Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 539.375

П. И. Перлин, А. З. Штерншис

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается методика расчета коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в плоских задачах теории упругости для областей с угловыми точками. Случай, когда угловые точки достижимы из бесконечности контуром, расположенным вне области, исследован в [1].

При анализе прочности тела достаточно (в рамках модели хрупкого разрушения) располагать асимптотикой напряжений в окрестности нерегулярных точек границы. Разумеется, асимптотика может быть извлечена из решения краевой задачи в окрестности таких точек, но очевидно, что построение в этих областях достаточно достоверных решений сопряжено с вычислительными трудностями [2]. Поэтому важно определять асимптотику, минуя непосредственное решение краевой задачи.

Из общей теории краевых задач для уравнений эллиптического типа в областях с угловыми точками [3] известно, что в окрестности угловых точек решение (применительно к задачам теории упругости речь будет идти о смещениях) представимо в виде сумм бесконечнодифференцируемой функции и асимптотического ряда, каждое слагаемое которого — решение однородной краевой задачи для клина того же угла раствора, что и в угловой точке. Множители при них определяются конфигурацией области и краевыми условиями. Соответствующие решения для плоской задачи теории упругости были получены с использованием полярных координат [4] и на основе аппарата аналитических функций [5]. Таких решений счетное множество. В задачах, имеющих физическое содержание, исключаются решения, приводящие к неограниченной энергии. В задачах теории упругости наибольший интерес представляют решения, приводящие к неограниченным напряжениям (их не более двух, в зависимости от величины угла и вида краевых условий) и определяющим КИН $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$.

В задачах, когда краевые условия с разных сторон угловой точки имеют одинаковый вид, можно утверждать (если отсчет полярного угла производить от биссектрисы), что одно решение соответствует симметричному распределению напряжений (оно определяет коэффициент $K_{\rm I}$), а другое — антисимметричному (оно определяет коэффициент $K_{\rm II}$).

Пусть упругое тело занимает область D с границей S, имеющей хотя бы одну угловую точку, и пусть $2d$ — угол между полукасательными в одной из них (в которой требуется определить КИН). К контуру приложены напряжения $\mathbf{F}\,(q)$. Обозначим через $U\,(p)$ искомое решение (смещения $\mathbf{U}\,(p)$, напряжения $\sigma\,(p)$).

Расположим область D на плоскости комплексного переменного таким образом, чтобы угловая точка совпала с нулем и биссектриса угла — с положительной частью вещественной оси. Из вышеизложенного следует, что потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\varphi\,(z)$ и $\psi\,(z)$, соответствующие решению $U\,(p)$, в окрестности нуля будут иметь асимптотики

$$\varphi\,(z) \sim Cz^\lambda, \quad \psi\,(z) \sim ACz^\lambda \tag{1}$$

причем постоянные λ и A определятся из уравнений (для симметричного случая):

$$\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha = 0, \quad A = -\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha \tag{2}$$

Постоянная C выражается через коэффициент $K_{\rm I}$ и подлежит определению. Как отмечалось, необходимо иметь решение уравнения (2) в пределах $0 < \lambda < 1$. Допустим, что такое решение существует, и обозначим его через λ_1 и A_1.

Приведем формулы для асимптотик смещений и напряжений искомого решения $U(p)$ в полярных координатах

$$2\mu(U_r + iU_\theta) = C\rho^\lambda [\varkappa e^{i(\lambda-1)\theta} - \lambda e^{-i(\lambda-1)\theta} - Ae^{i(\lambda+1)\theta}]$$
$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4C\rho^{\lambda-1} \operatorname{Re} [\lambda e^{i(\lambda-1)\theta}] \qquad (3)$$
$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2C\rho^{\lambda-1} [\lambda(\lambda-1) e^{i(\lambda-1)\theta} + \lambda A e^{i(\lambda+1)\theta}]$$

Отметим, что постоянная $\varkappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $x = 3 - \nu/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния (ν — коэффициент Пуассона). Приведенные формулы устанавливают связь между постоянной C и коэффициентом K_I (K_I — множитель при компоненте σ_θ) при $\theta = 0$.

Для определения КИН предлагалось [6—8] использовать исключенные выше из рассмотрения решения с неограниченной энергией. Пусть требуется определить КИН для асимптотики с показателем λ_1. Из структуры уравнения (2) следует, что значение $-\lambda_1$ также будет решением; при этом изменится значение A (обозначим его через A_{-1}). Полученное решение представим в комплексной форме

$$\varphi_{-1}(z) = z^{-\lambda_1}, \quad \psi_{-1}(z) = A_{-1} z^{-\lambda_1} \qquad (4)$$

Обозначим через $U^*(p)$ какое-либо решение краевой задачи теории упругости для области D, имеющее асимптотику (4) (далее все относящиеся к этому решению величины будем снабжать звездочкой).

