Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.35

Мэй Фунсян

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается явная форма уравнений движения неголономных систем со связями высшего порядка и при помощи метода поля [1] проводится их интегрирование. Ранее [2—7] рассматривались методы интегрирования уравнений движения неголономных систем. Обобщение метода Гамильтона — Якоби на неголономные системы имеет строгие ограничения [5, 6]. Метод поля [1] был распространен [4] на неголономные системы со связями первого порядка.

1. Пусть положение механической системы определено обобщенными координатами q_s $(s = 1, \ldots, n)$ и система стеснена идеальными неголономными связями m-порядка вида

$$q_{\varepsilon+\beta}^{(m)} = \varphi_\beta\, (q_s, \dot{q}_s, \ldots, q_s^{(m-1)}, q_\sigma^{(m)}, t) \quad (\varepsilon = n - g) \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее $\beta = 1, \ldots, g$; $s, h = 1, \ldots, n$, $\sigma, \nu = 1, \ldots, \varepsilon$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

Уравнения движения системы получены в виде [9]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma + \sum_\beta \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - Q_{\varepsilon+\beta}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma^{(m)}} = 0 \tag{1.2}$$

Обозначим

$$f_s\,(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, t) \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \tag{1.3}$$

$$a_{\beta\sigma}\,(q_s, \dot{q}_s, \ldots, q_s^{(m-1)}, q_\nu^{(m)}, t) \equiv \partial\varphi_\beta / \partial q_\sigma^{(m)}$$

Тогда уравнения (1.2) примут вид

$$\sum_\beta f_{\varepsilon+\beta} a_{\beta\sigma} + f_\sigma = 0 \tag{1.4}$$

Рассмотрим явную форму уравнений (1.1) и (1.4).

Когда $m = 0$, уравнения (1.1) голономны, порядок уравнений (1.4) равен 2ε. Таким образом, имеем голономную систему с избыточными координатами. Дифференцируя дважды уравнения (1.1) по t, получим

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_\sigma \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\ddot{q}_\sigma + \sum_\sigma\sum_\nu \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial q_\sigma \partial q_\nu}\dot{q}_\sigma \dot{q}_\nu + 2\sum_\sigma \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial q_\sigma \partial t}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.4) линейны по $\ddot{q}_s$ и уравнения (1.4), (1.5) разрешимы относительно обобщенных ускорений

$$\ddot{q}_s = h_s\,(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{1.6}$$

Порядок уравнений (1.1), (1.4) равен 2ε, а уравнений (1.6) — $2n$. Чтобы получить из уравнений (1.6) решение уравнений (1.1) и (1.4) при начальных условиях $(q_s)_0$, $(\dot{q}_s)_0$, нужно наложить следующие ограничения на $(q_s)_0$, $(\dot{q}_s)_0$:

$$(q_{\varepsilon+\beta})_0 = \varphi_\beta\,((q_\sigma)_0, 0), \quad (\dot{q}_{\varepsilon+\beta})_0 = \sum_\sigma \left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)_0 (\dot{q}_\sigma)_0 + \left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t}\right)_0 \tag{1.7}$$

При $m = 1$ уравнения (1.1) являются неголономными связями первого порядка. В данном случае имеем задачи неголономных систем первого порядка. Дифференцируя уравнения (1.1) по t, получим

$$\ddot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial \dot{v}_\sigma}\ddot{q}_\sigma + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t} \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.4) и (1.8) находим обобщенные ускорения $\ddot{q}_s$ в виде (1.6). Порядок уравнений (1.1), (1.4) равен $q + 2\varepsilon$. Чтобы получить из уравнений (1.6) решение уравнений (1.1) и (1.4) при начальных условиях $(q_s)_0$, $(q_s^{\cdot})_0$, можно наложить следующие ограничения на $(q_s)_0$, $(q_s^{\cdot})_0$:

$$(\dot q_{\varepsilon+\beta})_0 = \varphi_\beta ((q_s)_0, (q_\sigma^{\cdot})_0, 0) \tag{1.9}$$

При $m = 2$ уравнения (1.1) являются неголономными связями второго порядка. Если $\partial\varphi_\beta/\partial q_\sigma^{(m)}$ не содержат $q^{\cdot\cdot}$, то уравнения (1.4) линейны по $q_s^{\cdot\cdot}$, в противном случае — нелинейны. Предполагается, что система уравнений (1.1), (1.4) разрешима относительно $q_s^{\cdot\cdot}$, тогда их можно записать в виде (1.6).

