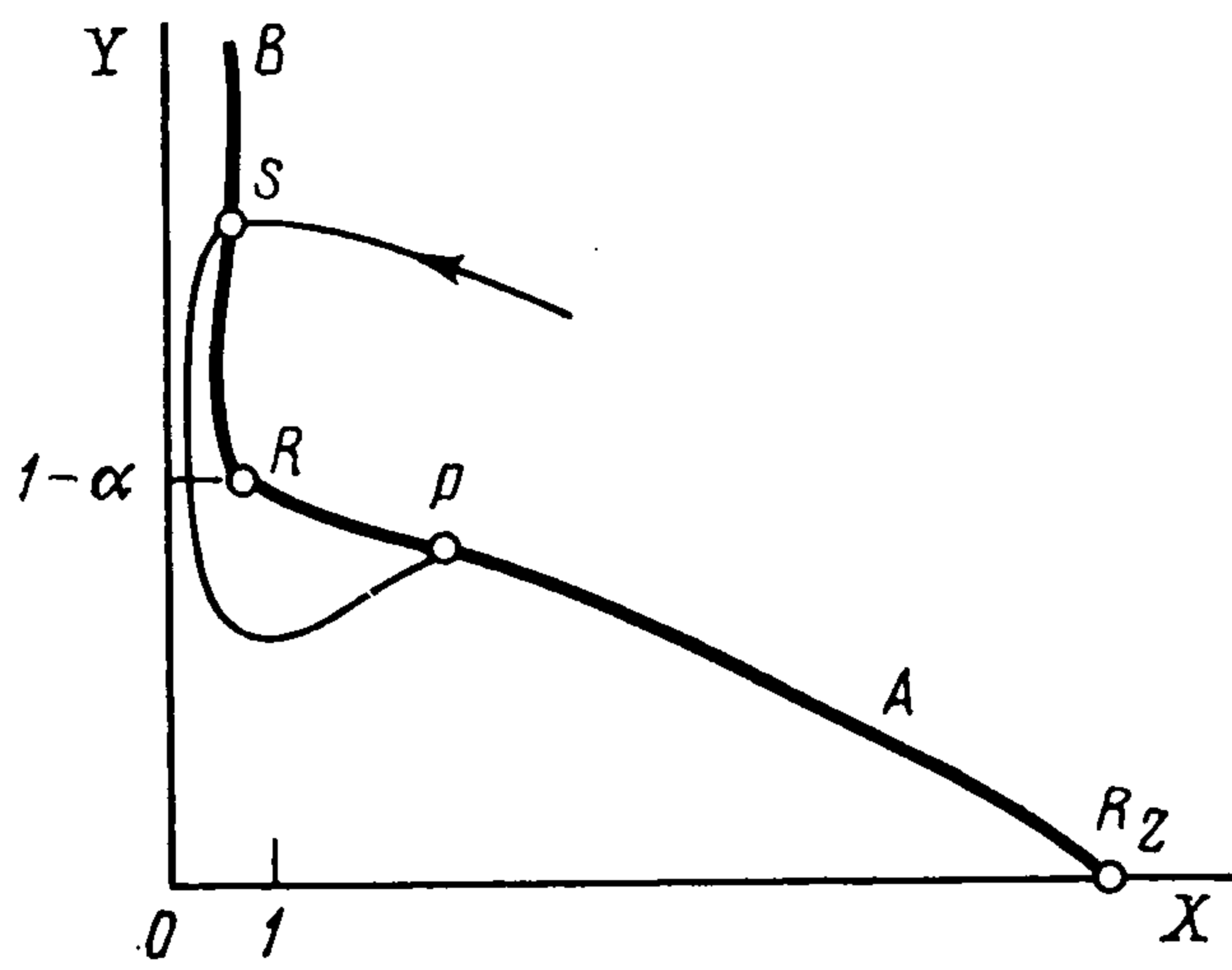
Положение равновесия — устойчивый узел. Рассмотрим теперь параметры, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha^2 \geq 4b(1 - \alpha) \quad (2.13)$$

