

УДК 539.375

© 1991 г.

Р. В. Гольдштейн, Ю. В. Житников, Т. М. Морозова

## РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ РАЗРЕЗОВ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ НА НИХ ОБЛАСТЕЙ НАЛЕГАНИЯ И РАСКРЫТИЯ

В рамках плоской задачи теории упругости рассматривается равновесие системы прямолинейных разрезов при учете возможного образования областей налегания их поверхностей. В этом случае на части поверхности трещины задается скачок нормального смещения (в области контакта), а в области раскрытия — нормальные напряжения. Сдвиговое напряжение задается вдоль всей трещины.

Для решения задачи в рассматриваемой постановке не удается использовать известные интегральные уравнения (ИУ), полученные для трещин без областей налегания [1—3], так как в них предполагается задание нагрузок вдоль всей трещины, в то время как в областях контакта ее поверхностей нормальные напряжения неизвестны.

Для того чтобы преодолеть эту трудность, предлагается иной способ получения ИУ, описывающих распределение скачка смещения вдоль трещины. Используется возможность представления решения исходной задачи в виде суммы решений двух задач для исходной трещины: задачи о трещине с неизвестным сдвиговым скачком смещений при заданных вдоль нее сдвиговых нагрузках и задачи об отыскании областей раскрытия вдоль исходной трещины с неизвестным нормальным скачком смещения при заданных в этих областях нормальных нагрузках. Это позволяет получить систему ИУ, записанных соответственно по областям раскрытия и налегания, с разделенными правыми частями: в одном уравнении в правой части стоят известные нормальные напряжения, а в другом — сдвиговые. Из решения полученной системы находится распределение скачков смещений вдоль трещины и неизвестные границы областей раскрытия и налегания. Условием, определяющим положение областей раскрытия, является отсутствие сингулярности в распределении напряжений вблизи неизвестных границ этих областей [4]. Напряжения в областях контакта вычисляются по их интегральным представлениям через скачки смещений.

В качестве примера рассматривается задача о трещине в полуплоскости под действием сдвиговых и нормальных нагрузок.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в упругой плоскости в системе координат  $XOY$  систему  $N$  прямолинейных разрезов  $L_k$  длиной  $2l_k$ , вдоль которых могут возникать области налегания и раскрытия. Краевые условия на трещине  $L_k$  в локальной системе координат  $X_kOY_k$  (ось  $Y_k$  нормальна трещине  $|x_k| \leq l_k$ ) имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_k^0, & x_k \in D_k \subset L_k; & \quad \tau_k = \tau_k^0, & x_k \in L_k & \quad (1.1) \\ \nu^{(k)} &= 0, & x_k \in F_k \subset L_k & \end{aligned}$$

$F_k$  — область налегания поверхностей  $k$ -й трещины, а  $D_k$  — область раскрытия  $k$ -й трещины;  $\nu^{(k)} = \nu^{+(k)} - \nu^{-(k)}$  — скачок нормальной компоненты смещения,  $u^{(k)} = u^{+(k)} - u^{-(k)}$  — скачок сдвиговой компоненты смещения,  $\sigma_k^0, \tau_k^0$  — заданные нагрузки на трещине. Будем считать, что вне трещины нагрузки отсутствуют. Переход к краевым условиям на трещине осуществляется известным приемом Бюкнера, он использовался [4] применительно к задачам с областями налегания.

Для описания напряженно-деформированного состояния упругого тела с трещинами при краевых условиях (1.1) будем пользоваться интегральными представлениями, связывающими скачки смещения вдоль тре-