При $m > 2$ порядок уравнений (1.2) будет заключен в пределах от 2ε до $m\varepsilon$ в зависимости от вида $\partial\varphi_\beta/\partial q_\sigma^{(m)}$. Если высший дифференциал обобщенных координат по t есть l $(0 \leqslant l \leqslant m)$, то при дифференцировании уравнений (1.2) $m - 2$ раз по t $(l \leqslant 2)$, или $m - l$ раз по t $(l \geqslant 2)$, их порядок становится $m\varepsilon$. Присоединим эти уравнения к (1.1) и предположим, что система разрешима относительно $q_s^{(m)}$.

$$q_s^{(m)} = h_s (q_k, q_k^{\cdot}, \ldots, q_k^{(m-1)}, t) \quad (m > 2) \tag{1.10}$$

Тогда чтобы получить из уравнения (1.10) решение уравнений (1.1) и (1.4) при начальных условиях $(q_s)_0$, $(q_s^{\cdot})_0$, можно наложить ограничения на уравнения (1.2). Например, когда $l = 1$, $m = 4$, имеем ограничения

$$\sum_\beta (f_{\varepsilon+\beta})_0 (a_{\beta\sigma})_0 + (f_\sigma)_0 = 0 \qquad \sum_\sigma [(\dot f_{\varepsilon+\beta})_0 (a_{\beta\sigma})_0 + (f_{\varepsilon+\beta})_0 (\dot a_{\beta\sigma})_0] + (f_\sigma^{\cdot})_0 = 0 \tag{1.11}$$

Когда $l = 3$, $m = 4$, имеем ограничения, соответствующие лишь первому равенству (1.11), и т. д.

Таким образом, для общих неголономных систем порядка m уравнения движения можно записать в явной форме

$$q_s^{(m)} = h_s (q_k, \dot q_k, \ldots, q_k^{(m-1)}, t) \quad (m \geqslant 2) \tag{1.12}$$

Теперь преобразуем уравнения движения (1.12) к системе уравнений первого порядка. Пусть

$$x_s = q_s, \quad x_{n+s} = q^{\cdot}_s, \ldots, x_{(m-1)n+s}\, q_s^{(m-1)}$$

Тогда из уравнения (1.12) приобретают вид стандартной системы уравнений.

$$\begin{gathered} x_s^{\cdot} = x_{n+s}, x_{n+s} = x_{2n+s}, \ldots, \dot x_{(m-2)n+s} = x_{(m-1)n+s} \\ \dot x_{(m-1)n+s} = h_s (x_k, x_{n+k}, \ldots, x_{(m-1)n+k}, t) \end{gathered} \tag{1.13}$$

2. Рассмотрим обобщение метода поля. По методу поля [1, 8] выберем некоторую переменную, например x_1, в качестве функции времени t и остальных переменных x_A $(A = 2, \ldots, mn)$:

$$x_1 = u (t, x_A) \tag{2.1}$$

Дифференцируя равенство (2.1) по t и используя уравнения (1.13), получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{a=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_a} x_{n+a} + \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_{n+s}} x_{2n+s} + \ldots + \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_{(m-2)n+s}} x_{(m-1)n+s} + \\ + \sum_s \frac{\partial u}{\partial x_{(m-1)n+s}} h_s - x_{n+1} = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Квазилинейное уравнение (2.2) называется базовым дифференциальным уравнением в частных производных. Если полное решение уравнения (2.2) имеет вид

$$x_1 = u (t, x_A, C_\alpha) \quad (A_2 = 2, \ldots, mn;\ \alpha = 1, \ldots, mn) \tag{2.3}$$

то, подставив выражение (2.3), получим тождество. Обозначим начальные значения переменных поля через

$$x_\alpha (0) = x_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, \ldots, mn) \tag{2.4}$$

Подстановкой выражения (2.4) в (2.3), обозначая одну постоянную, например C_1, через x_{α_0} и остальные постоянные через C_A, получим

$$x_1 = u(t, x_A, x_{\alpha 0}, C_A) \tag{2.5}$$

Можно доказать, [7], что при

$$det\,(\partial^2 u/\partial C_A \partial x_\beta) \neq 0 \tag{2.6}$$

решение уравнений (1.13) в соответствии с начальными значениями (2.5) определяется соотношением (2.5) и $mn - 1$ для $C_A\, \partial u/\partial C_A = 0$ $(A = 2, \ldots, mn)$.

