УДК 531.36

В. Н. Тхай

О ПОВЕДЕНИИ ОБРАТИМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Показано, что на границе области устойчивости обратимой механической системы возникает критический случай двух нулевых корней с одной группой решений при прочих чисто мнимых и система в этом случае, как правило, неустойчива.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия механической системы под действием позиционных сил и сил, квадратичных по скоростям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(\mathbf{q}) + \sum_{i,j} f_{sij}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \tag{1.1}$$

$$2T = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

где T — кинетическая энергия, а Q_s, a_{ij}, f_{sij} — голоморфные функции от $\mathbf{q}$. Выше и всюду далее, если не оговорено противное, j, $s = 1, 2, \ldots, n$ и суммирование по индексам i, j, k, l ведется от 1 до n. Предполагая, что положению равновесия отвечают нулевые значения координат $q_s^0 = 0$ и $Q_s(0) = 0$, разрешим систему (1.1) относительно старших производных

$$q_s^{\cdot\cdot} = \sum_j b_{sj} q_j + F_s(\mathbf{q}) + \sum_{j,k} c_{sjk}(q)\, q_j^{\cdot} q_k^{\cdot} \tag{1.2}$$

Здесь F_s, c_{sjk} — голоморфные функции $q_1, \ldots, q_n$, а разложения функций $F_s(\mathbf{q})$ начинаются членами второго порядка относительно $\mathbf{q}$; b_{sj} — постоянные.

Характеристическое уравнение

$$\Delta(\varkappa^2) = \det \| b_{sj} - \delta_{sj}\varkappa^2 \| = 0 \tag{1.3}$$

имеет лишь четные степени $\varkappa$. Следовательно, если среди корней (1.3) $\varkappa^2 = \lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ имеется хотя бы один положительный, то положение равновесия неустойчиво по первому приближению [1]. Поэтому в пространстве параметров системы условия $\lambda_s^2 < 0$ задают область устойчивости (в первом приближении). Исследование системы при отрицательных значениях всех λ_s^2 проведено в [2]. На границе области устойчивости хотя бы одно из чисел λ_s^2 обращается в нуль.

Предположим, что $\lambda_1^2 = 0$, $\lambda_j^2 < 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ и приведем систему линейного приближения к каноническому виду. В новых координатах

$$x = 2i \sum_j p_{1j} q_j, \quad y = 2\sum_j p_{1j} q_j^{\cdot}, \quad z_s = \sum_j p_{sj}(q_j^{\cdot} + \lambda_s q_j),$$
$$\bar z_s = \sum_j p_{sj}(-q_j^{\cdot} + \lambda_s q_j) \quad (s = 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

($\bar z_s$ — величина комплексно-сопряженная z_s) линейная система приобретает вид

$$x^{\cdot} = iy, \; y^{\cdot} = 0, \; z_s^{\cdot} = \lambda_s z_s, \; \bar z_s^{\cdot} = -\lambda_s \bar z_s \; (s = 2, \ldots, n)$$

если чисто мнимые постоянные p_{sj} вычислить из следующих систем линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&(b_{11}-\lambda_s^2)\,p_{s1}+b_{21}p_{s2}+\ldots+b_{n1}p_{sn}=0\\
&b_{12}p_{s1}+(b_{22}-\lambda_s^2)\,p_{s2}+\ldots+b_{n2}p_{sn}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{1n}p_{s1}+b_{2n}p_{s2}+\ldots+(b_{nn}-\lambda_s^2)\,p_{sn}=0
\end{aligned}\tag{1.5}$$

Так как λ_s^2 — корни характеристического уравнения (1.3), то определители систем (1.5) равны нулю и (1.5) допускает нетривиальное решение. Очевидно, при отсутствии среди λ_j^2 $(j=2,\ldots,n)$, равных между собой, имеем $\det\|p_{sj}\|\neq 0$, откуда немедленно следует невырожденность преобразования (1.4); определитель матрицы этого преобразования равен $i2^{n-1}\prod\limits_{j=2}^{n}\lambda_j\{\det\|p_{sj}\|\}^2$.