щины и напряжения на трещинах. Эти представления приведены, например, при составлении системы ИУ для трещин отрыва и имеют вид [1]

$$\pi P_n(x) = \int_{-l_n}^{l_n} \frac{g_n' dt}{t-x} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left( \int_{-l_k}^{l_k} g_k'(t) K_{nk}(t, x) + \overline{g_k'}(t) L_{nk}(t, x) \right) dt \quad (1.2)$$

$$\int_{-l_n}^{l_n} g_n'(t) dt = 0, \quad |x| \leq l_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

$$P_n(x) = \sigma_n^0 - i\tau_n^0, \quad g_k'(x) = v_k'(x) - u_k'(x)$$

$$u_k(x) = \frac{2\mu}{(\kappa+1)} u^{(k)}(x), \quad v_k(x) = \frac{2\mu}{(\kappa+1)} v^{(k)}(x)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига,  $\kappa = 3 - 4\nu$  — для плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  — для плоского напряженного состояния,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $u^{(k)}(x)$ ,  $v^{(k)}(x)$  — компоненты смещения на  $k$ -й трещине в локальной системе координат  $X_k Y_k$ . Это выражение получено при условии отсутствия скачка смещения на концах трещины (1.3). Ядра  $L_{nk}$  и  $K_{nk}$  регулярны, и для системы  $N$  трещин в плоскости их вид можно найти в [1]. Заметим, что представления (1.2) для  $N$  трещин сохраняют свой вид и структуру и для различных задач о равновесии  $N$  трещин не только в плоскости, но и в телах другой формы, меняется только выражение для регулярных ядер  $K_{nk}$  и  $L_{nk}$  [1]. Так, выражение для этих ядер в случае нагружения  $N$  трещин в полуплоскости, полосе, диске можно найти в [1].

Обратим внимание на одну полезную особенность представлений (1.2) при условии (1.3), которая может быть использована при вычислении напряжений вдоль любой прямой вне  $N$  трещин в телах различной формы, для которых известны ядра  $K_{nk}$ ,  $L_{nk}$ . Обычно это делается с использованием известных представлений Колосова — Мусхелишвили, что довольно трудоемко. Итак, пусть имеется  $N$  трещин в теле заданной геометрии и известны ядра  $K_{nk}$ ,  $L_{nk}$  (1.2) и необходимо найти распределения напряжений вдоль прямой с направлением  $\alpha$ , проходящей через точку  $(x^0, y^0)$ . Поместим вдоль этого направления  $(N+1)$ -ю трещину со скачком смещения  $g_{N+1} = 0$ , центр которой в точке  $(x^0, y^0)$ , а длина произвольна  $l_{N+1}$ . Тогда соотношения (1.2) дадут распределение напряжений  $P_{N+1}(x)$  вдоль этого направления в локальной системе координат  $X_{N+1} Y_{N+1}$ . Данная процедура позволяет вычислить напряжения, не обращаясь к формулам Колосова — Мусхелишвили, а используя непосредственно известные выражения для ядер  $K_{nk}$ ,  $L_{nk}$ .

Если же граничные условия заданы в напряжениях вдоль всей трещины (системы трещин), то представление (1.2) непосредственно приводит к сингулярным ИУ относительно производных скачка смещения неизвестных в этом случае вдоль всей трещины.

В рассматриваемом случае, когда возможно возникновение областей налегания, краевые условия заданы в зонах раскрытия трещины в напряжениях, а в зонах налегания — частично в смещениях, а частично в напряжениях. Неизвестными являются скачки смещений в областях раскрытия, контактное напряжение и скачок сдвиговой компоненты смещения в зонах налегания, а также граница зоны налегания. Для того чтобы в этом случае, исходя из (1.2), прийти к ИУ для неизвестных скачков смещения, ниже предлагается способ преобразования исходной задачи, при-

водящей к представлениям типа (1.2), записанным для неизвестных компонент скачков смещений через известные компоненты нагрузки для соответствующих областей.

**2. Вывод системы интегральных уравнений.** Будем сначала считать, что границы зон раскрытия заданы, и рассмотрим подход, связанный с получением представлений аналогичных (1.2), которые позволяют получить систему ИУ, описывающих скачки смещений на трещинах с областями налегания и раскрытия, соответствующих краевой задаче (1.1). Затем после получения такой системы дополним ее методикой отыскания неизвестных границ областей контакта и раскрытия.