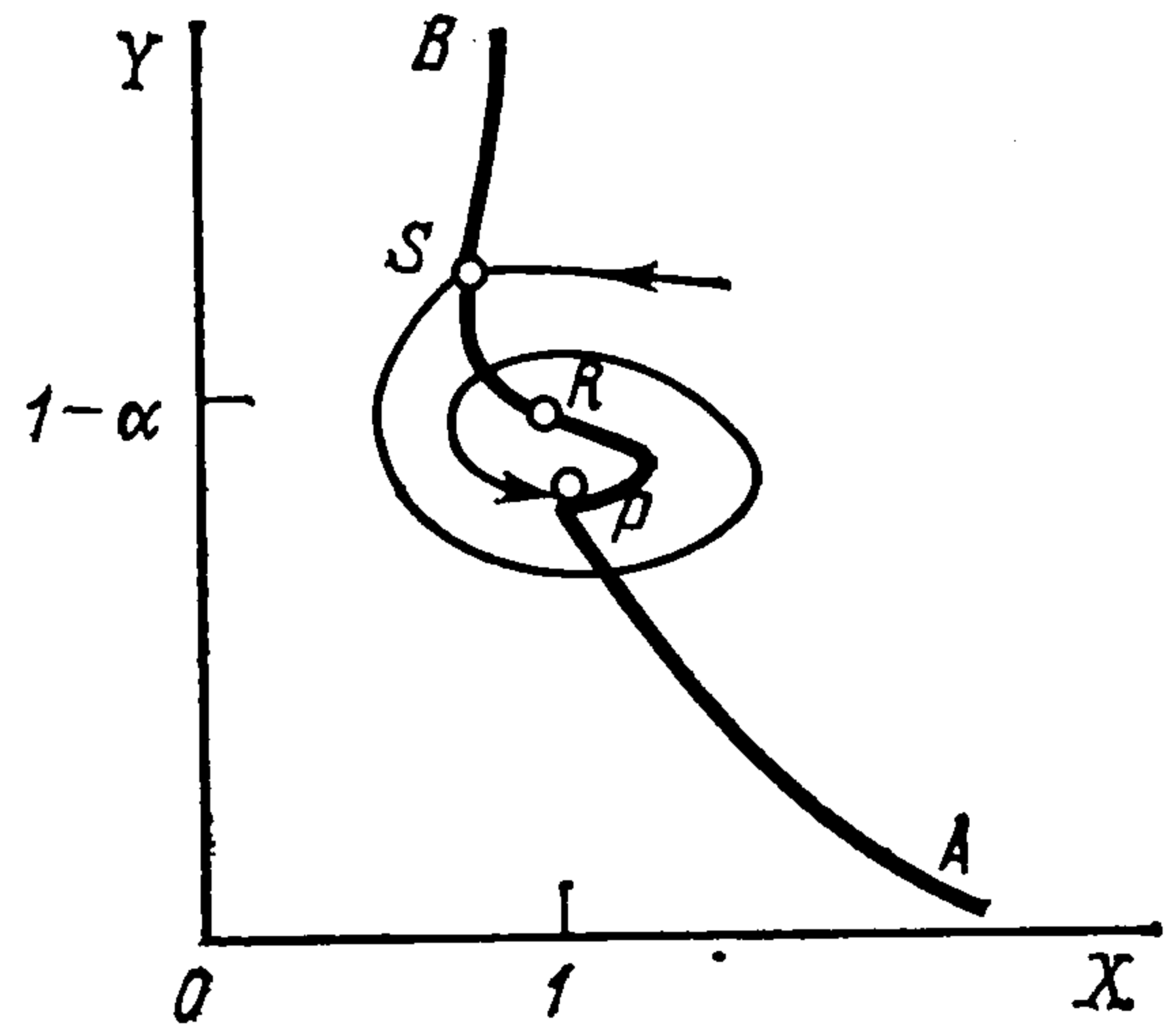
при которых R — устойчивый узел.

Заметим, что при $u = 0$ точка $R = (1, 1 - \alpha)$ являющаяся устойчивым узлом, недостижима ни за какое конечное время. Эта точка обладает двумя направлениями входа при $\alpha^2 > 4b(1 - \alpha)$ и одним направлением входа при $\alpha^2 = 4b(1 - \alpha)$ (противоположные направления входа, имеющие один и тот же угловой коэффициент, не различаются).

