Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 531.36 : 62—50

А. Г. Иванов

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ЗАДАЧЕ

Приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности в классе обобщенных управлений (мер) для почти-периодической п.-п. ляпуновской задачи. Приводятся также утверждения, связанные с корректностью расширения и строится игольчатая вариация п.-п. управления. Отметим, что процедуры расширения для задач оптимального управления рассматривались, например, в [1—3], а в области теории игр в [4, 5].

1. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $|x|$ — норма элемента $x \in R^n$, U — компактное подмножество в R^n. $S_l(R, X)$ ($l > 0$, $X \subseteq R^n$) — совокупность п.-п. по Степанову функций (в дальнейшем говорим просто «п.-п. функция»). Напомним ([6]), что локально интегрируемая функция f: $R \to X$ принадлежит $S_l(R, X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_l(f, \varepsilon) \doteq \left\{\tau \in R : \sup_{t \in R} \frac{1}{l} \int_t^{t+l} |f(s+\tau) - f(s)|\, ds < \varepsilon\right\}$$

($E(f, \varepsilon) \doteq E_1(f, \varepsilon)$) ее ε-п.-п. относительно плотно. Поскольку для каждого $l > 0$

$$S(R, X) \doteq S_1(R, X) \subset S_l(R, X), \quad S_l(R, X) \subset S(R, X)$$

то можно ограничиться рассмотрением лишь $S(R, X)$. Далее, каждой функции $f \in S(R, X)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье, который удобно представить в комплексной форме:

$$f(t) \sim \sum_{\lambda} F(\lambda) e^{i\lambda t}, \qquad F(\lambda) \doteq M\{f(t) e^{-i\lambda t}\} \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t}\, dt$$

причем множество $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in R: |F(\lambda)| > 0\}$ показателей Фурье (или спектр) функции f не более чем счетно.

Множество $F \subset S(R, X)$ равностепенно п.-п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap_{f \in F} E(f, \varepsilon)$ относительно плотно.

В дальнейшем Mod (Δ) — модуль множества $\Delta \subseteq R$, т. е. наименьшая группа по сложению, содержащая Δ и, если $f \in S(R, X)$, то Mod $(f) \doteq$ Mod $(\Lambda(f))$ — модуль функции f.

Пусть заданы функции $f_k \in S(R, R)$, $g_k \in C(U, R)$ $(k = 0, \ldots, m', \ldots, m)$, множество $\Delta \subseteq R$ и подмножество $I(U) \subset S(R, X)$ (называемое множеством (обычных) управлений) таких функций $u(\cdot)$, что Mod $(u) \subseteq$ Mod (Δ). Экстремальную задачу

$$J_0(u(\cdot)) \to \inf, \; u(\cdot) \in I(U) \tag{1.1}$$

$$J_k(u(\cdot)) \leqslant 0, \; k = 1, 2, \ldots, m', \; J_k(u(\cdot)) = 0, \; k = m' + 1,$$

$$m' + 2, \ldots, m \qquad (J_k(u(\cdot)) \doteq M\{f_k(t)\, g_k(u(t))\}) \tag{1.2}$$

назовем п.-п. ляпуновской задачей (ср. с ляпуновской задачей в [7]), а множество D_1 управлений $u(\cdot) \in I(U)$, удовлетворяющих условиям

(1.2) — множеством (обычных) допустимых управлений этой задачи.

Замечание 1.1. Полученные в работе результаты могут быть распространены на более широкий класс задач с функционалами $J_k(u(\cdot)) \doteq M\{\varphi_k(t, u(t))\}$, где $\varphi_k(t, u)$ — п.-п. функция по t равномерно относительно $u \in U$.

Для постановки и исследования овыпукленной задачи для задачи (1.1), (1.2) понадобится ряд утверждений, которым посвящен следующий раздел.

