Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 539.375

В. В. Твардовский

ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИНА В АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Рассматривается псевдомакротрещина, представляющая собой обычную трещину в композите или неоднородном теле, берега которой стянуты неразрушенными элементами структуры и взаимодействуют по линейному закону. Показано, что в этом случае достаточно нормального растяжения для появления ненулевой величины коэффициента интенсивности напряжений K_{II} в ее кончике. Задача сведена к векторному интегродифференциальному уравнению Прандтля, для которого построено аналитическое решение. Получена связь между коэффициентами интенсивности напряжений K_I, K_{II}, жесткостью связей берегов трещины, упругими характеристиками окружающего материала и внешними нагрузками.

Классическим примером псевдомакротрещины является макротрещина в композите с хрупкой керамической матрицей и вязкими волокнами, стягивающими ее берега и препятствующими ее раскрытию [1, 2]. Была рассмотрена [3] модель псевдомакротрещины в упругом линейно-анизотропном теле в условиях плоской деформации. При этом связь между усилиями, передаваемыми с берега на берег σ_{ni}, и раскрытием берегов w_j предполагалась линейной:

$$\sigma_{ni}(\mathbf{x}) = k_{ij} w_j(\mathbf{x}) \tag{0.1}$$

где k_{ij} — симметричный тензор. При диагональном виде тензора k_{ij} и совпадении плоскости упругой симметрии с плоскостью псевдомакротрещины задача распадается на две независимые: симметричное нагружение и кососимметричный сдвиг. Был введен параметр связи

$$\lambda = 2k^2 \varkappa \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_{22}}, \quad \varkappa = \operatorname{Re}\left(i \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right) \tag{0.2}$$

имеющий размерность обратной длины (величина λ^{-1} по порядку величины совпадает с характерным размером структуры материала), такой что из условия $\lambda l \gg 1$ (l — длина псевдомакротрещины) следует независимость коэффициента интенсивности напряжений K_I в кончике псевдомакротрещины [3]: $K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{2/\lambda}$. В формуле (0.2) ν_{ij}, E_{22} — технические константы упругости, а μ_1, μ_2 — неравные корни характеристического уравнения С. Г. Лехницкого [4] с положительной мнимой частью. Для изотропного тела аналогичная задача рассматривалась [5] для области значений $\lambda l \infty 1$.

При произвольной ориентации псевдомакротрещины в анизотропной среде проблема значительно усложняется. В частности, даже при приложении только нормальных растягивающих напряжений помимо величины K_I, действующей в кончике псевдомакротрещины, возникает ненулевое значение величины K_{II}. Ниже рассматривается полубесконечная псевдомакротрещина и определяется связь между приложенными усилиями и коэффициентами интенсивности напряжений в ее кончике.

1. Постановка задачи и разрешающее уравнение. Пусть бесконечное анизотропное пространство ослаблено полубесконечной псевдомакротрещиной, лежащей на положительной части оси x, и имеет плоскость упругой симметрии, нормальную оси z системы координат (x, y, z). Тогда обобщенная плоская задача распадается на две независимые: плоскую деформацию и продольный сдвиг [4]. Ограничимся плоской деформацией ($\varepsilon_z = 0$) как наиболее интересным с практической точки зрения случаем. Напряжения σ_x, σ_y, σ_{xy} и перемещения u, v при неравных комплексных корнях μ_r, ($r = 1, 2$) характеристического уравнения выражаются через два комплексных потенциала С. Г. Лехницкого (p_r, q_r — комплексные параметры [4])

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\,(\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)), \quad \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\,(\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2))$$
$$\sigma_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\,(\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)) \tag{1.1}$$
$$u = 2\,\mathrm{Re}\,(p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_2(z_2)), \quad v = 2\,\mathrm{Re}\,(q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2))$$
$$(z_r = x + \mu_r y,\ \Phi_r(z_r) \equiv \varphi_r'(z_r),\ r = 1, 2)$$

На бесконечности задано однородное поле напряжений

$$\sigma_x^\infty = 0, \quad \sigma_y^\infty = p_\infty, \ \sigma_{xy}^\infty = q_\infty \tag{1.2}$$

На берегах псевдомакротрещины задана связь усилий и разрыва перемещений типа (0.1):

$$\sigma_y^\pm(x) = k_2[v(x)], \quad \sigma_{xy}^\pm(x) = k_1[u(x)], \quad x > 0 \tag{1.3}$$

Обобщение на более общий случай связей не вызывает затруднений. Функции $\varphi_r(z_r)$, аналитические всюду в комплексных плоскостях z_r кроме положительных значений действительной оси представим в виде интегралов типа Коши

$$\varphi_r(z) = \Gamma_r z + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mu_t f(x) + g(x)}{\mu_t - \mu_r}\frac{dx}{x - z} \tag{1.4}$$

Здесь и далее индексы r и t пробегают значения 1 и 2 и альтернируют друг с другом: если $r = 1$, то $t = 2$ и наоборот.