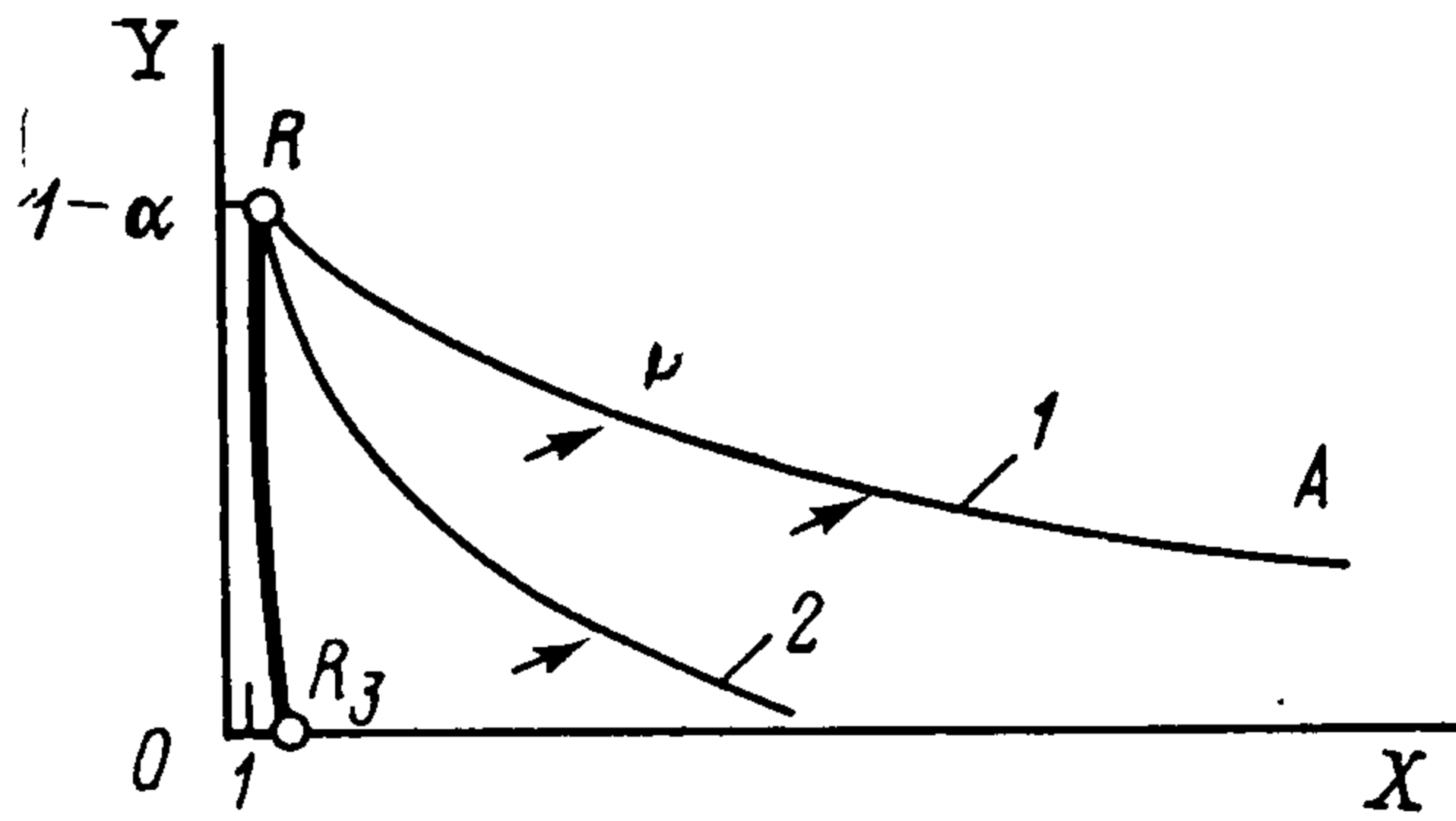
Обозначим через $R_3 = (\alpha^{-1}, 0)$ точку покоя системы (2.1) при $u = 0$, а через R_3R — сепаратрису, выходящую из седла R_3 с угловым коэффициентом $b(1 - \alpha^{-1}) - 1 < 0$ и входящую в узел R_3 .