Следует отметить, что порядок уравнений увеличился при переходе от (1.4) к (1.12). Если он увеличился на единицу, то уравнения (1.4) становятся 2ε ограничениями для начальных условий, если на две единицы, то уравнения (1.4) и их дифференциалы по t становятся 4ε ограничениями для начальных условий, и т. д.

При помощи данного метода можно в принципе интегрировать уравнения движения неголономных систем порядка m. Используя метод поля, можно выбирать переменную поля так, чтобы легко решить уравнение (2.2). Главная трудность этого метода состоит в нахождении решения уравнения (2.2). Однако получив одно полное решение этого уравнения, получим решение системы из уравнения (2.5) и (2.7).

3. *Пример 1.* Рассмотрим движение точки единичной массы, находящейся под действием силы $F_x = F_y = 0$, $F_z = k = \mathrm{const}$, причем уравнение связи имеет вид

$$z^{\cdot\cdot} = tx^{\cdot\cdot\cdot} + \sqrt{1+t^2}\,y^{\cdot\cdot\cdot} \tag{3.1}$$

Уравнения (1.2) дают

$$x^{\cdot\cdot} + t(z^{\cdot\cdot} - k) = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + \sqrt{1+t^2}\,(z^{\cdot\cdot} - k) = 0 \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по t и присоединяя их к (3.1), а затем полагая $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, получим

$$x_1^{\cdot} = x_4,\ x_2^{\cdot} = x_5,\ x_3^{\cdot} = x_6,\ x_4^{\cdot} = x_7,\ x_5^{\cdot} = x_8,\ x_6^{\cdot} = x_9$$

$$x_7^{\cdot} = \frac{k - x_9}{1+t^2}, \quad x_8^{\cdot} = 0, \quad x_9^{\cdot} = \frac{(k - x_9)\,t}{1+t^2} \tag{3.3}$$

Пусть $x_1 = u(t, x_2, x_3, \ldots, x_9)$. Базовое уравнение (2.2) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_5 + \frac{\partial u}{\partial x_3}x_6 + \frac{\partial u}{\partial x_4}x_7 + \frac{\partial u}{\partial x_5}x_8 + \frac{\partial u}{\partial x_6}x_9 + \frac{\partial u}{\partial x_7}\frac{k - x_9}{1+t^2} + \frac{\partial u}{\partial x_9}\frac{(k-x_9)\,t}{1+t^2} - x_4 = 0 \tag{3.4}$$

Предположим, что полное решение этого уравнения имеет вид

$$x_1 = u = f_0(t) + \sum_{A=2}^{9} f_A(t)\, x_A \tag{3.5}$$

Подстановкой (3.5) в (3.4), сравнивая свободное слагаемое и слагаемые, содержащие $x_2, x_3, \ldots, x_9$, получим

$$f_0^{\cdot} + f_7\frac{k}{1+t^2} + f_9\frac{kt}{1+t^2} = 0, \quad f_2^{\cdot} = 0, \quad f_3^{\cdot} = 0, \quad f_4^{\cdot} - 1 = 0$$

$$f_5^{\cdot} + f_2 = 0,\ f_6^{\cdot} + f_3 = 0,\ f_7^{\cdot} + f_4 = 0,\ f_8^{\cdot} + f_5 = 0$$

$$f_9^{\cdot} + f_6 - f_7\frac{1}{1+t^2} - f_9\frac{t}{1+t^2} = 0$$

После интегрирования при учете начальных условий $C_0 = x_{10} - \sum_{A=2}^{9} C_A x_{A0}$ $(C_i = f_i(t_0))$ и подстановки в (3.4) имеем

$$x_1 = u = x_{10} - \sum_{A=2}^{9} C_A x_{A0} + k(C_9 - C_3 - C_4) - k\{(C_9 - C_3 - C_4)\sqrt{1+t^2} +$$

$$+ {}^1/_2\, C_3 t^2 - (C_6 + {}^1/_2)[\sqrt{1+t^2}\ L(t) - t] + C_7 t\} + C_2 x_2 + C_3 x_3 + (C_4 + t)\, x_4 +$$

$$+ (C_5 - C_2 t)\, x_5 + (C_6 - C_3 t)\, x_6 + (C_7 - C_4 t - {}^1/_2 t^2)\, x_7 + (C_8 - C_5 t + {}^1/_2\, C_2 t^2)\, x_8 +$$

$$+ \{(C_9 - C_3 - C_4)\sqrt{1+t^2} + C_3(1+t^2) - C_6\sqrt{1+t^2}\,L(t) + C_7 t + C_4 +$$

$$+ {}^1/_2 t - {}^1/_2\sqrt{1+t^2}\,L(t)\}\, x_9, \quad L(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \tag{3.6}$$