Постоянные Γ_r в (1.4) определяют поле (1.2) на бесконечности, а $f(x)$ и $g(x)$ — подлежащие определению действительные функции.

Найдем при помощи (1.1), (1.4) раскрытие трещины $[u(x)]$ и $[v(x)]$. В самом общем случае будем иметь

$$[u(x)] = a_{11}g(x) + a_{12}f(x) \quad [v(x)] = a_{21}g(x) + a_{22}f(x) \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\,\mathrm{Re}\left(i\frac{p_1 - p_2}{\mu_2 - \mu_1}\right), \quad a_{12} = 2\,\mathrm{Re}\left(i\frac{\mu_2 p_1 - \mu_1 p_2}{\mu_2 - \mu_1}\right) \\ a_{21} &= 2\,\mathrm{Re}\left(i\frac{q_1 - q_2}{\mu_2 - \mu_1}\right), \quad a_{22} = 2\,\mathrm{Re}\left(i\frac{\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2}{\mu_2 - \mu_1}\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Используя свойства комплексных параметров p_r, q_r [6], можно показать справедливость соотношений.

$$a_{12} = -a_{21}, \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \det[a_{ij}] > 0 \tag{1.7}$$

Таким образом, функции $f(x)$ и $g(x)$ пропорциональны разрывам перемещений, и в силу этого должны обращаться в нуль при $x \to +0$:

$$g(0) = 0, \quad f(0) = 0 \tag{1.8}$$

При учете соотношений (1.8), производные комплексных потенциалов $\varphi_r(z)$ выражаются в виде

$$\Phi_r(z) = \Gamma_r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mu_t f'(x) + g'(x)}{\mu_t - \mu_r}\frac{dx}{x - z} \tag{1.9}$$

а распределение напряжений на оси x дается формулами

$$\sigma_y^\pm(x) + i\sigma_{xy}^\pm(x) = p_\infty + iq_\infty + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f'(\xi) + ig'(\xi)}{\xi - x}\,d\xi \tag{1.10}$$

причем для положительных значений x интеграл в (1.10) понимается в смысле главного значения по Коши.

Удовлетворяя при помощи соотношений (1.6), (1.10), граничным условиям задачи (1.3), получаем сингулярное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{f}(x)$:

$$\Lambda \mathbf{f}(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{f}'(\xi)}{\xi - x}\,d\xi = \mathbf{P}_\infty; \quad \mathbf{f}(x) = \begin{Bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_\infty = \begin{Bmatrix} q_\infty \\ p_\infty \end{Bmatrix} \tag{1.11}$$

При этом компоненты матрицы Λ могут быть найдены через известные значения a_{ij} при помощи соотношений (1.3) и (1.6):

$$\Lambda_{11} = k_1 a_{11}, \quad \Lambda_{12} = k_1 a_{12}, \quad \Lambda_{21} = k_2 a_{21}, \quad \Lambda_{22} = k_2 a_{22} \tag{1.12}$$

Поскольку $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, неравенства (1.7) дают

$$\det[\Lambda_{ij}] = k_1 k_2 \det[a_{ij}] > 0 \tag{1.13}$$

Используя свойства интегралов типа Коши вблизи концов линии интегрирования [7] применительно к уравнению (1.11) с граничными условиями (1.8), найдем асимптотику вектор-функции $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}'(x)$ вблизи нуля:

$$\mathbf{f}(x) \to 2\mathbf{N}\sqrt{x}; \quad \mathbf{f}'(x) \to \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0 \tag{1.14}$$

где вектор $\mathbf{N}$ неизвестен, подлежит определению и связан с вектором коэффициентов интенсивности напряжений $\mathbf{K}$ формулой

$$\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi}\,\mathbf{N} \tag{1.15}$$

На бесконечности вектор-функция $\mathbf{f}(x)$ постоянна и выражается через известный вектор внешних напряжений и матрицу, обратную Λ:

$$\mathbf{f}(\infty) = \Lambda^{-1}\mathbf{P}_\infty \tag{1.16}$$

2. Решение интегродифференциального уравнения. Сингулярное уравнение (1.11) принадлежит классу интегродифференциальных уравнений Прандтля и возникает во многих задачах механики и математической физики. Для скалярной неизвестной функции это уравнение достаточно хорошо изучено (например, [8]), простое его решение получено в [3]. Ниже строится замкнутое решение векторного уравнения Прандтля (1.11).