Выразим q_s, $q_s^{\cdot}$ через новые переменные (1.4). Имеем

$$z_s+\bar z_s=2\lambda_s\sum_j p_{sj}q_j,\quad z_s-\bar z_s=2\sum_j p_{sj}q_j^{\cdot}\qquad (s=2,\ldots,n)$$

откуда (d_{sj} — чисто мнимые постоянные)

$$q_s=\frac{1}{2}\sum_j\frac{d_{sj}}{\varkappa_j}\xi_j,\qquad q_s^{\cdot}=\frac{1}{2}\sum_j d_{sj}\eta_j\tag{1.6}$$

$\varkappa_1=i$, $\varkappa_k=\lambda_k$, $\xi_1=x$, $\xi_k=z_k+\bar z_k$, $\eta_1=y$, $\eta_k=z_k-\bar z_k$ $(k=2,\ldots,n)$

Теперь запишем результат перехода к новым переменным

$$\begin{gathered}
x^{\cdot}=iy,\ y^{\cdot}=Y(x,\,y,\,\mathbf z,\,\bar{\mathbf z})\\
\mathbf z^{\cdot}=\Lambda\mathbf z+\mathbf Z(x,\,y,\,\mathbf z,\,\bar{\mathbf z}),\ \bar{\mathbf z}^{\cdot}=-\Lambda\bar{\mathbf z}+\bar{\mathbf Z}(x,\,y,\,\mathbf z,\,\bar{\mathbf z})\\
\mathbf z=(z_2,\ldots,z_n),\ \mathbf Z=(Z_2,\ldots,Z_n),\ \Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\\
Y=2\sum_j p_{1j}\Big[F_j(\mathbf q)+\sum_{k,l}c_{jkl}(\mathbf q)\,q_k^{\cdot}q_l^{\cdot}\Big]_{(1.6)}\\
Z_s=\sum_j p_{sj}\Big[F_j(\mathbf q)+\sum_{k,l}c_{jkl}(\mathbf q)\,q_k^{\cdot}q_l^{\cdot}\Big]_{(1.6)}
\end{gathered}\tag{1.7}$$

где чертой обозначены комплексно-сопряженные величины, а линейное приближение выписано в явном виде.

Согласно равенствам (1.7), разложения функций Y, $\mathbf Z$, $\bar{\mathbf Z}$ в ряды по степеням переменных x, y, $\mathbf z$, $\bar{\mathbf z}$ имеют лишь чисто мнимые коэффициенты. Это и неудивительно, ибо исходная система (1.1) обратима с линейным автоморфизмом M: $t\to -t$, $\mathbf q\to\mathbf q$, $\mathbf q^{\cdot}\to -\mathbf q^{\cdot}$, который при линейном преобразовании (1.4) переходит в автоморфизм:

$$t\to -t,\ x\to x,\ y\to -y,\ \mathbf z\to\bar{\mathbf z},\ \bar{\mathbf z}\to\mathbf z$$

2. Задача устойчивости. Из изложенного выше следует, что на границе области устойчивости возникает критический случай двух нулевых корней с одной группой решений и $n-1$ пар чисто мнимых корней. При $n=1$ эта задача решена Ляпуновым [3] и позднее Каменковым [4]. Ниже для удобства вместо числа $n-1$ будем использовать n и рассматривать действительную систему

$$\begin{gathered}
x^{\cdot}=y,\ y^{\cdot}=Y(x,\,y,\,\mathbf u,\,\mathbf v)\\
u_s^{\cdot}=\omega_s v_s+U_s(x,\,y,\,\mathbf u,\,\mathbf v),\ v_s^{\cdot}=-\omega_s u_s+V_s(x,\,y,\,\mathbf u,\,\mathbf v)
\end{gathered}\tag{2.1}$$