2. Обозначим через $\mathrm{frm}(U)$ линейное пространство мер Радона на R^n, носитель которых содержится в U и $\mathrm{rpm}(U)$ — подмножество $\mathrm{frm}(U)$, состоящее из вероятностных мер Радона; $N \doteq N(R, \mathrm{frm}(U))$ — совокупность измеримых (по Лебегу) отображений μ: $R \to \mathrm{frm}(U)$, таких, что $\|\mu\| \doteq \mathrm{esssup}_{t \in R} |\mu(t)|(U) < \infty$ ($|\mu(t)|(U)$ — вариация меры $\mu(t)$), N_1 — подмножество N, состоящее из измеримых отображений μ: $R \to \mathrm{rpm}(U)$. Пусть далее $B \doteq B(R \times U, R^n)$ — линейное нормированное пространство таких функций φ: $R \times U \to R^n$, что отображение $t \to \varphi(t, u), u \in U$ измеримо, $\varphi(t, \cdot) \in C(U) \doteq C(U, R^n)$ при п. в. $t \in R$ и существует такая функция $\psi_\varphi \in L_1(R, R)$, что $\max_{u \in U} |\varphi(t, u)| \leqslant \psi_\varphi(t)$ для п. в. $t \in R$. Незначительно изменив доказательство теоремы Данфорда—Петтиса ([2], с. 299) можно показать, что $N \cong B_1^*$, где $B_1 \doteq B(R \times U, R)$ и отображение $\|\cdot\|_w$: $N \to R$, определенное для $\mu \in N$ равенством

$$\|\mu\|_w \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 + \|\varphi_j\|_B} \left| \int_R \langle \mu(t), \varphi_j(t, u) \rangle \, dt \right|$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное множество функций в B

$$\|\varphi_j\|_B \doteq \int_R \max_{u \in U} |\varphi(t, u)| \, dt, \quad \langle \mu(t), \varphi_j(t, u) \rangle \doteq \int_U \varphi_j(t, u) \mu(t)(du)$$

определяет слабую норму в N. Пространство $(N, \|\cdot\|_w)$ сепарабельно, множество $N_1 \subset (N, \|\cdot\|_w)$ есть выпуклый компакт и если $\mu_j, \mu \in N_1$, то $\lim_{j \to \infty} \|\mu_j - \mu\|_w = 0$ (пишем $\mu_j \to \mu$ при $j \to \infty$) в том и только в том случае, если

$$\lim_{j \to \infty} \int_R \langle \mu(t) - \mu_j(t), \varphi(t, u) \rangle \, dt = 0$$

для всякой функции $\varphi \in B$.

Определение 2.1. Отображение $\mu \in N$ называется п.-п., если для любой функции $g \in C(U)$ отображение $t \to \langle \mu, (t), g(u) \rangle$ принадлежит $S(R, R^n)$.

Совокупность всех п.-п. отображений $\mu \in N$ ($\mu \in N_1$) обозначим АРМ (АРМ$_1$) (структура пространства АРМ подробно исследовалась [1], и поэтому здесь ограничимся лишь конспективным изложением сведений, необходимых для дальнейшего). Отождествляя каждую функцию $u(\cdot) \in S(R, U)$ с $\delta_{u(\cdot)} \in$ АРМ$_1$ ($\delta_{u(t)}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $u(t) \in U$) тем самым вкладываем (с точностью до алгебраического изоморфизма) $S(R, U)$ в АРМ$_1$, а значит и в АРМ.

Определим ряд Фурье для элементов из АРМ. Если $\mu \in$ АРМ, то, согласно определению, отображение $t \to \langle \mu(t), g(u) \rangle$ принадлежит $S(R, R^n)$ для любой функции $g \in C(U)$. Пусть

$$\langle \mu(t), g(u) \rangle \sim \sum_\lambda A_\mu[g, \lambda] e^{i\lambda t}, \quad A_\mu[g, \lambda] \doteq M\{\langle \mu(t), g(u) \rangle e^{-i\lambda t}\}$$

[1] *Иванов А. Г.* Мерозначные почти-периодические функции: Препринт ФТИ Урал. отд-ние АН СССР. Свердловск, 1990. 53 с.

и $\Lambda(\mu, g)$ — спектр п.-п. отображения $t \to \langle \mu(t), g(u) \rangle$. Используя теорему Рисса о представлении, линейность отображения $g \to A_\mu[g, \lambda]$ и условие $\|\mu\| < \infty$, можно показать, что для каждого $\lambda \in R$ найдется такая мера $\nu_\lambda \in \mathrm{frm}(U)$, что $\langle \nu_\lambda, g(u) \rangle = A_\mu[g, \lambda]$ для всех $g \in C(U)$.

