

Отметим, что при достаточно малых значениях  $m$  условие устойчивости (3.2) сильнее аналогичных условий устойчивости треугольных точек либрации в классической постановке задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sulikashvili R. S. On straight-line libration points in the restricted plane problem of three bodies // Applied Mechanics Beijing: Intern. Acad. Publ. 1989. V. 1. P. 358—362.
2. Шарль К. Небесная механика. М.: Наука, 1966. 627 с.
3. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Тбилиси

Поступила в редакцию  
13.XI.1990

УДК 531.38

© 1991

А. В. Карапетян

### КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛЧКА НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

На примере исследования бифуркационного множества и областей возможности движения в задаче о качении со скольжением волчка на горизонтальной плоскости с трением обсуждается вопрос о распространении и соответствующей модификации теории Смейла [1, 2] на диссипативные системы с симметрией.

Уравнения движения тяжелого неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости с трением скольжения допускают не возрастающую вдоль всех движений шара функцию

$$H = 1/2 m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + 1/2 J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + 1/2 J_3 \omega_3^2 - m g a \gamma_3 \leq h$$

и два интеграла

$$K = J_1 (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + J_3 \omega_3 (\gamma_3 - a/r) = k$$

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Здесь  $m$  — масса волчка,  $J_1$  и  $J_3$  — соответственно экваториальный и осевой центральные моменты инерции,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$  — смещение геометрического центра шара от его центра масс вдоль оси динамической симметрии (положительное направление этой оси выбрано таким образом, что  $a > 0$ ),  $r$  — радиус шара,  $v_i$ ,  $\omega_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — проекции векторов скорости центра масс волчка  $v$ , его угловой скорости  $\omega$  и единичного вектора  $\gamma$  восходящей вертикали соответственно на главные центральные оси инерции волчка.

Пусть  $W_k(\gamma)$  — минимум функции  $H(v, \omega, \gamma)$  по переменным  $v$  и  $\omega$  на уровне  $k$  интеграла Желле  $K = k$ :

$$W_k(\gamma) = \frac{k^2}{2 [J_1 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + J_3 (\gamma_3 - \varepsilon)^2]} - m g a \gamma_3 \quad (\varepsilon = a/r < 1)$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения.

1°. Функция  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2 = \{\gamma: \gamma^2 = 1\}$  принимает стационарные значения тогда и только тогда, когда функция  $H$  при постоянных значениях интегралов  $K = k$  и  $\Gamma = 1$  принимает стационарные значения.

2°. Функция  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2$  достигает строго минимального (максимального) значения тогда и только тогда, когда функция  $H$  при постоянных значениях интегралов  $K = k$  и  $\Gamma = 1$  достигает строго минимального значения (не достигает даже не строго минимального значения).

Как известно [3, 4], критические значения функции  $H$  при фиксированных постоянных интегралов  $K = k$  и  $\Gamma = 1$  отвечают инвариантным множествам рассматриваемой системы. Более того, если сила трения обращается в нуль при нулевой скорости скольжения, то функция  $H$  сохраняет свое начальное значение только на этих множествах и убывает на всех остальных движениях волчка. Таким образом, справедливо утверждение

3°. Критические значения функции  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2$  определяют бифуркационное множество

$$\Sigma = \{(k, W_k(M), M \in S^2 : \delta W_k(M) = 0)\}$$

при прохождении которого меняется тип областей возможности движения

$$M_{h,k} = \{\gamma \in S^2, W_k(\gamma) \leq h\}$$

причем точкам минимума функции  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2$  отвечают устойчивые (асимптотически по части переменных), а точкам максимума — неустойчивые инвариантные множества рассматриваемой системы.

Заметим, что утверждения об устойчивости или неустойчивости инвариантных множеств следуют из соответствующей модификации теоремы Рауса [5].

Очевидно, множество  $M$ , на котором функция  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2$  принимает критические значения, всегда содержит две точки  $P_{\pm}$  ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \pm 1$ ) — полюса сферы Пуассона, которым отвечают вращения волчка вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии. Кроме того, это множество может содержать не более двух окружностей  $S_{\gamma}$  ( $\gamma_3 = \gamma; \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma^2$ ), где  $\gamma$  — действительный корень уравнения

$$\frac{dV_k}{d\gamma_3} = 0 \quad \left( V_k = \frac{k^2}{2[J_1(1 - \gamma_3^2) + J_3(\gamma_3 - \varepsilon)^2]} - mga \gamma_3 \right)$$

меньший по модулю единицы (таких корней может быть не более двух [3, 4]); окружности  $S_{\gamma}$  — параллели сферы Пуассона, которым отвечают регулярные прецессии волчка.