Области раскрытия вдоль  $k$ -й трещины будем нумеровать  $1_k, 2_k, \dots, i_k$  слева ( $x_k = -l_k$ ) направо ( $x_k = l_k$ ) в локальной системе координат  $X_k Y_k$ . Следовательно, для  $k$ -й трещины имеется  $i_k$  областей раскрытия ( $i_k \geq 1$ ) (случай  $i_k = 0$  — отсутствие области раскрытия). Воспользуемся соотношениями (1.2) при условии (1.3). Эти соотношения определяют напряжения на трещинах в зависимости от скачков смещения. Для составления системы ИУ будем считать, что скачки смещений в областях раскрытия и налегания известны. Тогда напряжения на линии трещины, определяемые этими скачками смещений, могут быть вычислены по формулам (1.2). Действительно, записывая эти соотношения отдельно для сдвиговых и нормальных напряжений и переходя в локальные системы координат, связанные с центрами областей сдвига (это трещины  $L_n, n = 1, \dots, N$ ) и с центрами областей раскрытия, определим напряжения в этих областях через соответствующие скачки смещения.

Пусть скачку сдвиговых смещений вдоль разреза  $L_n$  отвечают напряжения  $\sigma_n^{(A)}(x), \tau_n^{(A)}(x), x \in L_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ), а скачку нормальной компоненты смещений — напряжения  $\sigma_n^{(B)}(x), \tau_n^{(B)}(x), x \in L_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Сумма этих напряжений в соответствующих областях должна быть равна приложенным нагрузкам

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(A)}(x) + \sigma_n^{(B)}(x) &= \sigma_n^{(0)}(x), \quad x \in D_n^{(j)} \quad (j = 1_n, \dots, i_n, \\ & \quad n = 1, \dots, N) \\ \tau_n^{(A)}(x) + \tau_n^{(B)}(x) &= \tau_n^{(0)}(x), \quad x \in L_n \quad (n = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе ИУ, записанных отдельно для сдвиговой и нормальной компонент нагрузок в соответствующих областях

$$\begin{aligned} & \int_{-l_n}^{l_n} \frac{u_n^{(0)} dt}{t-x} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-l_k}^{l_k} u_k^{(0)} \operatorname{Re}(K_{nk}^{(00)} - L_{nk}^{(00)}) dt - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{i_k} \int_{-l_k}^{l_k} v_k^{(j)} \operatorname{Im}(K_{nk}^{(0j)} + L_{nk}^{(0j)}) dt = \pi \tau_n^{(0)}, \quad |x| \leq l_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-l_n^{(j)}}^{l_n^{(j)}} \frac{v_n^{(j)} dt}{t-x} + \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} u_k^{(0)} \operatorname{Im}(K_{nk}^{(j0)} - L_{nk}^{(j0)}) dt + \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{f=1}^{i_k} \int_{-l_k}^{l_k} v_k^{(f)} \operatorname{Re}(K_{nk}^{(jf)} + L_{nk}^{(jf)}) dt = \pi \sigma_n^{(0j)}, \quad |x| \leq l_n^{(j)} \end{aligned}$$

$$\int_{-l_n}^{l_n} u_n^{(0)} dt = 0, \quad \int_{-l_n^{(j)}}^{l_n^{(j)}} v_n^{(j)} dt = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1_n \leq j \leq i_n$$

где  $l_n^{(j)}$  — длина областей раскрытия,  $(x_n^{0(j)}, y_n^{0(j)})$  — координаты центров областей раскрытия ( $j = 1_n, \dots, i_n; n = 1, \dots, N$ ).

Если на какой-то трещине нет областей налегания  $l_k^{(j)} = l_k$ , то система (2.1) совпадает с (1.2), полученной в [1], но записанной в разделенном по напряжениям виде. Заметим, что обозначение областей раскрытия всегда идет с двойным индексом: нижний указывает номер трещины, а верхний — номер области раскрытия. Область сдвига имеет верхний индекс нуль. Поэтому при использовании выражения для ядер  $K_{nk}, L_{nk}$  из [1] надо в случае области раскрытия вместо соответствующего индекса  $n$  или  $k$  поставить двойной ( $\dots n^j$  или  $\dots n^f$ ), например вместо  $K_{nk}$  имеем  $K_{nk}^{(jf)}$ , где  $n$  — номер трещины,  $j$  — номер области раскрытия на ней, а области сдвига — нуль ( $\dots n^0$  или  $\dots k^0$ ).