Пусть $\Lambda(\mu) \doteq \{\lambda \in R: \ |\nu_\lambda|(U) > 0\}$ и $\{c_1, c_2, \ldots\} \doteq C_\infty(U)$ — счетное всюду плотное в $C(U)$ множество непрерывных функций.

Теорема 2.1. Если $\mu \in \mathrm{APM}$, то

$$\Lambda(\mu) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda(\mu, c_j)$$

и следовательно, множество $\Lambda(\mu)$ не более чем счетно.

Таким образом, корректно следующее определение.

Определение 2.2. Если $\mu \in \mathrm{APM}$, то не более чем счетное множество действительных чисел $\Lambda(\mu)$ называется показателями Фурье отображения μ; меры $\nu_\lambda \in \mathrm{frm}(U)$ ($\nu_\lambda = 0$, если $\lambda \notin \Lambda(\mu)$), такие, что $\langle \nu_\lambda, g(u) \rangle = A_\mu[g, \lambda]$ для всех $g \in C(U)$ — коэффициентами Фурье отображения μ. Наконец мерозначный ряд $\sum\limits_{\lambda} \nu_\lambda e^{i\lambda t}$ называется рядом Фурье отображения μ, а множество $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$ — его модулем.

Теорема 2.2. Для всякого $\mu \in \mathrm{APM}_1$ найдется такая последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(R, U)$, что $\mathrm{Mod}(u_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$, $j = 1, 2, \ldots$; $\delta_{u_j(t)} \to \mu(t)$ при $j \to \infty$. Более того,

$$\lim_{t \to \infty} M\{f(t)\, g(u_j(t))\} = M\{f(t) \langle \mu(t), g(u) \rangle\}$$

для всякой функции $f \in S(R, R)$ и $g \in C(U)$.

3. В дальнейшем P — подмножество APM_1 таких отображений μ, что $\mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)$, и называется множеством (обобщенных) управлений.

Определение 3.1. Экстремальная задача

$$J_0(\mu(\cdot)) \to \inf, \ \mu(\cdot) \in P \tag{3.1}$$

$$J_k(\mu(\cdot)) \leqslant 0, k = 1, 2, \ldots, m', J_k(\mu(\cdot)) = 0, k = m' + 1, m' + 2, \ldots, m \tag{3.2}$$

$$(J_k(\mu(\cdot)) \doteq M\{f_k(t) \langle \mu(t), g_k(u) \rangle\}, \ k = 0, 1, \ldots, m)$$

называется овыпукленной п.-п. ляпуновской задачей для задачи (1.1), (1.2), а множество $D_2 \subset P$ обобщенных управлений, удовлетворяющих условиям (3.2),— множеством (обобщенных) допустимых управлений.

Используя теорему 2.2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. Для всякого решения μ задачи (3.1), (3.2) найдется такая последовательность допустимых управлений $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset D_1$ задачи (1.1), (1.2), что $J_0(u_j(\cdot)) \to J_0(\mu(\cdot))$ при $j \to \infty$. Функцию

$$L: \mathrm{rpm}(U) \times R^{m*} \times R \to R, \quad L(\nu, \lambda, \lambda_0) \doteq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k J_k(\nu)$$

назовем функцией Лагранжа задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.2. Для того чтобы $\mu \in D_2$ было решением задачи (3.1), (3.2), необходимо, чтобы нашлись число $\lambda_0 \geqslant 0$ и вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^{m*}$, не равные нулю одновременно и такие, что

1) при п. в. $t \in R$ выполнен принцип минимума

$$\min_{\nu \in \mathrm{rpm}(U)} \left\langle \nu, \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(t) g_k(u) \right\rangle = \left\langle \mu(t), \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(t) g_k(u) \right\rangle$$

2) $\lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_k J_k(\mu(\cdot)) = 0$, $k = 1, \ldots, m'$.

Если для $\mu \in D_2$ нашлось число $\lambda_0 > 0$ и вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \in R^{m*}$, такие, что выполнены условия 1), 2), то μ — решение задачи (3.1), (3.2).