Введем вектор-функцию $\mathbf{f}_0(\xi)$ по правилу

$$\mathbf{f}_0(\xi) = \begin{cases} \mathbf{f}(\xi) - \mathbf{f}(\infty), & \xi > 0 \\ \mathbf{0}, & \xi < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

и перепишем уравнение (1.11) в виде

$$\Lambda \mathbf{f}_0(\xi) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{f}_0'(t)}{t - \xi}\,dt = \begin{cases} \mathbf{0}, & \xi > 0 \\ \mathbf{b}(\xi), & \xi < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{b}(\xi)$ — неизвестная вектор-функция, определенная на луче $\xi < 0$.

Определим аналитические в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}(\omega) > 0$) комплексные вектор-функции

$$\mathbf{Q}_0^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_0(\xi)\, e^{i\omega\xi}\,d\xi, \quad \mathbf{Q}_1^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_0'(\xi)\, e^{i\omega\xi}\,d\xi \tag{2.3}$$

Интегрируя второе равенство (2.3) по частям, получаем соотношение, связывающее $\mathbf{Q}_0^+$ и $\mathbf{Q}_1^+$:

$$\mathbf{Q}_1^+(\omega) = \Lambda^{-1}\mathbf{P}_\infty - i\omega\mathbf{Q}_0^+(\omega) \tag{2.4}$$

Использование леммы Эрдейи [9], являющейся аналогом леммы Ватсона для интегралов Фурье, с учетом поведения вектор-функций $\mathbf{f}_0(x)$,

$\mathbf{f}_0'(x)$ в нуле (см. (1.14), (2.1)), позволяет найти асимптотическое поведение вектор-функций $\mathbf{Q}_0^+$, $\mathbf{Q}_1^+$ на бесконечности:

$$\mathbf{Q}_1^+(\omega) \to \mathbf{N}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathbf{Q}_0^+(\omega) \to -i\Lambda^{-1}\frac{\mathbf{P}_\infty}{\omega} - \frac{\mathbf{N}}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right), \quad \omega \to \infty \tag{2.5}$$

Применяя к уравнению (2.2) фурье-преобразование по координате ξ, при учете соотношений (2.3) найдем

$$\Lambda\mathbf{Q}_0^+(\tau) + i\,\mathrm{sign}\,(\tau)\,\mathbf{Q}_1^+(\tau) = \mathbf{B}^-(\tau)$$

где τ — аффикс точки действительной оси комплексной плоскости ω, а $\mathbf{B}^-(\tau)$ — граничное значение аналитической в нижней полуплоскости ω вектор-функции $\mathbf{B}^-(\omega)$ — фурье-образа функции $\mathbf{b}(\xi)$. При помощи (2.4) это уравнение преобразуется к задаче сопряжения для кусочно-аналитической вектор-функции на действительной оси τ (E — единичная матрица)

$$(\Lambda + \mathrm{E}\,|\,\tau\,|)\,\mathbf{Q}_1^+(\tau) = -i\tau\mathbf{B}^-(\tau) + \mathbf{P}_\infty \tag{2.6}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение [10] матрицы Λ:

$$\det(\mathrm{E}\tau - \Lambda) = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) = 0 \tag{2.7}$$

Постоянные τ_1, τ_2 называются ее характеристическими числами, они легко вычисляются и удовлетворяют неравенствам (следующим из (1.12), 1.13)):

$$\tau_1\tau_2 = \det(\Lambda_{ij}) > 0, \quad \tau_1 + \tau_2 = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) > 0$$

которые, как можно показать, обеспечивают неравенство нулю определителя матрицы при вектор-функции $\mathbf{Q}_1^+$ в (2.6) при любых значениях τ.

Воспользовавшись этим свойством, представим матричный коэффициент при вектор-функции $\mathbf{Q}_1^+(\tau)$ в (2.6) в виде

$$\Lambda + \mathrm{E}\,|\,\tau\,| = [\mathrm{Z}^-(\tau)]^{-1}\,\mathrm{Z}^+(\tau) \tag{2.8}$$

где квадратные матрицы $\mathrm{Z}^+(\omega)$, $\mathrm{Z}^-(\omega)$ имеют своими компонентами функции, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях ω, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки.