Полученная система ИУ может интерпретироваться как система уравнений, описывающая равновесие заданных  $N$  трещин со сдвиговым скачком смещений и  $\sum i_k$  по  $k$  от 1 до  $N$  трещин с нормальным скачком смещений, центры которых находятся в областях раскрытия  $(x_k^{0(j)}, y_k^{0(j)})$  и длины равны  $2l_k^{(j)}$ .

Таким образом получим систему уравнений, описывающую равновесие системы трещин с областями налегания и раскрытия, причем в левой части интеграл с ядром Коши берется по области, где заданы нагрузки, стоящие в правой части, что позволяет разрешить эту систему уравнений.

Как отмечалось выше, соотношение (1.2) при условии (1.3) сохраняет свой вид и в телах произвольной формы, меняется только вид ядер  $K_{nk}, L_{nk}$ , в частности для диска, полуплоскости, их вид можно найти в [1]. Поэтому система уравнений (2.1) будет описывать равновесие  $N$  трещин с областями налегания и раскрытия и в этом случае для соответствующих ядер  $K_{nk}, L_{nk}$ .

Система (2.1) в безразмерном виде аналогична обычной системе сингулярных ИУ для системы трещин с длинами, равными двум [1]. Численная реализация такой системы может быть произведена либо известным методом механических квадратур [1], либо путем регуляризации и сведения ее к системе ИУ Фредгольма [5].

Однако в случае наличия областей налегания на трещинах в систему (2.1) входят неизвестные границы областей налегания  $1_n \leq j \leq i_n, n = 1, \dots, N$ , поэтому необходимо указать еще метод их отыскания. Согласно результатам анализа [4], области налегания будут возникать там, где в противном случае, если не вводить области контакта, имел бы место перехлест поверхностей трещины. Поэтому в первом приближении за область раскрытия будем брать область, где этого перехлеста нет, и расширять ее до тех пор, пока коэффициент интенсивности на границе области раскрытия не станет равным нулю [4] с заданной точностью.

**3. Пример.** Рассмотрим трещину длины  $2l$ , центр которой находится на глубине  $H$  под поверхностью полуплоскости, и направленную под углом  $\alpha$  к этой поверхности. Систему координат  $XU$  расположим на границе полуплоскости (ось  $X$  направлена вдоль границы полуплоскости, ось  $U$  вглубь, через центр трещины).

Будем считать, что на трещине образуется только одна область раскрытия, длину которой обозначим  $2a$ . Для системы уравнений (1.2) ядра  $K_{nk}, L_{nk}$  в случае трещин раскрытия получены в [1]. Используя их выражение, запишем систему уравнений (2.1) в виде:

$$\int_{-a}^a \frac{v' dt}{t - x_1} + \int_{-a}^a v' \operatorname{Re} (K_{11}^{(11)} + L_{11}^{(11)}) dt + \int_{-l}^l u' \operatorname{Im} (K_{11}^{(10)} + L_{11}^{(10)}) dt = \pi \sigma_1^{(1)0}, \quad |x_1| \leq a \quad (3.1)$$

$$\int_{-l}^l \frac{u' dt}{t-x_1} + \int_{-l}^l u' \operatorname{Re} (K_{11}^{(00)} - L_{11}^{(00)}) dt - \int_{-a}^a v' \operatorname{Im} (K_{11}^{(01)} + L_{11}^{(01)}) dt = \pi \tau_1^{(0)}, \quad |x_1| \leq l$$

$$K_{11}^{(jf)} = (1 - \delta_{11}^{(jf)}) \frac{e^{i\alpha}}{2} \left( \frac{1}{T_1^{(j)} - X_1^{(f)}} + \frac{e^{-2i\alpha}}{\bar{T}_1^{(j)} - \bar{X}_1^{(f)}} \right) +$$