Для простоты рассуждений полагаем, что примыкающие к угловой точке участки контура — отрезки прямых произвольно малой длины. Проводится окружность достаточно малого радиуса ε с центром в нуле (попадающая на прямолинейные участки) и из области D исключаются точки, расположенные внутри окружности. К искомому решению $U(p)$ и введенному вспомогательному решению $U^*(p)$ в оставшейся области применимо тождество Сомильяны. Соответствующий интеграл по дуге окружности имеет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r u_r^* + \tau_{r\theta} u_\theta^* - \sigma_r^* u_r - \tau_{r\theta}^* u_\theta)\, r\, d\theta \qquad (5)$$

Представляем смещения и напряжения посредством асимптотик (1), (3) и (4). Интегралы от произведений асимптотик вычисляются в явном виде (каждое слагаемое — произведение тригонометрических функций). Оставшиеся интегралы имеют порядок малости ε, и поэтому, осуществляя в формуле Сомильяны предельный переход, приходим к требуемому равенству

$$CB = \int_S [\mathbf{U}^*(q)\, \mathbf{T}_n \mathbf{U}(q) - \mathbf{U}(q)\, \mathbf{T}_n \mathbf{U}^*(q)]\, ds \qquad (6)$$

где B — указанный интеграл (множитель C вынести за знак интеграла), $\mathbf{T}_n$ — оператор напряжений. Отметим, что $\mathbf{T}_n U(q) = F(q)$ — заданные краевые условия.

В работах [7, 8] использована формула вида (6). При этом за решение $U^*(q)$ принималось решение, выражаемое самими асимптотиками (4) (вообще говоря, в этих работах рассматривались смешанные задачи, что не приводит к расчленению на симметричную и несимметричную асимптотики). Из формулы (6) следует, что необходимо располагать смещениями для исходной краевой задачи. Поскольку смещения определяются с большей точностью, чем напряжения, то предложенный подход представляется более эффективным, чем извлечение КИН из поля напряжений в окрестности угловой точки.

Отметим, что использование асимптотики (4) оказывается возможным только в случае, если угловая точка достижима из бесконечности контуром, полностью расположенным вне области D. Дело в том, что функции вида z^{λ} (при нецелом λ) являются в полной плоскости неоднозначными, и для выбора однозначной ветви необходимо провести разрез, соединяющий нулевую точку с бесконечно удаленной.

Указанное ограничение можно снять, если использовать решение задачи теории упругости для внешности круговой луночки, имеющее в одной из угловых точек особенность требуемого вида. Такое решение было построено [1], и на основании формулы (6) получены решения некоторых задач. В указанной работе также отмечалось, что достаточно высокая точность достигается и при приближенном решении исходной краевой задачи (по крайней мере по сравнению с результатами [2]).

Предлагалось [6] выбирать решение $U^*(p)$ специальным образом, требуя выполнения равенства $T_n U^* = 0$ на границе. Тогда формула (6) упрощается и принимает вид

$$CB = \int_S \mathbf{U}^*(q)\,\mathbf{F}(q)\,ds \tag{7}$$

Для построения решения $U^*(p)$ нужно выбирать какое-либо частное решение $U^0(p)$, имеющее в угловой точке заданную особенность и строить компенсирующее решение U^{**} ($U^* = U^0 + U^{**}$). Авторы за частное решение выбирают решение (4), умноженное на срезку, т. е. бесконечно-дифференцируемую функцию $f(r)$, равную единице при $r < \varepsilon$ (ε — некоторое малое число) и равную нулю при $r > 2\varepsilon$. Тогда для построения компенсирующего решения необходимо решать неоднородную краевую задачу. Введение срезки снимает вопрос о достижимости угловой точки из бесконечности.

Изложенный метод использовался [1] для определения КИН, когда угловая точка достижима из бесконечности, что позволило не вводить срезку.

Ниже рассматриваются вопросы реализации методы [6] для случая, когда угловая точка не является достижимой из бесконечности, и за частное решение $U^0(p)$ принимается решение, предложенное В. М. Романчаком (см. сноску).