Ниже будем полагать, что $\tau_1 \neq \tau_2$ (неравенство характеристических чисел). Можно показать, что матрицы:

$$\mathrm{Z}^+(\omega) = \mathrm{I}^+(\omega)\,(\Lambda + \omega\mathrm{E})^{1/2}, \quad [\mathrm{Z}^-(\omega)]^{-1} = (\Lambda + \omega\mathrm{E}]^{1/2}\mathrm{I}^-(\omega) \tag{2.9}$$

$$\mathrm{I}^\pm(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^\omega (\mathrm{E}\ln\tau - \ln\Lambda)\left((\tau\mathrm{E} \mp \Lambda)^{-1} - (\tau\mathrm{E} \pm \Lambda)^{-1}\right)d\tau\right\}$$

определенные во всей комплексной плоскости ω, разрезанной по отрицательной части действительной оси, обладают требуемыми свойствами.

При доказательстве этого факта существенно используются свойства аналитической функции от матричного аргумента [10]. Известно [10], что для любой аналитической функции $\vartheta(\zeta)$ и для любой квадратной матрицы A размером 2×2 с неравными характеристическими числами s_1, s_2 можно построить функцию $\vartheta(\mathrm{A})$ от матричного аргумента по правилу:

$$\vartheta(\mathrm{A}) = \frac{s_1\vartheta(s_2) - s_2\vartheta(s_1)}{s_1 - s_2}\,\mathrm{E} + \frac{\vartheta(s_1) - \vartheta(s_2)}{s_1 - s_2}\,\mathrm{A} \tag{2.10}$$

В частности, справедливы соотношения

$$\ln\Lambda = \frac{\tau_1\ln(\tau_2) - \tau_2\ln(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_2}\,\mathrm{E} + \frac{\ln(\tau_1) - \ln(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}\,\Lambda$$

$$(\tau\mathrm{E} \pm \Lambda)^{-1} = \pm\frac{(\tau_1 + \tau_2 \pm \tau)\,\mathrm{E} - \Lambda}{(\tau_1 \pm \tau)(\tau_2 \pm \tau)} \tag{2.11}$$

Матрицы-функции (2.9), факторизующие матричный коэффициент в уравнении (2.6), представляют собой обобщение факторизующих функций соответствующей одномерной задачи, рассмотренной в [3].

Воспользовавшись свойствами функций от матриц, можно получить также формулы обращения матриц в (2.9)

$$[Z^+(\omega)]^{-1} = (\Lambda + \omega E]^{-1/2}\, I^-(\omega), \quad Z^-(\omega) = I^+(\omega)\,(\Lambda + \omega E)^{-1/2} \tag{2.12}$$

Перепишем соотношение (2.6) при помощи матриц Z^+, Z^-, удовлетворяющих матричному уравнению (2.8), в виде

$$Z^+(\tau)\, Q_1^+(\tau) = Z^-(\tau)\,(\mathbf{P}_\infty - i\tau \mathbf{B}^-(\tau))$$

Левая часть этого равенства — граничное значение вектор-функции аналитической в верхней полуплоскости ω (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки), а правая — граничное значение вектор-функции, аналитической в нижней полуплоскости ω. Следовательно, согласно обобщенной теореме Лиувилля правая и левая части этого равенства представляют единую вектор-функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости ω, кроме бесконечно удаленной точки. Эта вектор-функция есть полином, степень которого определяется поведением левой (или правой) части на бесконечности. Учитывая асимптотические свойства матрицы-функции $Z(\omega)$:

$$Z^+(\omega) \to E\sqrt{\omega}\exp(-i\pi/4), \quad \omega \to \infty \tag{2.13}$$

и асимптотику (2.5), получим

$$Q_1^+(\omega) = [Z^+(\omega)]^{-1}\, \mathbf{C}_0 \tag{2.14}$$

Постоянный вектор $\mathbf{C}_0$ может быть выражен через неизвестный вектор $\mathbf{N}$ из условия совпадения асимптотик (2.5) и (2.14):

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{N}\sqrt{\pi} = \mathbf{K}/\sqrt{2}$$