Алгебраические уравнения (2.7) $\partial u/\partial C_A = 0$ $(A = 2, \ldots, 9)$

дают

$$x_2 = x_{20} + x_{50}(t) + {}^1/_2 x_{80}t^2,\ x_3 = x_{30} + x_{60}t + {}^1/_2 kt^2 + (x_{90} - k)[tL(t) - M(t)]$$
$$x_4 = x_{40} + x_{70}t + (k - x_{90})M(t),\ x_5 = x_{50} + x_{80}t \qquad (3.7)$$
$$x_6 = x_{60} + kt + (x_{90} - k)L(t),\ x_7 = x_{70} + (k - x_{90})t/\sqrt{1+t^2}$$
$$x_8 = x_{80},\ x_9 = k + (x_{90} - k)/\sqrt{1+t^2}$$
$$M(t) = \sqrt{1+t^2} - 1$$

Подстановкой выражений (3.7) в (3.6) получим

$$x_1 = x_{10} + x_{40}t + {}^1/_2 x_{70}t^2 + {}^1/_2 (k - x_{90})[L(t) + tM(t) - t] \qquad (3.8)$$

Соотношения (3.7) и (3.8) являются решением уравнений (3.4) при начальных условиях $x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}$ $(\alpha = 1, \ldots, 9)$.

Наконец, находим решение исходной задачи. Следует отметить увеличение порядка при переходе от (3.2) к (3.3). Ограничения (3.2) по начальным ускорениям дают

$$x_{70} = 0,\ x_{80} + (x_{90} - k) = 0 \qquad (3.9)$$

Подстановкой соотношений (3.9) в (3.7) и (3.8) получим решение задачи, содержащее семь постоянных, соответственно порядку системы (3.1), (3.2).

Пример 2. (Пример Аппеля). В примере Аппеля функция Лагранжа и уравнение связи имеют вид

$$L = {}^1/_2 m(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) - mgz,\ z^{\cdot} = ba^{-1}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2})^{1/2} \qquad (3.10)$$

Пусть $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$. Дифференцируя последнее соотношение (3.10) по t, получим связь второго порядка

$$q_3^{\cdot\cdot} = ba^{-1}(q_1^{\cdot}q_1^{\cdot\cdot} + q_2^{\cdot}q_2^{\cdot\cdot})(q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2})^{-1/2} \qquad (3.11)$$

Уравнения (1.2) дают

$$mq_\alpha^{\cdot\cdot} + (mq_3^{\cdot\cdot} + mq)ba^{-1}q_\alpha^{\cdot}(q_1^{\cdot 2} + q_2^{2})^{-1/2} = 0,\quad \alpha = 1,2$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.10), (3.11) и полагая $x_1 = q_1,\ x_2 = q_2,\ x_3 = q_3$, имеем

$$x_1^{\cdot} = x_4,\ x_2^{\cdot} = x_5,\ x_3^{\cdot} = x_6,\ x_4^{\cdot} = -Gx_4/x_6,\ x_5^{\cdot} = -Gx_5/x_6,\ x_6^{\cdot} = -G$$
$$(G = gb^2/(a^2 + b^2)) \qquad (3.12)$$

Пусть

$$x_6 = u(t, x_1, x_2, \ldots, x_5)$$

Тогда базисное уравнение (2.2) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1}x_4 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_5 + \frac{\partial u}{\partial x_3}u + \frac{\partial u}{\partial x_4}\left(-G\frac{x_4}{u}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_5}\left(-G\frac{x_5}{u}\right) + G = 0$$

Замечая, что

$$x_4 = Ax_6,\ x_5 = Bx_6\ (A = x_{40}/x_{60},\ B = x_{50}/x_{60})$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1}Au + \frac{\partial u}{\partial x_2}Bu + \frac{\partial u}{\partial x_3}u - \frac{\partial u}{\partial x_4}GA - \frac{\partial u}{\partial x_5}GB + G = 0 \qquad (3.13)$$

Запишем решение в виде

$$x_6 = u = f_1 + f_2x_1 + f_3x_2 + f_4x_3 + f_5x_4 + f_6x_5\ (f_\alpha = f_\alpha(t),\ \alpha = 1, \ldots, 6)$$