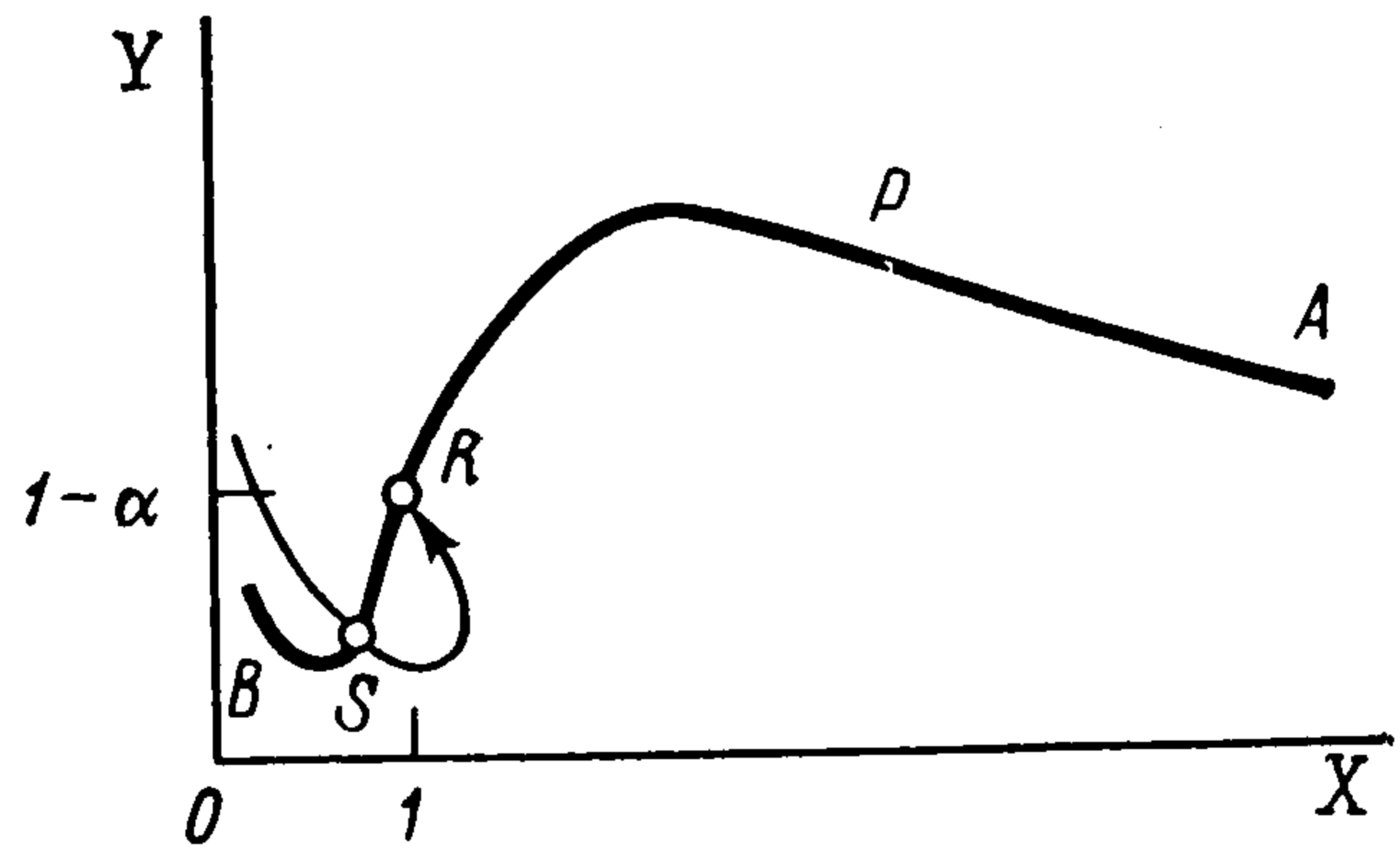
Фиг. 3



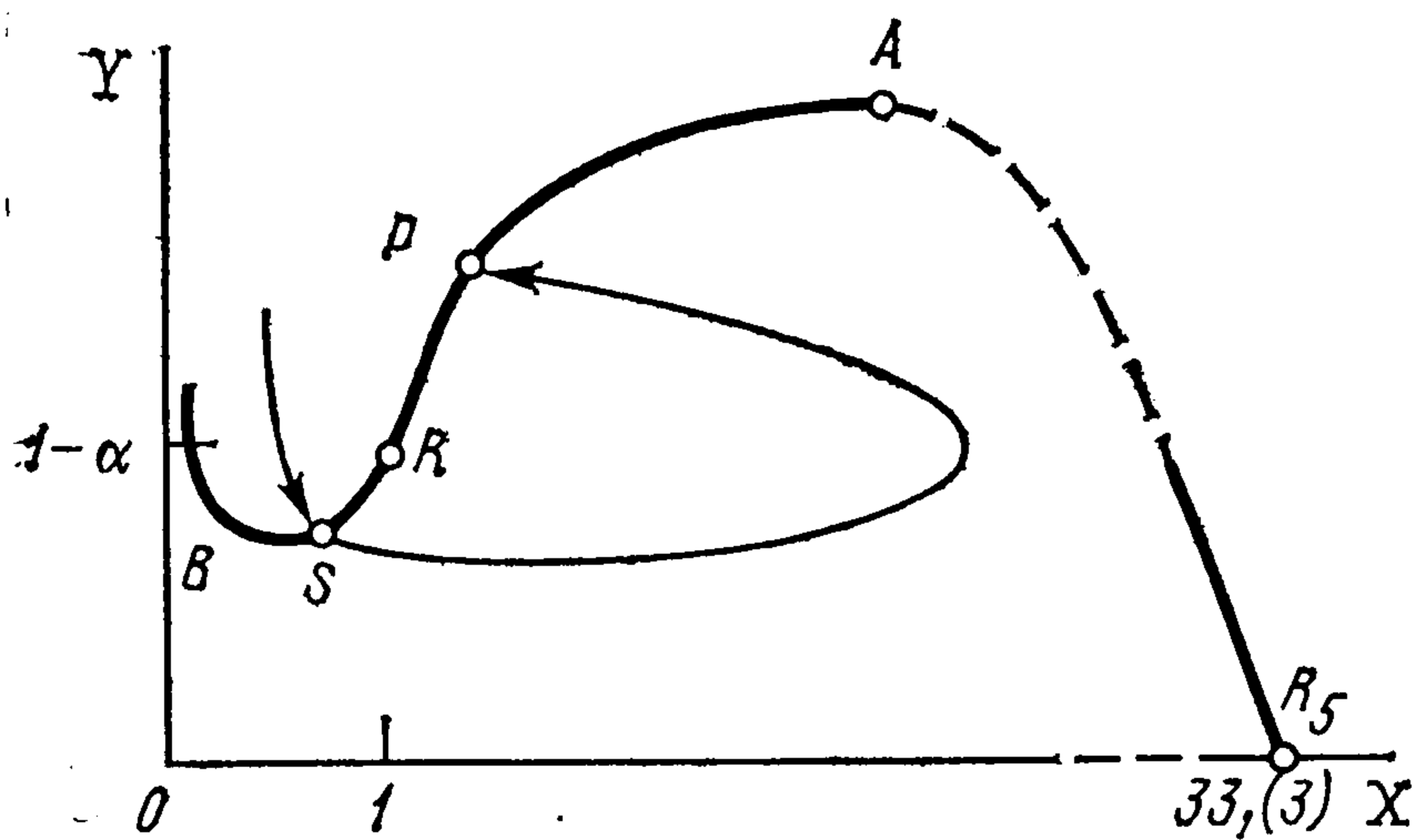
Фиг. 4