Таким образом, с точностью до неизвестного постоянного вектора $\mathbf{K}$ получаем явное выражение вектор-функции $Q_1^+(\omega)$, и следовательно, согласно (2.4), вектор-функции $Q_0^+(\omega)$:

$$Q_1^+(\omega) = [Z^+(\omega)]^{-1}\,\mathbf{K}/\sqrt{2}, \quad Q_0^+(\omega) = i\omega^{-1}(Q_1(\omega) - \Lambda^{-1}\mathbf{P}_\infty) \tag{2.15}$$

Вектор-функции $\mathbf{f}_0(\xi)$, $\mathbf{f}_0'(\xi)$ восстанавливаются из соотношений (2.15) при помощи обратных преобразований Фурье (2.3):

$$\mathbf{f}_0(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_0^+(\omega)\, e^{-i\omega\xi}\, d\omega$$

Связь вектора внешних усилий $\mathbf{P}_\infty$ (1.11) и вектора коэффициентов интенсивности напряжений $\mathbf{K}$ (1.15) следует из условия отсутствия полюса у вектор-функции $Q_0^+(\omega)$ (2.15) в нуле. Поскольку из (2.12), (2.15) следует

$$[Z^+(0)]^{-1} = \Lambda^{-1/2}, \quad Q_1(0) = \Lambda^{-1/2}K/\sqrt{2}$$

получаем искомую формулу

$$\mathbf{K} = \sqrt{2}\Lambda^{-1/2}\mathbf{P}_\infty \tag{2.16}$$

причем матрица $\Lambda^{-1/2}$ выражается через E, Λ и характеристические числа τ_k согласно (2.10):

$$\Lambda^{-1/2} = \frac{\tau_1/\tau_1^{1/2} - \tau_2/\tau_1^{1/2}}{\tau_1 - \tau_2}\, E - \frac{1}{\sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2}}\,\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \tag{2.17}$$

Очевидно, что выражение (2.16) справедливо для тех значений p_∞, q_∞ которые дают неотрицательное значение коэффициента интенсивности напряжений $K_{\rm I}$

В окрестности кончика полубесконечной псевдомакротрещины действуют две асимптотики напряжений: ближняя (на расстояниях $r \ll \lambda^{-1}$) и дальняя (при $r \gg \lambda^{-1}$). Ближняя асимптотика напряженно-деформированного состояния совпадает с обычной, характерной для трещины в рассматриваемом анизотропном теле с коэффициентами интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$. Дальняя асимптотика совпадает с полем дислокации, обладающей компонентами вектора Бюргерса $\{a_{11}g(\infty) + a_{12}f(\infty), a_{21}g(\infty) + a_{22}f(\infty)\}$ (значения $f(\infty)$ и $g(\infty)$ определяются соотношениями (1.16)), помещенной в анизотропную среду. Напряжения при этом убывают по закону $\sim r^{-1}$.

В случае наличия плоскостей упругой симметрии нормальных координатным осям, недиагональные члены матриц a_{ij} и Λ_{ij} обращаются в в нуль и задача расщепляется на две независимые: нормальный отрыв и поперечный сдвиг. Для коэффициентов интенсивности напряжений в этом случае из (2.16, 2.17) получим

$$K_{\rm I} = p_\infty \sqrt{\frac{2}{\lambda_2}}, \quad K_{\rm II} = q_\infty \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}; \quad \lambda_2 = 2k_2 \operatorname{Re}\left(i\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right),$$

$$\lambda_1 = 2k_1 \operatorname{Re}\left(i\frac{p_1 - p_2}{\mu_2 - \mu_1}\right)$$

что совпадает с результатом, полученным ранее [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marshall D. B., Cox B. N., Evans A. G.* The mechanism of matrix cracking in brittle-matrix fibre composites. // Acta Met. 1985. V. 33. № 11. P. 2013—2022.
2. *Казьмин В. И., Милейко С. Т., Твардовский В. В.* Разрушение модельного композита с керамической матрицей. // Механика композитных материалов. 1988. No. 2. с. 206—220.
3. *Твардовский В. В.* К теории псевдомакротрещин в анизотропном теле. Ч. 1. Одиночная псевдомакротрещина. // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 120—128.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. *Шифрин Е. И.* Плоская трещина нормального разрыва, берега которой взаимодействуют по линейному закону. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 94—100.
6. *Tvardovsky V. V.* Further results on rectilinear line cracks and inclusions in anisotripic medium. // Teor. Appl. Fract. Mech. 1990. V. 13. P. 193—207.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 638 с.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1990