3. *Карапетян А. В., Рубановский В. Н.* Об устойчивости стационарных движений неконсервативных механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 43—49.
4. *Карапетян А. В., Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений волчка на горизонтальной плоскости с трением // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 11—18.
5. *Karapetyan A. V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Societ. Janos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations. Szeged, 1988. Amsterdam; New York; North Holland, 1990. P. 271—290.
6. *Самсонов В. А* Качественный анализ задачи о движении волчка по плоскости с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 29—35.

Москва

Поступила в редакцию 13.XI.1990

УДК 531.36 : 534.1

А. О. Игнатьев

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для линейного осциллятора с переменными параметрами получены условия неустойчивости положения равновесия, которые иллюстрируются на случае плоских колебаний оперенной ракеты относительно ее центра масс.

Рассмотрим линейный осциллятор

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = 0 \tag{1}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции времени t при $t \geqslant 0$. Вопрос об устойчивости его положения равновесия

$$x = 0, \ \dot{x} = 0 \tag{2}$$

изучался во многих работах (например, [1, 2]). Были получены [3, 4] достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения (2) уравнения (1). Ниже установлены достаточные условия неустойчивости положения равновесия (2) линейного осциллятора (1), отличные от отмеченных.

Обозначив $\dot{x} = y$, получим систему уравнений

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -g(t)x - f(t)y \tag{3}$$

эквивалентную уравнению (1), допускающую тривиальное решение

$$x = 0, \ y = 0 \tag{4}$$

Теорема 1. Решение (4) системы (3) неустойчиво, если существует такое $t_0 > 0$, что при $t \geqslant t_0$ выполняется одно из условий

$$D(t) = {}^1/_4 f^2(t) + g(t) \leqslant 0 \tag{5}$$

$$D(t) > 0, \ 4f(t)D(t) + {}^1/_2 \dot{f}(t)f(t) + \dot{g}(t) + (\dot{f}(t) + f^2(t) + 4D(t)) \quad \sqrt{D(t)} < 0) \tag{6}$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Покажем, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно выбрать такие x_0, y_0, удовлетворяющие неравенствам

$$|x_0| < \delta, \ |y_0| < \delta \tag{7}$$

что существует $T > 0$ такое, что траектория $x(t)$, $y(t)$ $(x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0)$ при $t = t_0 + T$ достигает границу области

$$|x| < \varepsilon, \ |y| < \varepsilon \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $V = xy$. Ее производная в силу уравнений (3) имеет вид

$$\dot{V} = y^2 - f(t)xy - g(t)x^2$$

Выберем $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, удовлетворяющими условиям (7) и $\dot{V} > 0$, и рассмотрим траекторию движения $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющую начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Не ограничивая общности, можно считать $D(t_0) < 0$. Пусть $[t_0; t_1]$, $[t_2; t_3]$, . . ., $[t_{2n}; t_{2n+1}]$, . . .— промежутки, на которых выполнено условие

(5), а $(t_1; t_2; t_3; t_4), \ldots, (t_{2n-1}; t_{2n}) \ldots$ — интервалы, на которых справедливы неравенства (6). Так как на отрезке $[t_0; t_1]$ выполняется условие $V^{\cdot} \geqslant 0$, то траектория на этом промежутке будет лежать в области $xy \geqslant x_0 y_0$. Рассмотрим теперь $x(t)$, $y(t)$ на интервале $(t_1; t_2)$. Производная $V^{\cdot}$ на нем знакопеременна, причем $V^{\cdot} = 0$ при

$$y = (1/2 f + \sqrt{D})x \tag{9}$$

и $V^{\cdot} > 0$ при

$$y > (1/2 f + \sqrt{D})x \tag{10}$$

Пусть $t_* \in [t_1; t_2]$ — такой момент времени, что $x(t_*)$, $y(t_*)$ удовлетворяют условию $y(t_*) = (1/2 f(t_*) + \sqrt{D(t_*)})x(t_*)$, т. е. точка траектории при $t = t_*$ принадлежит прямой (9).

