Алгебраические уравнения (2.7) дают

$$\partial u/\partial C_a = 0 \quad (a = 2, 3, 4, 5, 6)$$

Полагая $C_a = 0$, после упрощений находим

$$x_1 = x_{10} + x_{40}t - \frac{G}{2}\frac{x_{40}}{x_{60}}t^2, \quad x_2 = x_{20} + x_{50}t - \frac{G}{2}\frac{x_{50}}{x_{60}}t^2$$

$$x_3 = x_{30} + x_{60}t - \frac{G}{2}t^2, \quad x_4 = x_{40} - G\frac{x_{40}}{x_{60}}t \tag{3.17}$$

$$x_5 = x_{50} - G\frac{x_{50}}{x_{60}}t$$

Подстановкой этих выражений в (3.14) при учете равенства (3.16) получим

$$x_6 = x_{60} - Gt \tag{3.18}$$

Таким образом, соотношения (3.17), (3.18) являются решением системы (3.12) при начальных условиях (3.15).

Наконец, находим решение задачи Аппеля. Ее порядок равен пяти, а порядок системы (3.12) — шести. Чтобы получить решение задачи, можно наложить ограничение на постоянные в (3.17) и (3.18). Оно является ограничением неголономной связи для начальных условий, т. е.

$$x_{60} = ba^{-1}\sqrt{x_{40}^2 + x_{50}^2} \tag{3.19}$$

Следовательно, соотношения (3.17)—(3.19) являются решением задачи Аппеля и содержат пять постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vujanović B.* A field method and its application to the theory of vibration // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1984. V. 19. № 4. P. 383—386.
2. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 72 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
4. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк. 1970. 292 с.
5. *Van Dooren R.* Generalized methods for nonholonomic systems with applications in varions fields of classical mechanics // Theoretical and Applied mechanics. Proc. of the 14th IUTAM Congress, Delft. 1976. P. 373—391.
6. *Rumiantsev V. V.* Lectures on analytical mechanics and theory of stability Besançon: Université de Franche-Comté. 1979. P. 1—9.
7. *Ghori Q. K., Hussain M.* Generalization of the Hamilton-Jacobi theorem // ZAMP. 1974. V. 25. P. 536—540.
8. *Mei Fengxiang.* A field method for solving the equations of motion of nonholonomic systems // Acta Mechanica Sinica. 1989. V. 5. № 3. P. 260—268.
9. *Mei Fengxiang.* Foundations of mechanics of nonholonomic systems. Beijing: BITP, 1985. 763 p.

Пекин

Поступила в редакцию
11.VII.1990

УДК 531.36

И. Д. Сахокия, Р. С. Суликашвили

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Изучается влияние несферичности тела специфической формы на вид относительных равновесий пассивно гравитирующего тела и условия их устойчивости в ограниченной круговой плоской задаче трех тел (предполагается, что масса одного из тел пренебрежима мала по сравнению с массой двух других и не оказывает влияния на их движение).

Были исследованы [1] прямолинейные точки либрации пассивно гравитирующей точки в поле притяжения шара со сферическим распределением масс и однородного стержня. При этом предполагалось, что центры стержня и шара находятся на постоянном расстоянии друг от друга, шар и стержень вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг общего центра масс, причем стержень расположен вдоль радиус-вектора.

В данной работе изучаются треугольные точки либрации пассивно гравитирующей точки в поле притяжения шара и стержня при тех же предположениях относительно движения шара и стержня. Показано, что учет размеров стержня приводит к смещению классических треугольных точек либрации, отвечающих стержню нулевой длины, в сторону стержня в обоих направлениях (т. е. как к прямой, соединяющей центры масс шара и стержня, так и прямой, ортогональной первой и проходящей через центр стержня).

1. Рассмотрим движение материальной точки пренебрежимо малой массы под действием притяжения шара и стержня, совершающих стационарное движение, при котором расстояние между их центрами масс постоянно. Угловая скорость вращения шара и стержня относительно их общего центра масс также постоянна, а стержень расположен вдоль радиус-вектора.