Таким образом, бифуркационное множество  $\Sigma$  в рассматриваемой задаче представляют собой объединение множеств  $\Sigma_{\pm}$  и  $\Sigma_{\gamma}$ , соответствующих критическим точкам функции  $W_k(\gamma)$  вида  $\gamma_3 = \pm 1, \gamma_3 = \gamma$ .

В пространстве  $(k; h)$  (постоянная интеграла Желле, значение полной энергии) множества  $\Sigma_{\pm}$  представляют собой параболы

$$h = \frac{k^2}{2J_3(1 \pm \varepsilon)^2} \mp mga$$

а множество  $\Sigma_{\gamma}$  — кривую, параметрическое представление которой имеет вид ( $p$  — параметр)

$$h = \frac{mga}{2(1 - \delta)p} [\delta(1 - \varepsilon^2 - \delta)p^2 - \varepsilon p + 3]$$

$$k^2 = \frac{J_3 mga}{(1 - \delta)^2 p^3} [\delta(1 - \varepsilon^2 - \delta)p^2 + 1]$$

$$(\delta = J_1/J_3 > 1/2)$$

Существование множества  $\Sigma_{\gamma}$ , его вид, а также характер экстремума функции  $W_k(\gamma)$  на множестве  $\Sigma$  зависят от параметров  $\varepsilon = a/r \in (0; 1)$  и  $\delta = J_1/J_3 > 1/2$  и постоянной  $k$  интеграла Желле. Это обстоятельство требует рассмотрения шести различных случаев:

$$\delta > 1 + \varepsilon; 0 < \varepsilon < 1 \quad (p > p_1) \quad (1)$$

$$1 + \varepsilon > \varphi_+(\varepsilon) \quad (\delta \neq 1); 0 < \varepsilon < 1 \quad (p \in (p_1; p_2)) \quad (2)$$

$$\varphi_+(\varepsilon) > \delta > \begin{cases} 1 - \varepsilon, & 1 > \varepsilon > \varepsilon_0 \\ \varphi_+(-\varepsilon), & 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \end{cases} \quad (p \in (p_2; p_1)) \quad (3)$$

$$\delta < \begin{cases} 1 - \varepsilon, & 1 > \varepsilon > \varepsilon_0 \\ \varphi_+(-\varepsilon), & 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \end{cases} \quad (p > p_2) \quad (4)$$

$$\varphi_+(-\varepsilon) > \delta > 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (p \in (p_2; p_1)) \quad (5)$$

$$1 - \varepsilon > \delta > \varphi_+(-\varepsilon), 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (p > p_2) \quad (6)$$