$$+ \frac{e^{i\alpha}}{2} \left\{ \frac{1}{X_1^{(j)} - \bar{T}_1^{(f)}} + \frac{e^{-2i\alpha}}{\bar{X}_1^{(j)} - T_1^{(f)}} + (\bar{T}_1^{(f)} - T_1^{(f)}) \left[ \frac{1 + e^{-2i\alpha}}{(\bar{X}_1^{(j)} - T_1^{(f)})^2} - \frac{2e^{-2i\alpha} (X_1^{(j)} - T_1^{(f)})}{(\bar{X}_1^{(j)} - T_1^{(f)})^3} \right] \right\}$$

$$L_{11}^{(jf)} = (1 - \delta_{11}^{(jf)}) \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{T}_1^{(f)} - X_1^{(j)}} + \frac{T_1^{(f)} - X_1^{(j)}}{(T_1^{(f)} - \bar{X}_1^{(j)})^2} e^{-2i\alpha} \right] +$$

$$+ \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[ \frac{T_1^{(f)} - \bar{T}_1^{(f)}}{(X_1^{(j)} - \bar{T}_1^{(f)})^2} + \frac{1}{\bar{X}_1^{(j)} - T_1^{(f)}} - e^{-2i\alpha} \frac{X_1^{(j)} - T_1^{(f)}}{(X_1^{(j)} - T_1^{(f)})^2} \right]$$

$$i, j = 0, 1; \quad \delta_{11}^{(jf)} = 1, \quad j = f; \quad 0, \quad j \neq f; \quad \delta_{11}^{(jf)} = 0, \quad X_1^{(0)} = x_1 e^{i\alpha} - iH$$

$$T_1^{(0)} = t e^{i\alpha} - iH, \quad X_1^{(1)} = (x_1 \mp d) e^{i\alpha} - iH; \quad T_1^{(1)} = (t \mp d) e^{i\alpha} - iH$$

Здесь  $d$  — расстояние от центра трещины до центра области раскрытия (знак минус, если координата центра области раскрытия в локальной системе координат  $X_1 O Y_1$ ,  $x_1^{(1)0} > 0$ , и плюс, если  $x_1^{(1)0} < 0$ ).

Наиболее просто система (3.1) выглядит в случае трещины, параллельной границе полуплоскости ( $\alpha = 0$ ). В безразмерном виде система (3.1) переписывается при  $\alpha = 0$  следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \frac{v' dt}{t-\xi} \int_{-1}^1 v' dt \left[ \frac{\xi-t}{D} - 4H_1^2 (\xi-t) \left[ \frac{(\xi-t)^2 - 12H_1^2}{D^3} + \frac{8H_1^2}{D^2} \right] \right] +$$

$$+ \int_{-1}^1 \frac{u' 8H_2^3 ((a\xi/l - t \mp \Delta_1)^2 - 4H_2^2) dt}{D_1^3} = \pi \sigma_1^{(1)0} \quad (3.2)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u' dt}{t-\xi} + \int_{-1}^1 u' dt \left[ \frac{\xi-t}{D_2} - 4H_2^2 \frac{(\xi-t)}{D_2^3} [(\xi-t)^2 - 12H_2^2] - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^1 v' dt \frac{8H_1^3 (3\xi l/a - t \pm \Delta_2)^2 - 4H_1^2}{D_3^3} \right] dt = \pi \tau_1^0, \quad |\xi| \leq l$$

$$H_1 = H/a, \quad H_2 = H/l, \quad D = (\xi-t)^2 + 4H_1^2$$

$$D_1 = (a\xi/l - t \mp \Delta_1)^2 + 4H_2^2, \quad \Delta_1 = d/l$$

$$D_2 = (\xi-t)^2 + 4H_2^2$$

$$D_3 = (\xi l/a - t \pm \Delta_2)^2 + 4H_1^2, \quad \Delta_2 = d/a$$

Система (3.2) в случае отсутствия области контакта совпадает с полученной ранее [1-3].