При этом в системе (1.7) вместо переменной y взята iy, $\lambda_s = i\omega_s$, а u_s и v_s — соответственно действительная и мнимая части z_s. Автоморфизм M переходит в N:

$$t \to -t, \ x \to x, \ y \to -y, \ \mathbf{u} \to \mathbf{u}, \ \mathbf{v} \to -\mathbf{v}$$

В силу наличия этого автоморфизма и формул перехода (1.4) в системе (2.1) имеем

$$U_s(x, 0, u, 0) \equiv 0, \ \partial V_s/\partial y|_* = \partial V_s/\partial v_j|_* = \partial Y/\partial y|_* = \partial Y/\partial v_j|_* \equiv 0 \quad (2.2)$$

где звездочка означает вычисление при $y = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$.

Преобразуем систему (2.1) посредством замены

$$u_s = u_s^* + f_s(x), \quad v_s = v_s^* + y\theta_s(x) \quad (2.3)$$

где неизвестные функции f_s, θ_s определим из совместных систем функциональных уравнений

$$-\omega_s f_s(x) + V_s(x, 0, \mathbf{f}(x), \mathbf{0}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\omega_s \theta_s(x) + \partial U_s/\partial y\,|_{y=0,\,\mathbf{u}=\mathbf{f}(x),\,\mathbf{v}=0} = f_s'(x) \quad (2.5)$$

(штрих означает дифференцирование по переменной x). Тогда в полученной системе наряду с условиями (2.2) выполняются следующие:

$$V_s(x, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\theta_s Y(x, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \ \theta_s(0) = 0, \ \partial U_s/\partial y\,|_* = 0 \quad (2.6)$$

Вторая замена переменных

$$y = y^* + \sum_j v_j^* \varphi_j(x) \quad (2.7)$$

с неизвестными функциями $\varphi_j(x)$, определяемыми из системы линейных уравнений

$$-\omega_s \varphi_s(x) + \sum_j \partial V_j^*/\partial u_s^*|_* \varphi_j(x) = \partial Y^*/\partial u_s^*|_*$$

(Y^* — функция Y после замены (2.3)) приводит уравнение для y к виду, в котором

$$\partial Y/\partial u_j\,|_* = 0 \quad (2.8)$$

При этом условия (2.2), (2.6) продолжают выполняться.

Наконец последнее преобразование

$$\xi_s = u_s^* + \sum_j f_{sj}(x) u_j^*, \qquad \eta_s = v_s^* + \sum_j \theta_{sj}(x) v_j^* \quad (2.9)$$

с функциями $f_{sj}(x)$, $\theta_{sj}(x)$, подлежащими определению, приводит к системе

$$\xi_s^{\cdot} = \omega_s\eta_s - \omega_s \sum_j \theta_{sj} v_j^* + \sum_j f_{sj}(\omega_j v_j^* + U_j^*) + U_s^* + \sum_j f_{sj}'(x) u_j^* y$$

$$\eta_s^{\cdot} = -\omega_s\xi_s + \omega_s \sum_j f_{sj} u_j^* + \sum_j \theta_{sj}(-\omega_j u_j^* + V_j^*) + V_s^* + \sum_j \theta_{sj}'(x) v_j^* y$$

При каждом фиксированном s функции f_{sj}, θ_{sj} $(j \neq s)$ определим из системы

$$-\omega_s\theta_{sj} + \omega_j f_{sj} + \sum_{k\neq s} \partial U_k^*/\partial v_j^*|_* f_{sk} + \partial U_s^*/\partial v_j^*|_* = 0$$

$$(2.10)$$

$$-\omega_j\theta_{sj} + \omega_s f_{sj} + \sum_{k\neq s} \partial V_k^*/\partial u_j^*|_* \theta_{sk} + \partial V_s^*/\partial u_j^*|_* = 0 \quad (s, j = 1,\ldots, n; j\neq s)$$

В силу условий (2.2), после преобразования (2.9), (2.10) система (2.1) наряду с условиями (2.2), (2.6), (2.8) удовлетворяет также условию

$$\partial U_s/\partial v_j\,|_* \equiv 0, \ \partial V_s/\partial u_j\,|_* \equiv 0 \ (s \neq j) \quad (2.11)$$

Отметим, что все преобразования сохраняют автоморфизм N.