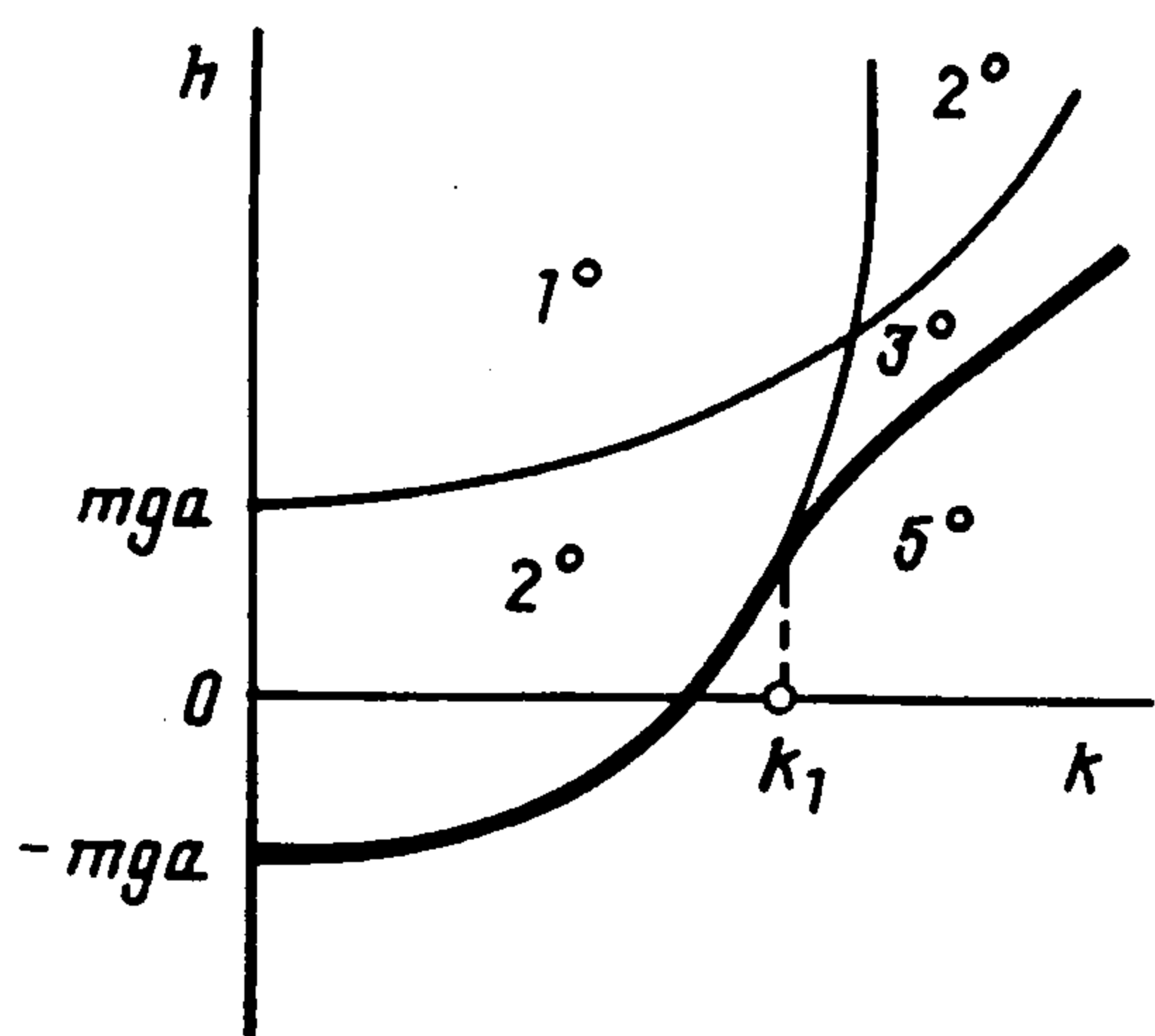
Здесь (и далее) приняты следующие обозначения

$$p_1 = \frac{1}{\delta + \varepsilon - 1}, \quad p_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon - \delta}; \quad p_0^2 = \frac{3}{\delta(1 - \varepsilon^2 - \delta)}$$