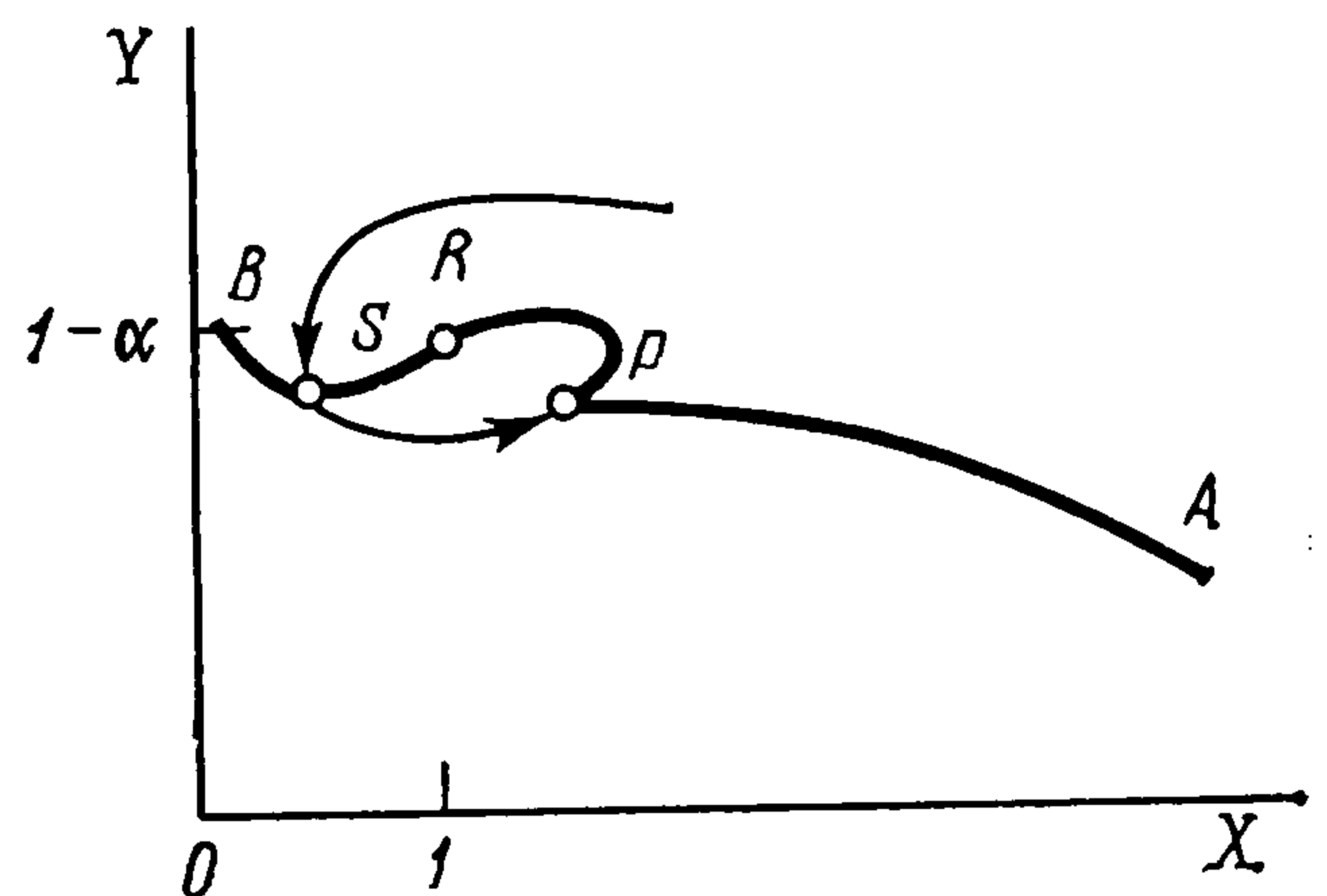
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Пусть далее APR — траектория системы (2.4) при $u = \gamma$, $t > 0$ с начальным условием $X(0) = 1$, $Y(0) = 1 - \alpha$.