Доказательство теоремы 3.2 приведем в конце работы, так как оно опирается на понятие игольчатой вариации п.-п. обобщенного управления и на элементарную п.-п. ляпуновскую задачу.

4. Скажем, что последовательность функций $\{f_m\}_{m\in Z}$ из $L_1([0, a], X)$ $(a > 0)$ п.-п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\left\{l \in Z : \sup_{m\in Z} \int_0^a |f_{m+l}(t) - f_m(t)|\, dt < \varepsilon\right\}$$

ее ε-п.-п. относительно плотно.

Лемма 4.1. Функция $f \in S(R, X)$ в том и только в том случае, если последовательность функций $\{f_m\}_{m\in Z}$ из $L_1([0, a], X)$, где $f_m(t) \doteq f(t + + ma)$ при $t \in [0, a]$ п.-п.

Определение 4.1. Пусть $N_1[0, a]$ — совокупность измеримых отображений μ: $[0, a] \to \mathrm{rpm}(U)$. Последовательность $\{\mu_m\}_{m\in Z}$ из $N_1[0, a]$ называется п.-п., если для любой функции $g \in C(U)$ последовательность $\{\langle\mu_m(\cdot), g(u)\rangle\}_{m\in Z} \subset L_1([0, a], R^n)$ п.-п.

Из леммы 4.1 получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. Отображение $\mu \in$ APM в том и только в том случае, если последовательность $\{\mu_m\}_{m\in Z}$, где $\mu_m(t) \doteq \mu(t + ma)$ при $t \in [0, a]$, из $N_1[0, a]$ п.-п.

Пусть $\mu \in \mathrm{APM}_1$, отображение $\nu \in N_1$ a-периодично. При $t \in [0, a]$ и $m \in Z$ рассмотрим меру

$$\mu_m(t, \alpha) \doteq \begin{cases} \mu_m(t) \doteq \mu(t + ma), & t \in [0, a] \setminus [\vartheta, \vartheta + \alpha) \\ \nu(t), & t \in [\vartheta, \vartheta + \alpha) \end{cases}$$

где $\vartheta \in (0, a)$ и $\alpha > 0$ таково, что $[\vartheta, \vartheta + \alpha) \subset [0, a]$. По лемме 4.2 последовательность $\{\mu_m\}_{m\in Z} \subset N_1[0, a]$ п.-п. Учитывая это, показываем, что последовательность $\{\mu_m(\cdot, \alpha)\}_{m\in Z} \subset N_1[0, a]$ также п.-п. Теперь рассмотрим отображение $\mu(\cdot, \alpha) \in N_1$, сужение которого на $[ma, (m + 1)a]$ совпадает с $\mu_m(t, \alpha)$. В силу леммы 4.2 $\mu(\cdot, \alpha) \in \mathrm{APM}_1$. Ясно, что

$$\mu(t, \alpha) = \begin{cases} \mu(t), & t \in \bigcup\limits_{m\in Z} [ma, (m + 1)a] \setminus T_{m,\alpha,\vartheta} \\ \nu(t), & t \in \bigcup\limits_{m\in Z} T_{m,\alpha,\vartheta} \doteq \bigcup\limits_{m\in Z} [ma + \vartheta, ma + \vartheta + \alpha] \end{cases} \tag{4.1}$$

Отображение $\mu(\cdot, \alpha) \in \mathrm{APM}_1$, определенное равенством (4.1), называется игольчатой вариацией для $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Отметим, что множество $\{\mu(\cdot, \alpha)\}_{0<\alpha\leqslant a-\vartheta} \subset \mathrm{APM}_1$ равностепенно п.-п. (т. е. для всякой функции $g \in C_\infty(U)$ множество $\{\langle\mu(\cdot, \alpha), g(u)\rangle\}_{0<\alpha\leqslant a-\vartheta} \subset S(R, R^n)$ равностепенно п.-п.).