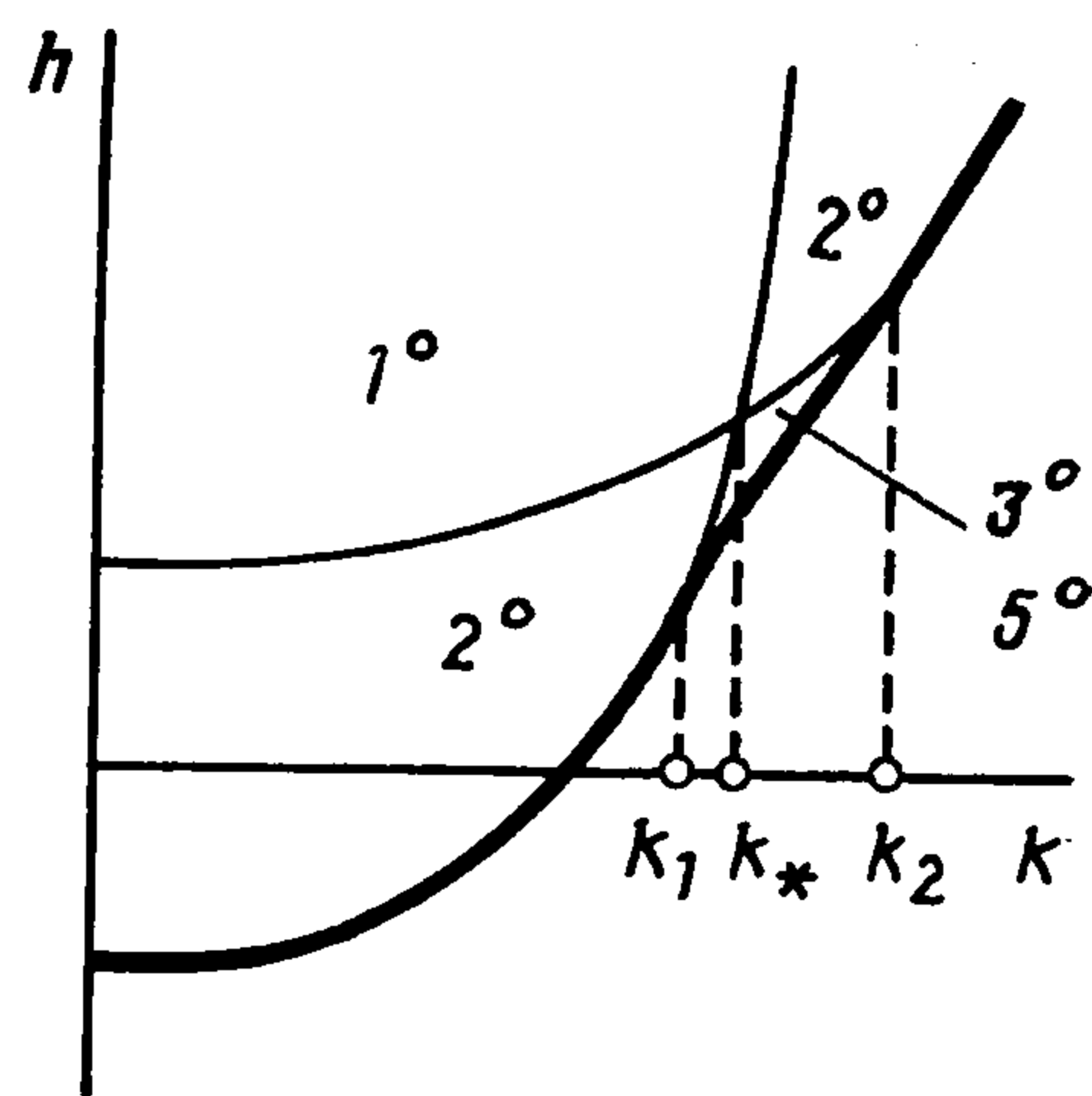
$$\varphi_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon}{8} (7 + \varepsilon \pm \sqrt{1 + 14\varepsilon + \varepsilon^2}), \quad \varepsilon_0 = 7 - \sqrt{48}$$