В результате преобразований (2.3), (2.7), (2.9) получим

$$x^{\bullet} = y + \sum_j v_j \varphi_j(x),$$

$$y^{\bullet} = Y_0(x) + \sum_{j,k=1}^{2n+1} [\overset{\circ}{Y}_{jk}(x) + Y_{jk}(x, y, \mathbf{u}, \mathbf{v})] w_j w_k$$

$$u_s^{\bullet} = [\omega_s + \mu_s(x)] v_s + \sum_{j,k=1}^{2n+1} [\overset{\circ}{U}_{sjk}(x) + U_{sjk}(x, y, \mathbf{u}, \mathbf{v})] w_j, w_k \qquad (2.12)$$

$$v_s^{\bullet} = -[\omega_s + \nu_s(x)] u_s + V_{s0}(x) + \sum_{j,k=1}^{2n+1} [\overset{\circ}{V}_{sjk}(x) + V_{sjk}(x, y, \mathbf{u}, \mathbf{v})] w_j w_k$$

Здесь через w обозначены $y, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, а функции Y_{jk}, U_{sjk}, V_{sjk} обращаются в нуль при $x = y = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$. Кроме того:

$$V_{s0}(x) = -\theta_s(x) Y_0(x), \quad \theta_s(0) = 0 \qquad (2.13)$$

Рассмотрим функцию

$$V = xW, \quad W = (1 + \alpha x) y^2 - \beta \sum_s \{[1 + \nu_s(x)] u_s^2 + [1 + \mu_s(x)] v_s^2\}$$

где α, β — некоторые постоянные. Производная от этой функции в силу системы (2.12) имеет вид

$$V^{\bullet} = [y + \sum_j v_j \varphi_j(x)] W + xW^{\bullet}$$

$$W^{\bullet} = \Phi + 2\alpha x y Y_0(x) - 2\beta \sum_s [1 + \mu_s(x)] v_s V_{s0}(x) +$$

$$+ \sum_{s,j,k=1}^{2n+1} H_{sjk}(x, y, \mathbf{u}, \mathbf{v}) w_s w_j w_k, \qquad H_{sjk}(0, 0, 0, 0) = 0$$

$$\Phi = \alpha y^2 [y + \sum_j v_j \varphi_j(x)] + 2y [Y_0(x) + \sum_{j,k=1}^{2n+1} \overset{\circ}{Y}_{jk}(0) w_j w_k] -$$

$$-2\beta \sum_s \sum_{j,k=1}^{2n+1} \{[1 + \nu_s(0)] \overset{\circ}{U}_{sjk}(0) u_s + [1 + \mu_s(0)] \overset{\circ}{V}_{sjk}(0) v_s\} w_j w_k$$

Пусть в рассматриваемой окрестности $|x| \leqslant \delta$ и

$$\max_{|x| \leqslant \delta} \{|\varphi_j(x)|, \ |\mu_j(x)|, \ |\nu_j(x)|\} = \varepsilon, \quad \max \{|Y_{jk}{}^0(0)|, \ |U^0_{sjk}(0)|,$$

$$|V^0_{sjk}(0)|\} = A$$

Так как функции $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ обращаются в нуль в нуле, то при малом δ соответственно ε — малая величина. Положительные числа α и β выберем таким образом, чтобы в области $W > 0$, $y > 0$ имели место неравенства

$$y + \sum_j v_j \varphi_j(x) > y/2, \qquad W^{\bullet} > \Psi = y^3 + y Y_0(x) \qquad (2.14)$$