Такое движение всегда существует, если [1]:

$$\omega^2 = f(M+m)][\rho(\rho^2 - l^2)] \tag{1.1}$$

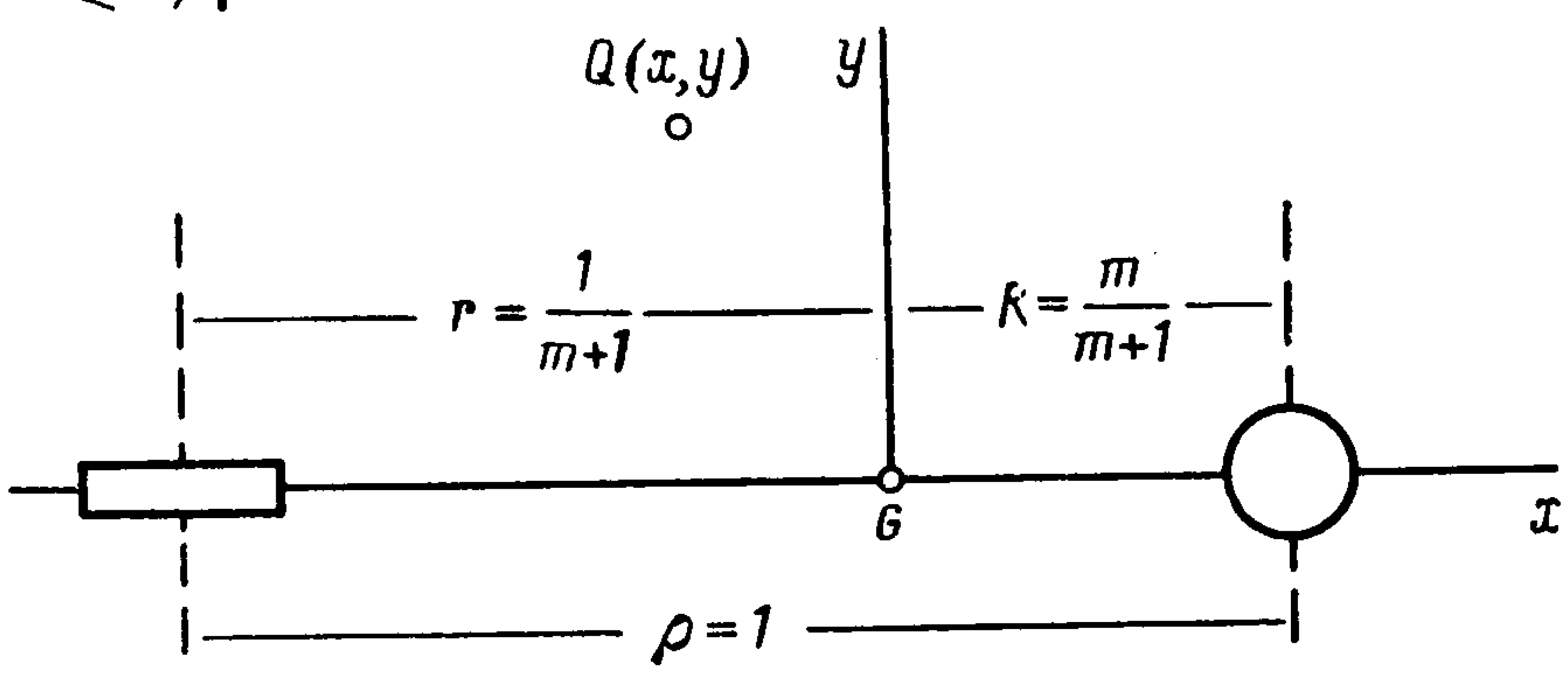
и устойчиво, если

$$3M\rho^4 - 3(4M+m)\rho^2 l^2 + (M+m)l^4 > 0 \tag{1.2}$$

Здесь f — постоянная всемирного тяготения, M и m — массы шара и стержня ρ — расстояние между центрами масс, $2l$ — длина стержня, ω — угловая скорость.

Очевидно, неравенство (1.2) заведомо справедливо при условии $l \ll \rho$, т. е. когда размеры стержня малы по сравнению с расстоянием между центрами шара и стержня.

Пусть единицы измерения выбраны так, что $f = 1$, $M = 1$, $\rho = 1$. Тогда согласно (1.1) $\omega^2 = (1+m)/(1-l^2)$ (при этом, как следует из вышеизложенного, предполагается, что $l \ll 1$).



Введем вращающуюся с угловой скоростью ω систему координат Gxy с началом в центре масс системы шар — стержень и осью Gx, направленной в сторону шара (фигура).