$$k_0 = k(p_0); k_1 = k(p_1); k_2 = k(p_2); k_* = (1 - \varepsilon^2) \sqrt{J_3 mga / \varepsilon}$$

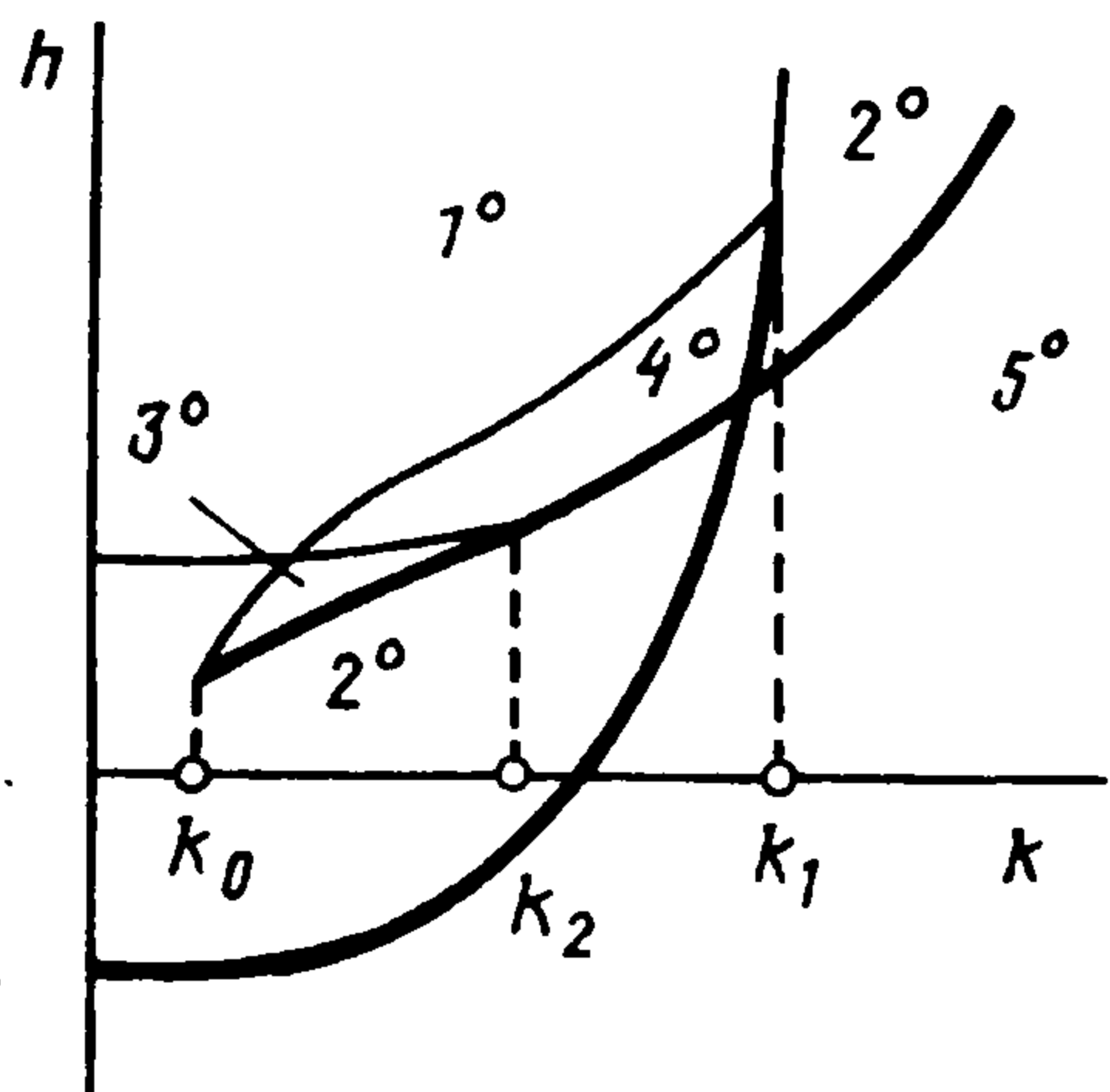
Случаям (1)–(6) отвечают бифуркационные диаграммы, указанные на фигурах под соответствующими номерами. При этом участки бифуркационного множества  $\Sigma$ , отвечающие минимуму эффективного потенциала  $W_k(\gamma)$ , выделены жирными линиями.