В этой области

$$|u_s| < \gamma y, \quad |v_s| < \gamma y \quad (s = 1, \ldots, n), \quad 0 < \gamma = \sqrt{\frac{1 + \alpha\delta}{\beta(1 - \varepsilon)}} < 1 \qquad (2.15)$$

и условия (2.14) выполнены, если

$$2n\varepsilon\gamma < 1, \quad \alpha > 4(2n + 1)^2 (1 + 2\beta) A + 4$$

В самом деле в силу (2.12), (2.15) и обращения функций Y_{jk}, U_{sjk}, V_{sjk} в нуль при $x = y = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ в области $W > 0$, $y > 0$ все слагаемые производной $W^{\bullet}$, за исключением Φ, имеют порядок $o(y^3, yY_0(x))$, а $\Phi > 2\Psi$ при достаточно малом x. Поэтому если в области $V > 0$, где $x > 0$, $y > 0$, $W > 0$, имеем $\Psi > 0$, то система неустойчива по теореме Четаева о неустойчивости [5].

Пусть

$$Y_0(x) = gx^m + \ldots \quad (g = \text{const}) \tag{2.16}$$

Очевидно, при четном m заменой x на $-x$, y на $-y$ всегда можно добиться, чтобы коэффициент g был положительным. При $g > 0$ функция $\Psi > 0$ в рассматриваемой области $V > 0$. Таким образом, система неустойчива при четном m, а при нечетном m — в случае $g > 0$. Если же $Y_0(x) \equiv 0$, то знак Ψ определяется $y^3 > 0$ и также выводится неустойчивость.

Теорема. Нулевое решение системы (2.12), (2.13), (2.16) неустойчиво по Ляпунову в каждом из следующих случаев: а) m — четное; б) m — нечетное, $g > 0$; в) $Y_0(x) \equiv 0$.

Таким образом, на границе области устойчивости система (1.1), как правило, неустойчива. Из вида построенной функции Четаева следует, что на растущем решении обязательно возрастает переменная x. Поэтому, согласно формулам перехода (1.4), на таком решении обязательно растет одна из координат q.

Выводы теоремы не зависят от числа n пар чисто мнимых корней. Определяющими в рассматриваемой ситуации являются нулевые корни, которые и приводят к неустойчивости.

3. Пример. Модель упругого стержня под действием следящей силы [6]. Рассмотрим механическую систему из двух идентичных стержней массы m и длины l, связанных между собой шарниром и спиральной пружиной жесткости c_2 и расположенных на гладкой горизонтальной плоскости. Конец первого стержня крепится шарниром и спиральной пружиной жесткости c_1 к неподвижной точке, а на свободный конец второго стержня действует следящая сила F, направленная вдоль оси этого стержня. При недеформированном состоянии пружин оба стержня образуют одну прямую — ось x.

Выберем в качестве обобщенных координат углы φ_1 и φ_2 отклонения стержней от оси x. Тогда в системе (1.1)

$$T = {}^1\!/_6 ml^2 [4\varphi_1^{\cdot 2} + 3\varphi_1^{\cdot}\varphi_2^{\cdot} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \varphi_2^{\cdot 2}], \quad f_{sij}(\mathbf{q}) \equiv 0$$

$$Q_1 = -c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Fl \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad Q_2 = c_2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

имеем механическую систему под действием потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Уравнения (1.2) позволяют выписать характеристическое (1.3)

$$\varkappa^4 + \varkappa^2\omega^2 + \frac{36}{7}\frac{c_1c_2}{ml^2} = 0, \quad \omega^2 = \frac{6}{7ml^2}(2c_1 + 16c_2 - 5Fl)$$