Кинетическая энергия и силовая функция пассивно гравитирующей точки $Q(x, y)$ с массой ε имеют вид

$$2T = \varepsilon[(x^{\cdot} - \omega y)^2 + (y^{\cdot} + \omega x)^2] \quad (x^{\cdot} = dx/dt)$$

$$U = \varepsilon\left[\frac{1}{\sqrt{(x-R)^2+y^2}} + \frac{m}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{d\tau}{\sqrt{\zeta^2(\tau)+y^2}}\right], \quad \zeta(\tau) = x + r - \tau,$$

Таким образом, уравнения движения точки Q от ε не зависят и имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} - 2\omega y^{\cdot} + \partial W/\partial x = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + 2\omega x^{\cdot} + \partial W/\partial y = 0 \tag{1.3}$$

$$W = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - \frac{1}{\sqrt{(x-R)^2+y^2}} - \frac{m}{2l}\ln\frac{\zeta(l)+\sqrt{\zeta^2(l)+y^2}}{\zeta(-l)+\sqrt{\zeta^2(-l)+y^2}}$$

где W — измененная потенциальная энергия.

Уравнения относительных равновесий

$$\partial W/\partial x = 0, \quad \partial W/\partial y = 0 \tag{1.4}$$

имеют исследованные ранее [1] решения $x = x_i$, $y = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которым отвечают прямолинейные точки либрации.

2. Рассмотрим уравнения (1.4) при $y \neq 0$. Разлагая ω и W в ряд по степеням $l \ll 1$ и учитывая члены до второго порядка малости по l включительно, получим

$$\omega^2 = (1 + m)(1 + l^2)$$

$$W = W_2 = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{\xi} - \frac{m}{\eta} - \frac{m}{6}\frac{2(x+r)^2 - y^2}{\eta^5} l^2 + o(l^2) \tag{2.1}$$

$$\xi = \sqrt{(x - R)^2 + y^2}, \quad \eta = \sqrt{(x + r)^2 + y^2}$$

Уравнения относительных равновесий в рассматриваемом приближении имеют вид

$$\omega^2 x = \frac{x - R}{\xi^3} + m\frac{x + r}{\eta^3} + \frac{m}{2}\frac{(x + r)[2(x+r)^2 - 3y^2]}{\eta^7} l^2$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\xi^3} + \frac{m}{\eta^3} + \frac{m}{2}\frac{4(x+r)^2 - y^2}{\eta^7} l^2 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) при $l = 0$ допускают решения [2]

$$x_0 = -{}^1/_2\,(1 - m)/(1 + m), \quad y_0 = \pm{}^1/_2\sqrt{3} \tag{2.3}$$

При $l \neq 0$ решение уравнения (2.2) будем искать в виде рядов

$$x = x_0 + x_1 l + {}^1/_2 x_2 l^2 + \ldots, \quad y = \pm(y_0 + y_1 l + {}^1/_2 y_2 l^2 + \ldots) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), учитывая (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях l, получим

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{3 + 4m}{24}, \quad y_2 = -\frac{19 - 4m}{24\sqrt{3}}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении треугольные точки либрации задаются координатами

$$x = -\frac{1}{2}\frac{1 - m}{1 + m} - \frac{3 + 4m}{24} l^2, \quad y = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{19 - 4m}{24\sqrt{3}} l^2\right) \tag{2.5}$$

т. е. они расположены симметрично относительно оси Gx.

Очевидно, $x_2 < 0$, $y_2 < 0$. Следовательно, учет длины стержня приводит к смещению треугольных точек либрации (по сравнению с классическими $x = x_0$, $y = \pm y_0$) в сторону стержня в обоих направлениях (влево и вниз, см. фигуру).