Выбираем какую-либо точку a, расположенную вне области, которую можно соединить с нулевой точкой (угловая точка) контуром, полностью расположенным вне D. Рассматривая этот контур как разрез в комплексной плоскости, образуем решение задачи теории упругости, определяемое однозначными функциями

$$\varphi^0(z) = z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1}, \quad \psi^0(z) = A_{-1} z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1} \tag{8}$$

Постоянные λ_1 и A_{-1} находятся по-прежнему из уравнения (2). Следует отметить, что уместно отказаться от трактовки (8) как решения для внешности луночки с вершинами в a и нуле и говорить о решении для плоскости с разрезом, соединяющим эти точки. Выбор точки a может быть доста-

[1] *Романчак В. М.* Анализ напряженного состояния в плоской упругой задаче для областей с угловыми точками на основе комплексной формулы Бетти.— Автореферат кандидатской диссертации. Минск, 1986. 17 с.

точно произвольным, однако ее расположение вблизи границы или нулевой точки должно повлечь затруднения вычислительного характера при построении компенсирующего решения.

На основании (8) определяем в точках границы компоненты вектора напряжений t_j^{**} для решения u^{**}. Таким образом, приходим ко второй основной краевой задаче теории упругости. Ее решение уместно осуществлять посредством сингулярного интегрального уравнения, получаемого на основе прямого подхода и имеющего вид [9]

$$u_i^{**}(q) + \int_S F_{ij}(q, q') u_j^{**}(q')\, ds_{q'} = \int_S G_{ij}(q, q') t_j^{**}(q')\, ds_{q'}, \qquad i, j = 1, 2$$

$$G_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\delta_{ij}\ln r - \frac{\xi_i\xi_j}{r^2}\right] \tag{9}$$

$$F_{ij}(q, q') = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2}\left\{(1-2\nu)(n_j\xi_i - n_j\xi_j) + \right.$$

$$\left. + \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \frac{2\xi_i\xi_j}{r^2}\right](\xi_k - n_k)\right\}$$

$$\xi_1 = x - x',\ \xi_2 = y - y',\ r = |q - q'|$$

(n_j — направляющие косинусы). Здесь приведены выражения ядер для случая плоской деформации.

Выбор уравнений (9) определяется тем, что искомой функцией являются смещения и поэтому нет нужды в дополнительных расчетах при обращении к формуле [7]. Уравнение (9) решается последовательными приближениями, причем для вычисления сингулярных интегралов с целью упрощения алгоритма осуществляется их преобразование к несобственным посредством регулярных представлений [10]. Алгоритм реализован в виде универсальной программы на языке Фортран при дискретном задании точек границы (разрез располагался на вещественной оси).

Для односвязных областей угловая точка всегда достижима из бесконечности, и поэтому целесообразно рассматривать предложенный прием для многосвязных областей. Задача для области, простирающейся в бесконечность, может быть исследована путем предельного перехода при наличии достаточно удаленного внешнего контура. При этом нужно следить за условиями справедливости тождества Сомильяны (обращение в нуль интеграла по внешнему контуру). Если главный вектор усилий, приложенных к внутренним контурам, равен нулю, то можно воспользоваться решением (8), а в общем случае необходимо обеспечить стремление к нулю на бесконечности вспомогательного решения U^0. Этого можно достигнуть различными способами, например перейдя к модификациям представления (8), используя соотношения

$$\varphi^0(z) = z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1} - 1,\quad \psi^0(z) = A_{-1}z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1} - A_{-1}$$

или

$$\varphi^0(z) = z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1-1},\quad \psi^0(z) = A_{-1}z^{-\lambda_1}(z-a)^{\lambda_1-1}$$

Определение КИН K_{II} требует введения несимметричной асимптотики. Для этого следует воспользоваться решением

$$\varphi^0(z) = iz^{-\lambda}(z-a)^{\lambda} - i,\quad \psi^0(z) = iAz^{-\lambda}(z-a)^{\lambda} - Ai \tag{10}$$

причем параметры λ и A будут получены из уравнений

$$\sin 2\lambda\alpha - \lambda\sin 2\alpha = 0,\ A = \cos 2\lambda\alpha - \lambda\cos 2\alpha \tag{11}$$

Остановимся на специфике вычисления интеграла (7). Смещения представляются в виде суммы двух смещений, одно из которых (U^0) задается в явном виде и стремится к бесконечности в нулевой точке, а другое (U^{**}) определяется в ходе решения интегрального уравнения и является всюду ограниченным. Поэтому целесообразно вычислять интегралы в (7) порознь для каждого слагаемого. Для смещения U^{**} можно использовать дискретизацию, введенную при решении интегрального уравнения. Для смещения U^0 следует вводить три зоны. В непосредственной близости к угловой точке вычисления нужно производить аналитически, пренебрегая изменением множителей при степенной функции. Далее идет зона, на которой вводится достаточно мелкая дискретизация. На остальном участке можно использовать дискретизацию, введенную при решении интегрального уравнения. Если интеграл вычислять сразу, то необходимо посредством интерполяции определять смещения в дополнительных точках контура.