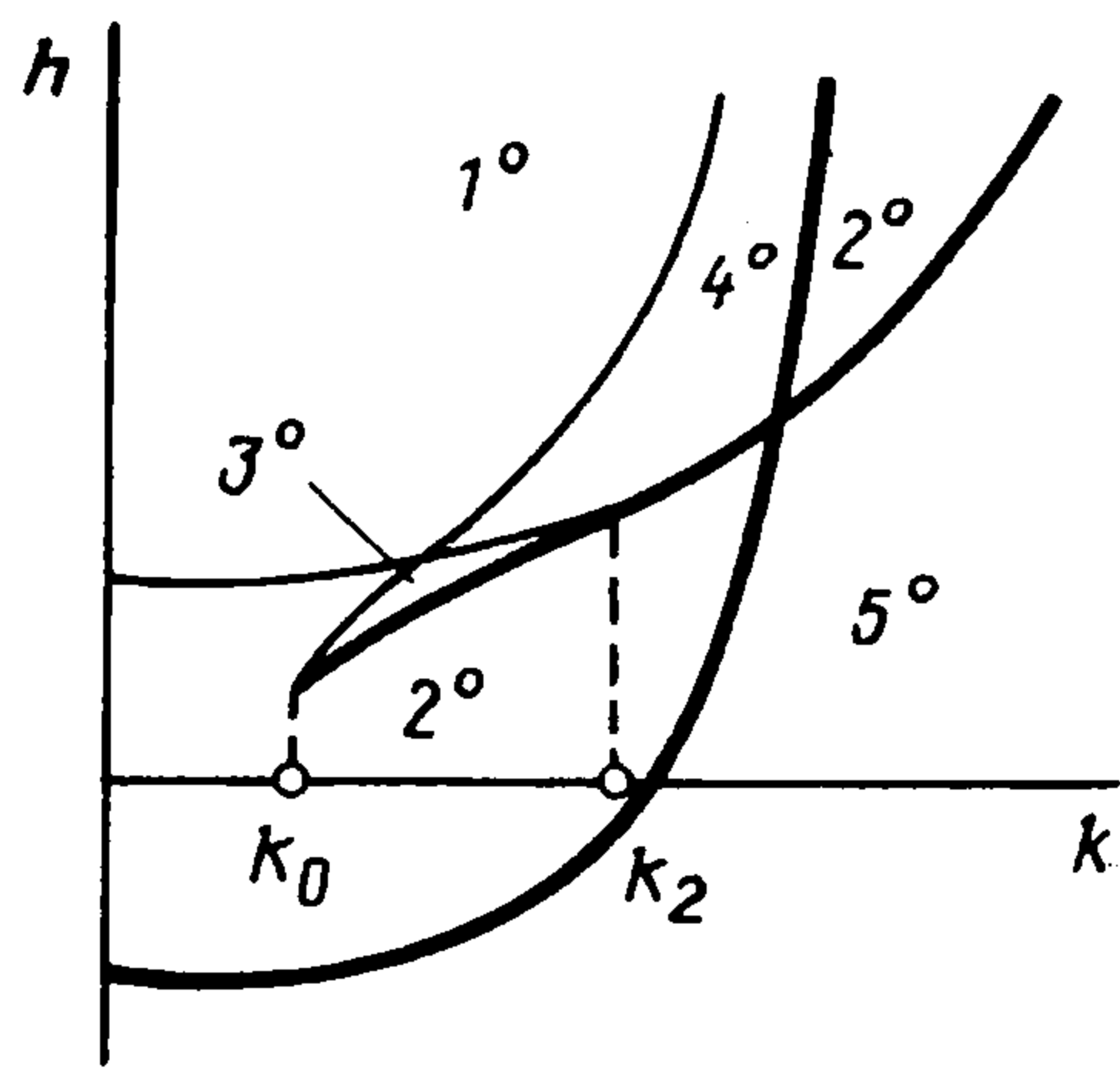
Фиг. 1



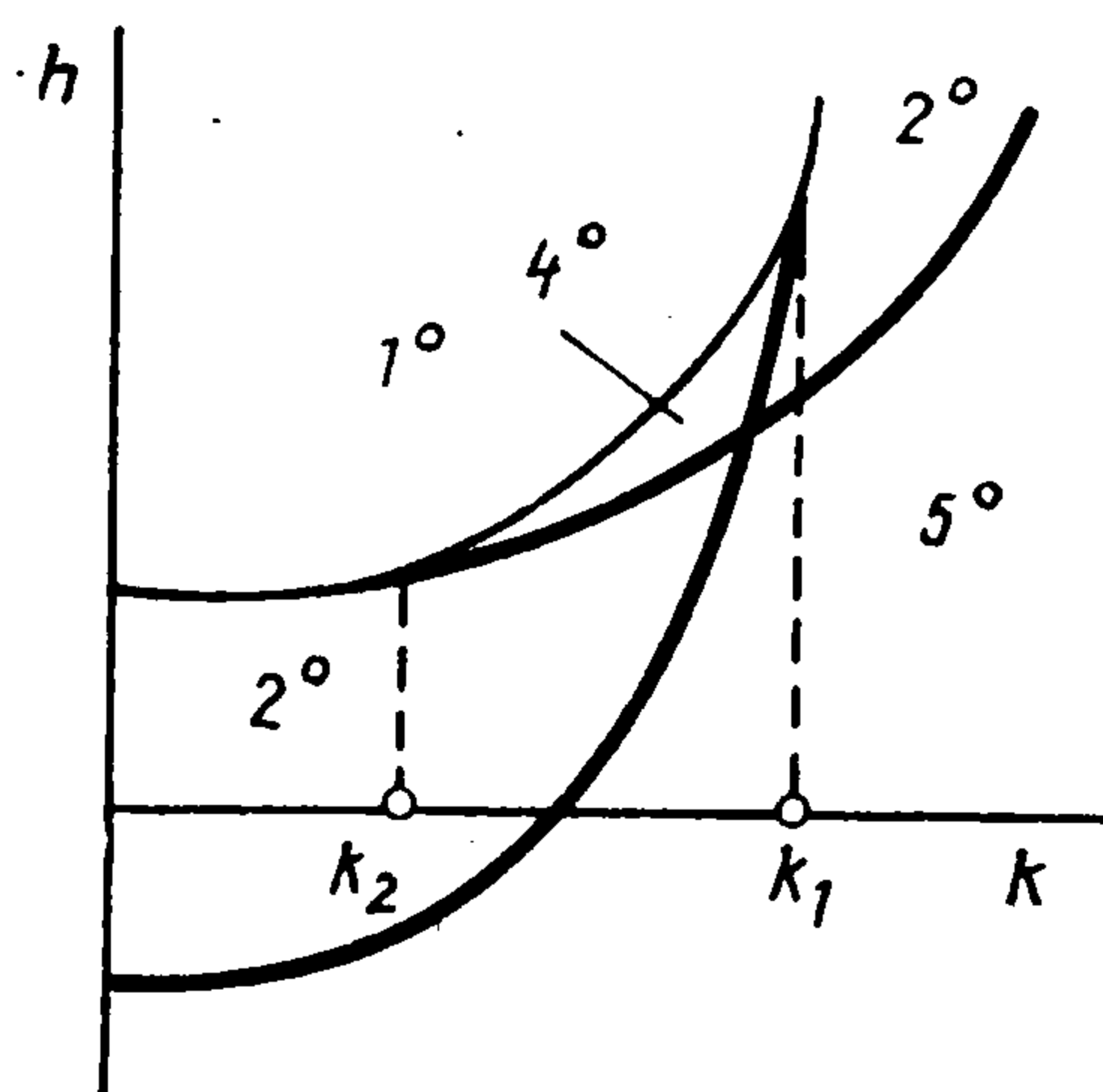
Фиг. 2



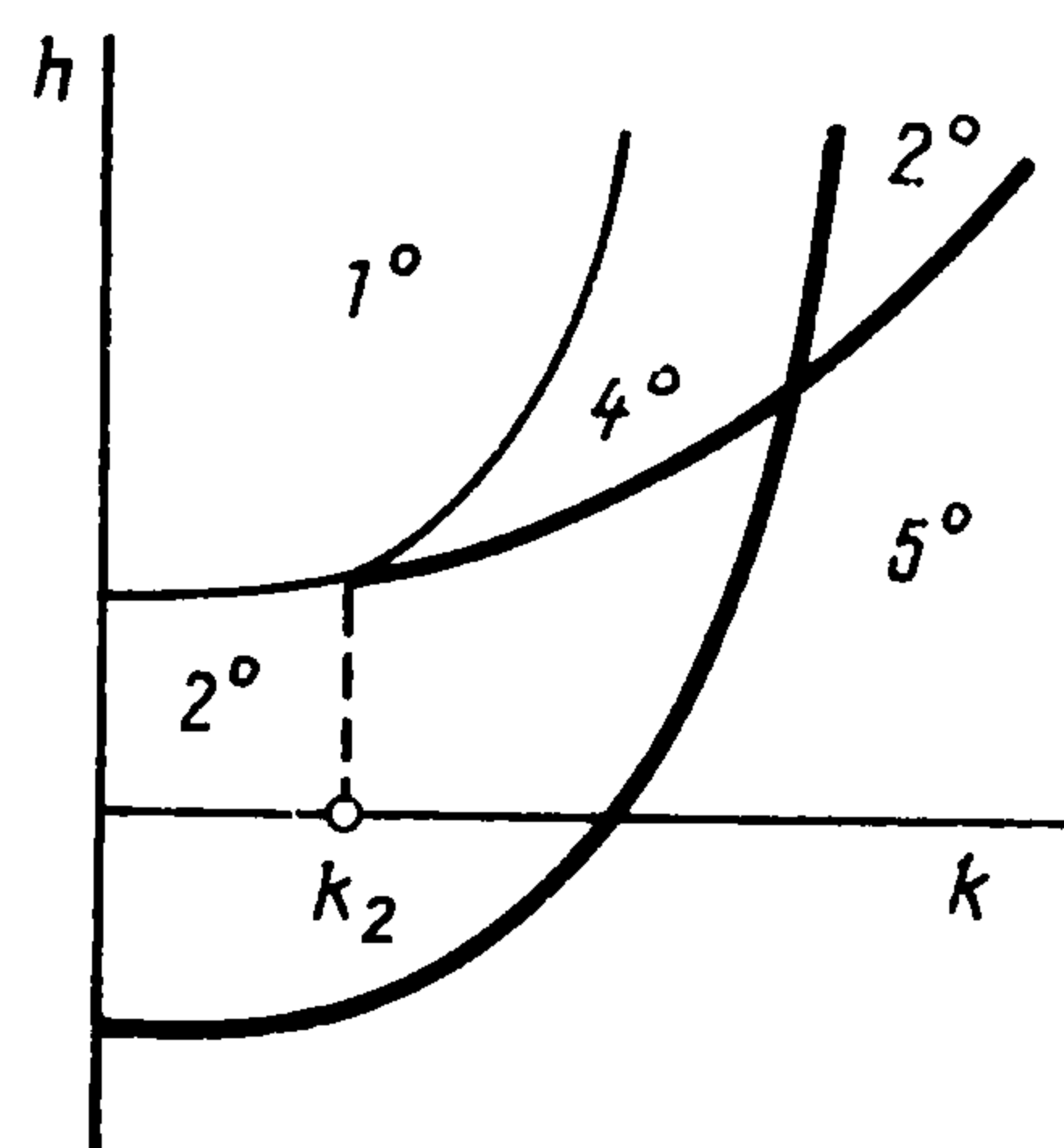
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Заметим, что изображающая точка плоскости  $(k; h)$ , принадлежащая бифуркационному множеству  $\Sigma$ , инвариантна относительно фазового потока рассматриваемой системы. Любая другая точка, не принадлежащая множеству  $\Sigma$ , эволюционирует вдоль прямой  $k = \text{const}$  в сторону уменьшения величины  $h$ , асимптотически приближаясь к ближайшей снизу точке множества  $\Sigma$ , лежащей на этой прямой.