которое имеет две пары чисто мнимых корней при выполнении неравенства

$$2c_1 + 16c_2 - 5Fl - 2\sqrt{7c_1c_2} > 0 \quad (c_1c_2 \neq 0)$$

Этот случай исследован в [2]. Когда же $c_1c_2 = 0$, получим

$$\lambda_1^2 = 0, \ \lambda_2^2 = -\omega^2, \ \omega^2 > 0$$

и найденное преобразование (1.4) имеет вид

$$x = -2\frac{\omega^2}{b_{12}}\left[\frac{b_{21}}{b_{11}}\varphi_1 - \varphi_2\right], \quad y = 2i\frac{\omega^2}{b_{12}}\left[\frac{b_{21}}{b_{11}}\varphi_1^{\cdot} - \varphi_2^{\cdot}\right]$$

$$z = -i\frac{\omega^2}{b_{12}}\left[-\frac{b_{22}+\omega^2}{b_{12}}(\varphi_1^{\cdot} + i\omega\varphi_1) + (\varphi_2^{\cdot} + i\omega\varphi_2)\right]$$

$$b_{11} = -2b_0 - b_{12}, \quad b_{21} = 3b_0 - b_{22}$$

$$b_{12} = \frac{30c_2 - 12Fl}{7ml^2}, \quad b_{22} = \frac{-66c_2 + 18Fl}{7ml^2}, \quad b_0 = \frac{6c_1}{7ml^2}$$

Обратное преобразование (1.6) имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{z+\bar z}{\omega}\right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{22}+\omega^2}{b_{12}}x - \frac{b_{21}}{b_{11}}\frac{z+\bar z}{\omega}\right)$$

$$\varphi_1^{\cdot} = \frac{1}{2i}(-y + z - \bar z), \quad \varphi_2^{\cdot} = \frac{1}{2i}\left[-\frac{b_{22}+\omega^2}{b_{12}}y + \frac{b_{21}}{b_{11}}(z - \bar z)\right]$$

Разложим правые части уравнений возмущенного движения в ряды по степеням φ и $\varphi^{\cdot}$. Оказывается, что члены второго порядка в правых частях (1.2) отсутствуют, а члены третьего порядка таковы:

$$\Phi_1^{(3)} = \xi(\varphi_2 - \varphi_1)^3 + \frac{1}{7}(9\varphi_1^{\cdot 2} + 6\varphi_2^{\cdot 2})(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\Phi_2^{(3)} = -\xi(\varphi_2 - \varphi_1)^3 - \frac{1}{7}(24\varphi_1^{\cdot 2} + 9\varphi_2^{\cdot 2})(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \xi = \frac{12Fl - 9c_2}{7ml^2}$$

Значит, в системе (2.12) разложение функции $Y_0(x)$ начинается с членов третьего порядка. Из формул перехода к новым переменным видно, что

$$g = -\omega^2\xi\frac{b_{11} + b_{21}}{4b_{11}}\left[\frac{b_{22} + \omega^2}{b_{12}} - 1\right]^3$$

Отсюда имеем

$$b_{11} + b_{21} = \frac{6c_1 + 36c_2 - 6Fl}{7ml^2}, \quad b_{22} + \omega^2 - b_{12} = \frac{12c_1 - 96c_2}{7ml^2}$$

Пусть $c_2 = 0$. Тогда при $2c_1 - 5Fl > 0$ $(\omega^2 > 0)$ имеем $b_{11} + b_{21} > 0$, $b_{22} + \omega^2 - b_{12} > 0$, $b_{11} < 0$, $b_{12} > 0$ и положение равновесия неустойчиво.

Пусть $c_1 = 0$. Из условия $\omega^2 > 0$ имеем $16c_2 - 5Fl > 0$. Здесь $b_{11} + b_{21} > 0$, $b_{22} + \omega^2 - b_{12} < 0$, $b_{11}b_{12} < 0$ и при $Fl < {}^3/_4 c_2$ имеем $g > 0$; равновесие неустойчиво

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7—267.
2. *Тхай В. Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил. // ПММ. 1980. Т. 44. вып. 1. С. 40—48.
3. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. // Мат. сб. 1983. Т. 17. № 2. С. 253—333.
4. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем // Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
6. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1990