Теорема 4.1. Если $\mu \in \mathrm{APM}_1$, то его игольчатая вариация $\mu(\cdot, \alpha) \in \in \mathrm{APM}_1$ и, если $2\pi/a \in \Lambda(\mu)$, то

$$\mathrm{Mod}(\mu(\cdot, \alpha)) \subset \mathrm{Mod}(\mu) \tag{4.2}$$

Доказательство. Включение $\mu(\cdot, \alpha) \in \mathrm{APM}_1$ доказано выше. Вычислим $\Lambda(\mu(\cdot, \alpha))$. Пусть

$$\mu(t, \alpha) \sim \sum_\lambda \nu_\lambda(\alpha)\, e^{i\lambda t}, \quad \nu_\lambda(\alpha) \in \mathrm{frm}(U)$$

($\nu_\lambda(\alpha) = 0$, если $\lambda \notin \Lambda(\mu(\cdot, \alpha))$, $\langle \nu_\lambda(\alpha), g(u)\rangle = M\{\langle \mu(t, \alpha), g(u)\rangle e^{-i\lambda t}\}$ для всех $g \in C(U)$. Тогда из (4.1) получаем

$$\langle \nu_\lambda(\alpha), g(u)\rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{k-1} \int_{T_{m,\alpha,\vartheta}} \langle \nu(t), g(u)\rangle e^{-i\lambda t} dt + I$$

$$I \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\int_{ma}^{ma+\vartheta} \langle \mu(t), g(u)\rangle e^{-i\lambda t} dt + \int_{ma+\vartheta+\alpha}^{(m+1)a} \langle \mu(t), g(u)\rangle e^{-i\lambda t} dt \right)$$

Рассмотрим a-периодическое отображение $\mu^{(1)} \in N$ и отображение $\mu^{(2)} \in$ АРМ, которые на $[ma, (m+1)a]$ определены соотношениями

$$\mu^{(1)}(t) \doteq \chi_{T_{m,\alpha,\vartheta}}(t)\nu(t) + (1 - \chi_{T_{m,\alpha,\vartheta}}(t))\eta$$

$$\mu^{(2)}(t) \doteq -\chi_{T_{m,\alpha,\vartheta}}(t)\mu(t) + (1 - \chi_{T_{m,\alpha,\vartheta}}(t))\eta$$

($\chi_{T_{m,\alpha,\vartheta}}(\cdot)$) — характеристическая функция для $T_{m,\alpha,\vartheta}$) соответственно. Если теперь

$$\mu(t) \sim \sum_\lambda \nu_\lambda e^{i\lambda t}, \quad \mu^{(2)}(t) \sim \sum_\lambda \nu_\lambda^{(2)} e^{i\lambda t}$$

то $I = \langle \nu_\lambda + \nu_\lambda^{(2)}, g(u)\rangle$. Поэтому для любой функции $g \in C(U)$ имеем

$$\langle \nu_\lambda(\alpha), g(u)\rangle = \langle \nu_\lambda + \nu_\lambda^{(2)}, g(u)\rangle + M\{\langle \mu^{(1)}(t), g(u)\rangle e^{-i\lambda t}\}$$

Отсюда, учитывая, что $\Lambda(\mu^{(1)}, g) = (2\pi/a)Z$ и теорему 2.1, получаем, что

$$\Lambda(\mu(\cdot, \alpha)) \doteq \Lambda(\mu) \cap \Lambda(\mu^{(2)}) \cap (2\pi/a)Z$$

а так как $2\pi/a \in Z$, то

$$\mathrm{Mod}(\mu(\cdot, \alpha)) \subset \mathrm{Mod}(\mu) \cup \mathrm{Mod}(\mu^{(2)})$$

Далее, из определения $\mu^{(2)}$ следует, что при каждой функции $g \in C(U)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$E(\langle \mu(\cdot), g(u)\rangle, \delta) \subset E(\langle \mu^{(2)}(\cdot), g(u)\rangle, \varepsilon)$$

Следовательно, по теореме Фавара ([6], с. 126]

$$\mathrm{Mod}(\langle \mu^{(2)}(\cdot), g(u)\rangle) \subseteq \mathrm{Mod}(\langle \mu(\cdot), g(u)\rangle)$$

для любой функции $g \in C(U)$, что в свою очередь влечет включение $\mathrm{Mod}(\mu^2) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$. Таким образом, включение (4.2) доказано.