Заметим, что система (2.1) при $u = \gamma$ не имеет внутри первого квадранта особых точек, если $\gamma \geq 1 - \alpha$ и имеет одну точку R_1 — устойчивый узел, если $\gamma < 1 - \alpha$. Из анализа фазового портрета системы (2.1) при $U = 0$ и $U = \gamma$ вытекает, что область управляемости D этой системы заключена между кривыми R_3R и APR (фиг. 5), полученными при условии: 1) $\alpha = 0,5$, $b = 1/4$, $\gamma = 0,02$ для кривой 1; 2) $\alpha = 0,5$, $b = 1/4$, $\gamma = 2$ для кривой 2. При этом R_3R не принадлежит D , а $APR \in D$. ОУ равно нулю всюду в D , кроме кривой APR и равно γ на APR . Для точек (X_0, Y_0) , не принадлежащих D , положение R недостижимо ни при каком допустимом управлении.

3. Задача быстрогодействия с влиянием управления на хищников. Изучим задачу быстрогодействия в предположении, что управление действует непосредственно лишь на хищников.

Уравнения системы в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned} X' &= (1 - Y - \alpha X) X \\ Y' &= b(X - 1)Y - uY, \quad 0 \leq u \leq \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Требуется за наименьшее время перевести систему (3.1) из положения (1.2) в положение равновесия $R(1, 1 - \alpha)$. Как и выше, синтез оптимального управления зависит от параметров задачи. Предположим, что справедливо неравенство (2.3). Тогда подобно изложенному в разд. 2 устанавливается существование ОУ, а следовательно, и справедливость соотношений (2.6), в которых

$$H = \psi_1 [(1 - Y - \alpha X) X + \psi_2 (b(X - 1) - U) Y + \psi_0, \quad (3.2)$$

$$\psi_0 = \text{const} \leq 0$$

Здесь ψ_1, ψ_2 — некоторое ненулевое решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_1 (Y - 1 + 2\alpha X) - b\psi_2 Y \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_2 (b(X - 1) - U) + \psi_1 X \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из этих соотношений и принципа максимума вытекает, что функции ψ_1 и ψ_2 не могут иметь кратных корней. Кроме того, переменные $\varphi_1 = X\psi_1$ и $\varphi_2 = Y\psi_2$ по-прежнему удовлетворяют уравнениям (2.7).

Оказывается, что на любом участке оптимальной траектории, целиком расположенной в области $1 - Y - \alpha X < 0$, может быть не более одной точки переключения ОУ и переключение возможно только от значения $U = 0$ к значению $U = \gamma$.

Действительно, пусть при $t_1 \leq t \leq t_2$ оптимальная траектория системы (3.1) лежит в области $1 - Y - \alpha X < 0$, где $X'(t) < 0$ и имеется момент переключения $\tau \in [t_1, t_2]$. В силу (2.6), (3.2) в момент τ должно быть $\alpha_2(\tau) = 0$ и, кроме того, справедливо равенство

$$\dot{\varphi}_1(t) = X(t) (-\psi_0 - \varphi_2(t) Y'(t)/Y(t)) / X'(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Отсюда и из (3.3) следует, что

$$\dot{\varphi}_2(t) = [-\alpha_2(t) X(t) Y'(t) - \psi_0 Y(t) X(t)] / X'(t), \quad \varphi_2(\tau) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Последние уравнения показывают, что $\psi_0 < 0$, а $\varphi_2(t) < 0$ при $\tau < t \leq t_2$ и $\varphi_2(t) > 0$ при $t_1 \leq t < \tau$.

Аналогично устанавливается, что на любом участке оптимальной траектории, целиком расположенном в области $1 - Y - \alpha X > 0$, может быть не более одной точки переключения ОУ и переключение возможно только от значения $U = \gamma$ к значению $U = 0$.

Изучим теперь траекторию системы (3.1) при $U = \gamma$, проходящую через точку R . Переходя к обратному времени ($t \rightarrow -t$), заключаем, что указанная траектория описывается соотношениями

$$\begin{aligned} X'(t) &= (\alpha X + Y - 1) X, \quad Y'(t) = (\gamma + b - bX) Y \\ X(0) &= 1, \quad Y(0) = 1 - \alpha, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть вначале $\gamma \geq b(\alpha^{-1} - 1)$.