Топологический тип областей возможности движения изменяется при прохождении бифуркационного множества: цифрами  $1^\circ - 5^\circ$  на фигурах обозначены области возможности движения типа  $S^2$  ( $1^\circ$ ),  $D^2$  ( $2^\circ$ );  $S^1 \times D^1$  ( $3^\circ$ );  $D^2UD^2$  ( $4^\circ$ );  $\emptyset$  ( $5^\circ$ ).

Граница области  $5^\circ$  (пустого множества) отвечает глобальному минимуму функции  $W_k(\gamma)$  на сфере  $S^2$ : при значениях полной энергии волчка  $h$  и постоянной интеграла Желле  $k$ , лежащих ниже этой границы, движение невозможно.

Приведенные результаты дополняют качественное исследование волчка на плоскости с трением [5, 6] и, в частности, позволяют однозначно определять финальные движения волчка при заданных значениях его параметров. Например, если  $\varepsilon$  и  $\delta$  удовлетворяют условиям (2) (см. фиг. 2), то при значениях  $(k; h)$ , лежащих в области  $2^\circ$ ;  $k < k_*$ , финальные движения — суть вращения вокруг вертикали при наимизшем расположении центра масс; при  $(k; h)$ , лежащих в области  $3^\circ$ , финальные движения — регулярные прецессии и т. д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77—120.
2. Татаринев Я. В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1973. № 5. С. 70—77.

3. Карпетян А. В., Рубановский В. Н. Об устойчивости стационарных движений неконсервативных механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 43—49.
4. Карпетян А. В., Рубановский В. Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений волчка на горизонтальной плоскости с трением // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 11—18.
5. Karapetyan A. V. The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Societ. Janos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations. Szeged, 1988. Amsterdam; New York; North Holland, 1990. P. 271—290.
6. Самсонов В. А. Качественный анализ задачи о движении волчка по плоскости с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 29—35.

Москва

Поступила в редакцию  
13.XI.1990

УДК 531.36 : 534.1

© 1991 г.

А. О. Игнатьев

### О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для линейного осциллятора с переменными параметрами получены условия неустойчивости положения равновесия, которые иллюстрируются на случае плоских колебаний оперенной ракеты относительно ее центра масс.

Рассмотрим линейный осциллятор

$$\ddot{x} + f(t)x' + g(t)x = 0 \quad (1)$$

где  $f(t)$  и  $g(t)$  — непрерывно-дифференцируемые функции времени  $t$  при  $t \geq 0$ . Вопрос об устойчивости его положения равновесия

$$x = 0, x' = 0 \quad (2)$$

изучался во многих работах (например, [1, 2]). Были получены [3, 4] достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения (2) уравнения (1). Ниже установлены достаточные условия неустойчивости положения равновесия (2) линейного осциллятора (1), отличные от отмеченных.

Обозначив  $x' = y$ , получим систему уравнений

$$x' = y, y' = -g(t)x - f(t)y \quad (3)$$

эквивалентную уравнению (1), допускающую тривиальное решение

$$x = 0, y = 0 \quad (4)$$

**Теорема 1.** Решение (4) системы (3) неустойчиво, если существует такое  $t_0 > 0$ , что при  $t \geq t_0$  выполняется одно из условий

$$D(t) = \frac{1}{4}f^2(t) + g(t) \leq 0 \quad (5)$$

$$D(t) > 0, 4f(t)D(t) + \frac{1}{2}f'(t)f(t) + g'(t) + (f'(t) + f^2(t) + 4D(t)) \sqrt{D(t)} < 0 \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Покажем, что для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  можно выбрать такие  $x_0, y_0$ , удовлетворяющие неравенствам

$$|x_0| < \delta, |y_0| < \delta \quad (7)$$

что существует  $T > 0$  такое, что траектория  $x(t), y(t)$  ( $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ ) при  $t = t_0 + T$  достигает границу области

$$|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon \quad (8)$$

Рассмотрим функцию  $V = xy$ . Ее производная в силу уравнений (3) имеет вид

$$V' = y^2 - f(t)xy - g(t)x^2$$

Выберем  $x_0 > 0, y_0 > 0$ , удовлетворяющими условиям (7) и  $V' > 0$ , и рассмотрим траекторию движения  $x(t), y(t)$ , удовлетворяющую начальным условиям  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ . Не ограничивая общности, можно считать  $D(t_0) < 0$ . Пусть  $[t_0; t_1], [t_2; t_3], \dots, [t_{2n}; t_{2n+1}], \dots$  — промежутки, на которых выполнено условие