Покажем, что $x(t)$, $y(t)$ при $t \in (t_*, t_* + \Delta t)$ удовлетворяет неравенству (10), если $\Delta t > 0$ достаточно мало. Для этого вычислим вторую производную функции V и запишем ее выражение при условии $V^{\cdot} = 0$:

$$V^{\cdot\cdot}|_{(9)} = -(4f(t)D(t) + 1/2 f^{\cdot}(t)f(t) + g^{\cdot}(t) + (f^{\cdot}(t) + f^2(t) + 4D(t))\sqrt{D(t)})x^2$$

Учитывая условие (6), получаем, что $V^{\cdot\cdot} > 0$ при $V^{\cdot} = 0$, т. е. при $t \in (t_*; t_* + \Delta t)$ траектория принадлежит области $V^{\cdot} > 0$. Этим доказано, что при $t \in [t_1; t_2]$ она расположена в области $V^{\cdot} \geqslant 0$.

Аналогично можно показать, что при $t \in [t_n; t_{n+1}]$, где $n = 3, 4, \ldots$, точка $x(t)$, $y(t)$ находится на множестве $V^{\cdot} \geqslant 0$. Это означает, что для рассматриваемой траектории при любом $t \geqslant t_0$ выполняется соотношение $V^{\cdot}(x(t), y(t)) \geqslant 0$. Из последнего неравенства следует, что при $t \geqslant t_0$ траектория будет лежать в области $xy \geqslant x_0 y_0$.

Покажем, что граница области (8) достигается за конечный промежуток времени. Рассмотрим на плоскости xy область

$$\Omega = \{x, y\colon xy \geqslant x_0 y_0,\ 0 < x < \varepsilon,\ 0 < y < \varepsilon\}$$

Оценим время, в течение которого траектория $x(t)$, $y(t)$ может оставаться в Ω. В этой области справедливо неравенство $y \geqslant x_0 y_0 \varepsilon^{-1}$, откуда в силу первого из уравнений (3) получаем $x(t) \geqslant x_0 + x_0 y_0 \varepsilon^{-1}(t - t_0)$. Из последнего соотношения следует, что промежуток времени, в течение которого траектория может располагаться в Ω, может быть оценен числом $T = \varepsilon(\varepsilon - x_0) x_0^{-1} y_0^{-1}$. Так как траектория не может покидать область Ω пересекая гиперболу $xy = x_0 y_0$, то нарушается одно из неравенств (8). Теорема доказана.

Уравнения плоских малых колебаний ракеты, центр тяжести которой движется прямолинейно с постоянной скоростью [5] имеют вид (I), где $f(t) = ae^{-\alpha t}$, $g(t) = b^2 e^{-\alpha t}$, причем a, b, α — постоянные числа и $\alpha > 0$. Величина x представляет собой в этом случае угол атаки. Было получено [5] достаточное условие устойчивости решения (2) системы (I) и показано, что для случая плоских колебаний ракеты это условие оказывается невыполненным. Применим приведенную теорему для доказательства неустойчивости положения равновесия (2). Действительно, существует $t_0 > 0$, такое, что при $t \geqslant t_0$ выполняются соотношения (6). Это и доказывает неустойчивость по Ляпунову малых колебаний ракеты.

Теорема 2. Если в уравнении (1) функции $f(t)$ и $g(t)$ являются исчезающими, т. е. выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

то положение равновесия (2) не может являться равномерно устойчивым.

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3), допускающих тривиальное решение (4). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что для любого $\delta > 0$ существуют x_0, y_0, удовлетворяющие неравенствам (7) и такое $t_0 \geqslant 0$, что траектория $x(t)$, $y(t)$, где $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, с возрастанием времени покидает область (8). Обозначим

$$\sigma(t) = 1/2\,|f(t)| + 1/2\sqrt{f^2(t) + 4\,|g(t)|}$$

Так как $f(t)$ и $g(t)$ — исчезающие, то $\sigma(t)$ также будет исчезающей функцией. Выберем $t_0 > 0$ таким образом, чтобы при $t \geqslant t_0$ выполнялось неравенство $\sigma(t) < x_0 y_0 \varepsilon^{-2}$. При этом траектория $x(t)$, $y(t)$ при $t \geqslant t_0$ будет расположена в области $V^{\cdot} > 0$. Тогда, как следует из доказательства теоремы 1, существует такой момент времени $t > t_0$, при котором траектория покидает область (8), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. *Старжинский В. М.* Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 3. С. 369—374.
3. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 203 с.
4. *Игнатьев А. О.* Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными коэффициентами // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 167—168.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

Донецк

Поступила в редакцию
10.V.1990