и подставим его в уравнение (3.13). Сравнивая свободное слагаемое и слагаемые, содержащие $x_1, \ldots, x_5$, получим

$$f_1^{\cdot} + (f_2A + f_3B + f_4)f_1 + (1 - f_5A - f_6B)G = 0$$
$$f_a^{\cdot} + (f_2A + f_3B + f_4)f_a = 0 \quad (a = 2, 3, 4, 5, 6)$$

После интегрирования имеем

$$x_6 = u = [1 + (AC_2 + BC_3 + C_4)t]^{-1}\{C_1 + G[(AC_5 + BC_6 - 1)t -$$
$$- {}^1/_2(AC_2 + BC_3 + C_4)t^2] + C_2x_1 + C_3x_2 + C_4x_3 + C_5x_4 + C_6x_5\} \qquad (3.14)$$

Пусть начальные условия

$$x_\alpha(0) = x_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, \ldots, 6) \qquad (3.15)$$

Подстановкой (3.15) в уравнение (3.14) находим

$$C_1 = x_{60} - C_2x_{10} - C_3x_{20} - C_4x_{30} - C_5x_{40} - C_6x_{50} \qquad (3.16)$$

а затем исключаем C_1 из соотношения (3.14).

Алгебраические уравнения (2.7) дают

$$\partial u / \partial C_a = 0 \quad (a = 2, 3, 4, 5, 6)$$

Полагая $C_a = 0$, после упрощений находим

$$x_1 = x_{10} + x_{40} t - \frac{G}{2} \frac{x_{40}}{x_{60}} t^2, \quad x_2 = x_{20} + x_{50} t - \frac{G}{2} \frac{x_{50}}{x_{60}} t^2$$

$$x_3 = x_{30} + x_{60} t - \frac{G}{2} t^2, \quad x_4 = x_{40} - G \frac{x_{40}}{x_{60}} t \tag{3.17}$$

$$x_5 = x_{50} - G \frac{x_{50}}{x_{60}} t$$

Подстановкой этих выражений в (3.14) при учете равенства (3.16) получим

$$x_6 = x_{60} - Gt \tag{3.18}$$

Таким образом, соотношения (3.17), (3.18) являются решением системы (3.12) при начальных условиях (3.15).

Наконец, находим решение задачи Аппеля. Ее порядок равен пяти, а порядок системы (3.12) — шести. Чтобы получить решение задачи, можно наложить ограничение на постоянные в (3.17) и (3.18). Оно является ограничением неголономной связи для начальных условий, т. е.

$$x_{60} = ba^{-1} \sqrt{x_{40}^2 + x_{50}^2} \tag{3.19}$$

Следовательно, соотношения (3.17)—(3.19) являются решением задачи Аппеля и содержат пять постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vujanović B.* A field method and its application to the theory of vibration // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1984. V. 19. № 4. P. 383—386.
2. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 72 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
4. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк. 1970. 292 с.
5. *Van Dooren R.* Generalized methods for nonholonomic systems with applications in varions fields of classical mechanics // Theoretical and Applied mechanics. Proc. of the 14th IUTAM Congress, Delft. 1976. P. 373—391.
6. *Rumiantsev V. V.* Lectures on analytical mechanics and theory of stability Besançon: Université de Franche-Comté. 1979. P. 1—9.
7. *Ghori Q. K., Hussain M.* Generalization of the Hamilton-Jacobi theorem // ZAMP. 1974. V. 25. P. 536—540.
8. *Mei Fengxiang.* A field method for solving the equations of motion of nonholonomic systems // Acta Mechanica Sinica. 1989. V. 5. № 3. P. 260—268.
9. *Mei Fengxiang.* Foundations of mechanics of nonholonomic systems. Beijing: BITP, 1985. 763 p.

Пекин

Поступила в редакцию
11.VII.1990

УДК 531.36

И. Д. Сахокия, Р. С. Суликашвили

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Изучается влияние несферичности тела специфической формы на вид относительных равновесий пассивно гравитирующего тела и условия их устойчивости в ограниченной круговой плоской задаче трех тел (предполагается, что масса одного из тел пренебрежима мала по сравнению с массой двух других и не оказывает влияния на их движение).

Были исследованы [1] прямолинейные точки либрации пассивно гравитирующей точки в поле притяжения шара со сферическим распределением масс и однородного