Определение 4.2. Экстремальная задача

$$I_0(\mu(\cdot)) \doteq M\left\{\left\langle \mu(t), \sum_{k=0}^{m} f_k(t) g_k(u)\right\rangle\right\} \to \inf, \mu(\cdot) \in P \tag{4.3}$$

называется элементарной п.-п. ляпуновской задачей.

Теорема 4.2. Обобщенное управление $\mu(\cdot) \in P$ — решение задачи (4.2) в том и только в том случае, если при п. в. $t \in R$ выполняется равенство

$$\min_{\nu \in \mathrm{rpm}(U)} \left\langle \nu, \sum_{k=0}^{m} f_k(t) g_k(u)\right\rangle = \left\langle \mu(t), \sum_{k=0}^{m} f_k(t) g_k(u)\right\rangle \tag{4.4}$$

Доказательство. Достаточность условий очевидна. При доказательстве необходимости можно без ограничения общности считать, что в (4.3) все функции f_k: $R \to R$ п.-п. по Бору. Это следует из того, что если $f_k \in S(R, R)$ и

$$f_k^{(h)}(t) \doteq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f_k(s) ds, \quad h > 0, t \in R$$

то ([6], с. 207) при каждом $l > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\sup_{t\in R}\frac{1}{l}\int\limits_t^{t+l}|f_k(s)-f_k^{(h)}(s)|\,ds\right)=0$$

Рассмотрим задачу

$$I(\mu(\cdot)) \doteq M\{\langle\mu(t),\ \varphi(t,\ u)\rangle\}\to\sup,\ \mu(\cdot)\in P \tag{4.5}$$

$$\varphi(t,u)\doteq\sum_{k=0}^{m}(\|f_k\|_{C(R,R)}\|g_k\|_{C(U,R)}-f_k'(t)\,g_k(u))$$

Ясно, что $\mu(\cdot)\in P$ — решение задачи (4.3) в том и только в том случае, когда оно является решением задачи (4.5) и условие (4.4) эквивалентно следующему:

$$\max_{\nu\in \mathrm{rpm}\,(U)}\langle\nu,\ \varphi(t,\ u)\rangle=\langle\mu(t),\ \varphi(t,\ u)\rangle \tag{4.6}$$

Таким образом, надо показать, что если $\mu(\cdot)\in P$ — решение задачи (4.5), то при п. в. $t\in R$ выполнено условие (4.6). Выберем $a>0$ таким, чтобы $2\pi/a\in\Lambda(\mu)$. Допустим, что условие (4.6) не верно. Тогда найдутся $\alpha>0$, $\vartheta\in R$ (считаем для определенности, что $[\vartheta,\ \vartheta+\alpha)\in[0,\ a]$) и измеримая функция u_0: $[\vartheta,\ \vartheta+\alpha)\to U$ такие, что $\varphi(t,\ u_0(t))-\langle\mu(t),\ \varphi(t,\ u)\rangle>0$ для всех $t\in[\vartheta,\ \vartheta+\alpha)$ (здесь воспользовались тем, что при $(t,\ u)\in R\times U$ $\varphi(t,\ u)\geqslant 0$, все рассматриваемые меры принадлежат $\mathrm{rpm}\,(U)$ при всех t и теоремой Филиппова ([2], с. 179)). Функцию u_0: $[\vartheta,\ \vartheta+\alpha)\to U$ сначала продолжим нулем на $[0,\ a]\setminus[\vartheta,\ \vartheta+\alpha)$, а затем a-периодически на R. Полученную функцию обозначим v_0. При каждом $m\in Z$ и $t\in T_{m,\alpha,\vartheta}$ решение задачи