Решение $X(t)$ и $Y(t)$ задачи (3.4) монотонно возрастает на отрезке $[0, \tau]$, где τ — первый момент времени, в который $Y'(\tau) = 0$. В силу (3.4) имеем $X(\tau) = \gamma b^{-1} + 1$. Отсюда и из (3.5) вытекает, что

$$X'(\tau) > \alpha \gamma b^{-1} + \alpha - 1 \geq 0 \quad (3.5)$$

Поэтому $X'(t) > 0$, $t \geq 0$ и $Y'(s) < 0$, $s > \tau$. Значит, при учете соотношений (3.4)

$$X(t) \rightarrow \infty, \quad Y(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

При выполнении неравенств (2.3), (3.5) линия переключения ОУ в задаче (3.1), (2.2) представлена на фиг. 6, где APR — траектория системы

(3.4). Линия переключения RSB получена численно при помощи того же алгоритма, что и в разд. 2.

Установим вид линии переключения OY , считая по-прежнему выполненным неравенство (2.3), для значений γ

$$\gamma < b(\alpha^{-1} - 1) = \gamma_1 \quad (3.6)$$

При выполнении условий (2.3), (3.6) система (3.1) с $U = \gamma$ имеет внутри первого квадранта точку покоя $R_4 = (1 + \gamma b^{-1}, 1 - \alpha - \alpha \gamma b^{-1})$. Исследуя обычным образом линеаризованные в окрестности R_4 уравнения (3.1) при $U = \gamma$, заключаем, что точка R_4 является либо устойчивым узлом при $\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_1$, либо устойчивым фокусом при

$$\gamma < \gamma_0 = -b + b^2(\alpha^2/4 + b\alpha)^{-1} < \gamma_1 \quad (3.7)$$

Если $\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_1$ и выполнено неравенство (2.3), то качественный характер линии переключения тот же, что и на фиг. 6 при параметрах $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,7$, $b = 1/2$.

Рассмотрим, наконец, случай (2.3), (3.7). Пусть $R_5(\alpha^{-1}, 0)$ — седло системы (3.1) при $U = \gamma$, а R_5R_4 — сепаратриса, выходящая из седла R_5 с угловым коэффициентом $(-1 + \gamma - \gamma_1)(1 + \gamma b^{-1})^{-1} < 0$ и входящая в R_4 . Обозначим далее через X_1 минимальное значение абсциссы этой сепаратрисы. Точка сепаратрисы, в которой она достигает значения X_1 , расположена на прямой $Y + \alpha X - 1 = 0$.

Вид линии переключения OY при выполнении условий (2.3), (3.6) следующий:

1) если $X_1 < 1$, то качественный характер линии переключения изображен на фиг. 6 для параметров $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,7$, $b = 1/2$;

2) если $X_1 = 1$, то линия переключения есть кривая R_5APRSB (фиг. 7), полученная при $\alpha = 0,03$, $\gamma = 0,2619$, $b = 1/16$, где R_5APR — сепаратриса системы (3.1) с $U = \gamma$, выходящая из точки R_5 и входящая в точку R_4 . Участок RSB получен численно при помощи алгоритма, описанного в разд. 2;

3) если $X_1 > 1$, то линия переключения $APRSB$ приведена на фиг. 8 при $\alpha = 0,03$, $\gamma = 0,02$, $b = 1/16$, где PR и RSB получены численно.

Рассмотрим аналогично изложенному в разд. 2 ситуацию, при которой параметры системы (3.1) удовлетворяют условию (2.13).

Система (3.1) при $U = \gamma$ не имеет внутри первого квадранта особых точек, если справедливо неравенство (3.5) и имеет устойчивый узел, если выполнено (3.6). Из фазового портрета системы (3.1) при $U = 0$ и $U = \gamma$ следует (фиг. 3), что область управляемости D заключена между сепаратрисой $R_3R \notin D$ системы (3.1) при $U = 0$ и траекторией $APR \in D$ системы (3.4), где $R_3 = (\alpha^{-1}, 0)$. OY равно нулю внутри D и равно γ на APR .

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмановский В. Б., Спивак А. К. Об управлении по быстродействию системой хищник — жертва // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 502—506.
2. Заславский Б. Г., Полуэктов Р. А. Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988. 296 с.
3. Murray J. D. Mathematical biology. N.-Y.: Springer, 1989. 542 с.
4. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1959. 2. № 1. С. 25—32.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.