3. Исследуем устойчивость найденных треугольных точек либрации (2.4). В силу соотношений (1.3), (2.1) уравнения первого приближения имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} - 2\omega y^{\cdot} + ax + cy = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + 2\omega x^{\cdot} + by + cx = 0 \tag{3.1}$$

$$a \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{3}{4}(1 + m) - \frac{26 + 3m - 8m^2}{16} l^2$$

$$b \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{9}{4}(1 + m) - \frac{22 + 29m - 8m^2}{16} l^2$$

$$c \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 + m) + \frac{50 - 31m + 8m^2}{16\sqrt{3}} l^2$$

Справедливы соотношения

$$a + b = -3(1 + m) + (3 + 2m - m^2) l^2 < 0$$

$$ab - c^2 = \frac{27}{4} m + \frac{3}{16}(75m - 18m^2 - 4m^3) l^2 > 0$$

$$a + b + 4\omega^2 = (1 + m^2) + (1 + m)^2 l^2 > 0$$

Следовательно, треугольные точки либрации неустойчивы в вековом смысле, однако степень неустойчивости четна, т. е. возможна гироскопическая стабилизация.

Если выполнено условие

$$(a + b + 4\omega^2)^2 - 4(ab - c^2) =$$
$$= (1 + m)^2 - 27m + {}^1/_4\,(8 + 249m - 30m^2 - 4m^3) l^2 > 0 \tag{3.2}$$

то корни характеристического уравнения системы (3.1) чисто мнимые и треугольные точки либрации устойчивы в первом приближении.

Поскольку рассматриваемая система гамильтонова с двумя степенями свободы, то аналогично [3] можно утверждать, что при условии (3.2) треугольные точки либрации устойчивы по Ляпунову почти при всех значениях параметров m и l (так как они обладают таким свойством при $l = 0$ [3]).

Отметим, что при достаточно малых значениях m условие устойчивости (3.2) сильнее аналогичных условий устойчивости треугольных точек либрации в классической постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sulikashvili R. S.* On straight-line libration points in the restricted plane problem of three bodies // Applied Mechanics Beijing: Intern. Acad. Publ. 1989. V. 1. P. 358—362.
2. *Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука, 1966. 627 с.
3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Тбилиси

Поступила в редакцию 13.XI.1990

УДК 531.38

А. В. Карапетян

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛЧКА НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

На примере исследования бифуркационного множества и областей возможности движения в задаче о качении со скольжением волчка на горизонтальной плоскости с трением обсуждается вопрос о распространении и соответствующей модификации теории Смейла [1, 2] на диссипативные системы с симметрией.

Уравнения движения тяжелого неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости с трением скольжения допускают не возрастающую вдоль всех движений шара функцию

$$H = {}^1/_2 m\,(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + {}^1/_2\, J_1\,(\omega_1^2 + \omega_2^2) + {}^1/_2\, J_3 \omega_3^2 - mga\,\gamma_3 \leqslant h$$

и два интеграла

$$K = J_1\,(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3\,(\gamma_3 - a/r) = k$$

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Здесь m — масса волчка, J_1 и J_3 — соответственно экваториальный и осевой центральные моменты инерции, g — ускорение свободного падения, a — смещение геометрического центра шара от его центра масс вдоль оси динамической симметрии (положительное направление этой оси выбрано таким образом, что $a > 0$), r — радиус шара, v_i, ω_i и γ_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции векторов скорости центра масс волчка $\mathbf{v}$, его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ восходящей вертикали соответственно на главные центральные оси инерции волчка.

Пусть $W_k(\gamma)$ — минимум функции $H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ по переменным $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на уровне k интеграла Желле $K = k$:

$$W_k(\gamma) = \frac{k^2}{2\,[J_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + J_3(\gamma_3 - \varepsilon)^2]} - mga\,\gamma_3 \quad (\varepsilon = a/r < 1)$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения.

1°. Функция $W_k(\gamma)$ на сфере $S^2 = \{\gamma\colon \gamma^2 = 1\}$ принимает стационарные значения тогда и только тогда, когда функция H при постоянных значениях интегралов $K = k$ и $\Gamma = 1$ принимает стационарные значения.

2°. Функция $W_k(\gamma)$ на сфере S^2 достигает строго минимального (максимального) значения тогда и только тогда, когда функция H при постоянных значениях интегралов $K = k$ и $\Gamma = 1$ достигает строго минимального значения (не достигает даже нестрого минимального значения).

Как известно [3, 4], критические значения функции H при фиксированных постоянных интегралов $K = k$ и $\Gamma = 1$ отвечают инвариантным множествам рассматриваемой системы. Более того, если сила трения обращается в нуль при нулевой скорости скольжения, то функция H сохраняет свое начальное значение только на этих множествах и убывает на всех остальных движениях волчка. Таким образом, справедливо утверждение