$$\langle\nu,\ \varphi(t,\ u)\rangle\to\sup,\ \nu\in\mathrm{rpm}\,(U)$$

существует. Поэтому для всякого $m\in Z$ найдется такая измеримая функция u_m: $T_{m,\alpha,\vartheta}\to U$, что $\langle\mu(t),\ \varphi(t,\ u)\rangle\leqslant\varphi(t,\ u_m(t))$ при $t\in T_{m,\alpha,\vartheta}$. Снова функцию u_m: $T_{m,\alpha,\vartheta}\to U$ продолжим нулем на $[ma,\ (m+1)\,a]\setminus T_{m,\alpha,\vartheta}$, а затем a-периодически на R. Полученную функцию обозначим v_m. Теперь рассмотрим a-периодическую функцию $u(t)\doteq\sup_m v_m(t)$ и при $\nu(t)\doteq\delta_{u(t)}$ рассмотрим игольчатую вариацию $\mu(\cdot,\ \alpha)$ для $\mu(\cdot)$, определенную формулой (4.1). По теореме 4.1 и включению (4.2) $\mu(\cdot,\ \alpha)\in P$. Поэтому $I(\mu(\cdot,\ \alpha))\leqslant I(\mu(\cdot))$. С другой стороны, $\langle\mu(t,\ \alpha)-\mu(t),\ \varphi(t,\ u)\rangle\geqslant 0$ при $t\in R$, и следовательно, п.-п. по Бору функция

$$t\to F(t)\doteq\int\limits_t^{t+\alpha}\langle\mu(s,\alpha)-\mu(s),\ \varphi(s,u)\rangle\,ds,\quad t\in R$$

неотрицательна. А так как $F(\vartheta)\doteq\gamma>0$, то по свойству п.-п. по Бору функций ([6], с. 46) найдется $q>0$ $(qa>\alpha)$, такое, что каждый отрезок $[mqa,\ (m+1)\,qa]$ будет содержать точку t_m, в которой $F(t_m)>\gamma/3$. Поэтому

$$I(\mu(\cdot,\alpha))-I(\mu(\cdot))=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kqa}\sum_{m=0}^{k-1}\int\limits_{mqa}^{(m+1)qa}\langle\mu(s,\alpha)-\mu(s),\ \varphi(s,u)\rangle\,ds\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kqa}\sum_{m=0}^{k-1}F(t_m)>\gamma/3qa$$

т. е. $I(\mu(\cdot,\ \alpha))>I(\mu(\cdot))$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.2.

Замечание 4.1. Из теоремы 2.2 аналогично утверждению теоремы 3.1 получаем, что, если $\mu(\cdot) \in P$ — решение задачи (4.3), то найдется такая последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset I(U)$, что $\delta_{u_j(t)} \to \mu(t)$ при $j \to \infty$.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $\mu(\cdot) \in D_2$ — решение задачи (3.1), (3.2). Без ограничения общности можно считать, что $J_0(\mu(\cdot)) = 0$. Рассмотрим множество

$$G \doteq \{\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m): \text{ существует } \nu(\cdot) \in P \text{ такое, что } J_0(\nu(\cdot)) < \alpha_0,\ J_k(\nu(\cdot)) \leqslant \alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, m',\ J_k(\nu(\cdot)) = \alpha_k,\ k = m' + 1, m' + 2, \ldots, m\}$$

Учитывая линейность отображений $\mu(\cdot) \to J_k(\mu(\cdot))$, $k = 0, 1, \ldots, m$, получаем, что G — выпуклое множество в $R^{(1+m)*}$. Кроме того, G не содержит нуль (в противном случае $J_0(\mu_0(\cdot)) < 0$, $J_k(\mu_0(\cdot)) \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m'$, $J_k(\mu_0(\cdot)) = 0$, $k = m' + 1, m' + 2, \ldots, m$ при некотором $\mu_0(\cdot) \in P$). Применяя конечно-мерную теорему об отделимости ([7], с. 53), находим такие λ_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_0\alpha_0 + \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \geqslant 0 \text{ для всех } \alpha \in G$$

Поскольку $\alpha = (1, 0, \ldots, 0) \in G$, то $\lambda_0 \geqslant 0$. Далее, следуя схеме доказательства стандартной ляпуновской задачи ([9], с. 355]), доказываем условие 2) теоремы 3.2 и принцип минимума для функции Лагранжа задачи (3.1), (3.2), из которого, используя теорему 4.2, получаем принцип минимума для задачи (3.1), (3.2).

Достаточность условий теоремы 3.2 проверяется непосредственно.

Замечание 4.2. В работе вопрос существования решений не рассматривается, так как он связан с процедурой компактификации пространства АРМ_1, требующей специального освещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 230 с.
2. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
3. *Серов В. П., Ченцов А. Г.* Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 607—618.
4. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
5. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
7. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.

Ижевск

Поступила в редакцию 24.X.1990