Для иллюстрации эффективности предложенного алгоритма рассматривается задача для внешности квадрата. Полагается, что коэффициент Пуассона равен 0,3, а модуль упругости — единице. Диагональ квадрата равна 2 и располагается он так, что одна вершина в нуле, а противоположная — в точке — 2. Точка a располагается в —1. Расчеты проводились при плосконапряженном состоянии и при плоской деформации. Угол $2\alpha = 1{,}5\pi$ и, согласно (2), получаем: $\lambda_1 = 0{,}5445$, $A_1 = 0{,}8388$. Интеграл $B = 19{,}75$ для плоской деформации и 21,52 — для плосконапряженного состояния.

Первоначально рассматривались задачи, для которых КИН известны. Одно из таких решений определяется функциями

$$\varphi(z) = z^{\lambda_1}(z+1)^{-\lambda_1}, \quad \varphi(z) = Az^{\lambda_1}(z+1)^{-\lambda_1} \tag{12}$$

Тогда коэффициент $C = 1$. Расчеты правой части равенства (7) привели к значению $C = 0{,}9919$ для плоской деформации и $C = 1{,}0005$ — для плосконапряженного состояния. Были проведены также расчеты для задачи, когда КИН равен нулю. Такое решение определяется, например, функциями $\varphi(z) = 0$ и $\psi(z) = (z+1)^{-1}$. Для коэффициента C получены значения 0,0144, 0,0107 и 0,0092 соответственно при дискретизации контура на 216, 260 и 320 участков.

Кроме указанных модельных задач были проведены расчеты, когда к контуру была приложена гидростатическая нагрузка (величины 1), причем в одном случае нагрузка была задана на всем контуре, а в другом — на прилегающих к угловой точке сторонах. Получены следующие значения коэффициента K_1 : 0,648 (0,640) и 0,613 (0,590); в скобках приведены значения для плосконапряженного состояния.

Ниже приводятся значения компонент смещения U^* в точках двух сторон квадрата (в верхней полуплоскости) для плоской деформации и плосконапряженного состояния (в скобках)

x	—2,0	—1,8	—1,15	—1,05	—1,0	—0,95
y	0	0,2	0,85	0,95	1,0	0,95
$U_x{}^*$	—0,579	—0,708	—0,997	—1,119	—1,282	—1,350
	(—0,752)	(—0,891)	(—1,209)	(—1,343)	(—1,520)	(—1,597)
$U_y{}^*$	0	0,508	1,474	1,725	1,925	2,075
	(0)	(0,560)	(1,621)	(1,896)	(2,114)	(2,287)
x	—0,7	—0,5	—0,2	—0,05	—0,01	—0,0033
y	0,7	0,5	0,2	0,05	0,01	0,0033
$U_x{}^*$	—1,515	—1,711	—2,466	—4,753	—10,86	—19,45
	(—1,773)	(—1,958)	(—2,818)	(—5,331)	(—12,04)	(21,46)
$U_y{}^*$	2,827	3,589	6,589	14,61	35,40	64,46
	(3,108)	(4,046)	(7,243)	(16,06)	(38,90)	(70,84)

В точках нижней полуплоскости компонента $U_x{}^*$ сохраняет свое значение, а $U_y{}^*$ меняет знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заргарян С. С.* Вычисление коэффициентов асимптотики решений плоских задач теории упругости в окрестности угловых точек контура // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. Вып. 3. С. 77—89.
2. *Жур Д. С., Перлин П. И.* Об оценке точности решения задач теории упругости в окрестности нерегулярных точек границ // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1984. С. 120—125.
3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
4. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526—528.
5. *Каландия А. И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132—135.

6. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 2. С. 286—289.
7. *Stern M.* A boundary integral reprexentation for stress intensity factors // Proc. 10 Anniv. Meeting of Soc. of Eng. Sci: Raleign. N. C. 1973. P. 5—7.
8. *Stern M., Becker E. B., Dunham R. S.* A contour integral computation of mixed-made stress intensity factors // Intern. J. Fracture. 1976. V. 12. № 3. P. 359—368.
9. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
10. *Перлин П. И.* Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений основных пространственных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 109—111.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1990