Видно, что решение для трещины, параллельной границе под действием только сдвигового напряжения  $\tau_1^0 = -\tau$ ,  $\sigma_1^{(1)0} = 0$ , антисимметрично относительно центра трещины и, следовательно,  $K_1^+$  (соответствует  $x_1 = l$ ) и  $K_1^-$  (соответствует  $x_1 = -l$ ) будут противоположного знака. Согласно известным результатам [1-3]  $K_1^- < 0$ , что соответствует  $v(x_1) < 0$  при  $x_1 \geq -l$  и перехлесту поверхностей трещины. Следовательно, вблизи конца  $x_1 = -l$  будет возникать область контакта, размер которой  $2a$  найдем по алгоритму, изложенному в конце разд. 2, из условия отсутствия сингулярности в решении вблизи этой границы. При этом в (3.2) следует взять нижний знак в подынтегральных выражениях.

Рассмотрим сначала асимптотику системы (3.2) при  $H \rightarrow \infty$ ,  $l = \text{const}$  и при нагружении  $\tau_1^0 = -\tau$ ,  $\sigma_1^{(1)0} = 0$ . В первом приближении по  $l/H$  скачок сдвигового смещения равен  $u(x_1) = \tau (1 - x_1^2/l^2)^{1/2}$ . Тогда скачок нормального смещения определится из второго уравнения (3.2), в первом приближении по  $l/H$ , решение которого имеет вид

$$v'(\xi) = \frac{3\pi\tau l^5}{256H^5} [4b^3 (\xi^4 - 1/2\xi^2 - 1/8) + 12b^2\Delta_1 (\xi^2 - 1/2)\xi + 12b\Delta_1^2 (\xi^2 - 1/2) +$$

$$+ 4\Delta_1^3\xi + 3b (\xi^2 - 1/2) + 3\Delta_1\xi] / (1 - \xi^2)^{1/2} \quad (3.3)$$

$$b = a/l, \quad \Delta_1 = 1 - b, \quad \xi = x_1/a, \quad |x_1| \leq a, \quad |\xi| \leq 1$$

Определяя неизвестную границу зоны налегания из условия отсутствия сингулярности при  $\xi = -1$ , приходим к уравнению  $f(b) \equiv 35b^3 - 60b^2 + 45b - 14 = 0$ . Имеем  $f(0) = -14$ ,  $f(\infty) > 0$ , следовательно, существует хотя бы один действительный корень. Убеждаясь, что  $f'(b) > 0$ ,  $0 \leq b \leq \infty$ , приходим к выводу, что имеется только один действительный корень, который равен  $b \simeq 0,69$ ,  $a = 0,69l$ .

Таким образом, получили, что в первом приближении область раскрытия не зависит от глубины  $H$  и величины сдвигового напряжения  $\tau$ . Согласно (3.3), при  $H \rightarrow \infty$  величина раскрытия трещины в каждой точке области раскрытия стремится к нулю как  $l^5/H^5$ , а величина области раскрытия не изменяется и равна  $a = 0,69l$ . В пределе при  $H = \infty$  раскрытие отсутствует, а решение совпадает с решением задачи о трещине сдвига в бесконечной плоскости.

Заметим, что аналогичный результат получен для трещины вдоль окружности радиуса  $R$  и трещины в виде пояса на цилиндрической поверхности радиуса  $R$  при сдвиговом нагружении [7, 8]. В этом случае при нагружении трещины сдвиговым напряжением также возникает область раскрытия, длина которой при  $R \rightarrow \infty$  не зависит от  $R$  и конечна, а величина раскрытия поверхностей трещины стремится к нулю.

Система (3.2) решалась численно методом механических квадратур при некоторых параметрах  $\tau_1^0 = -\tau$ ,  $\sigma_1^{(1)0} = \sigma$  и  $H/l$  (в (3.2), напомним, берется в выражениях нижний знак). Длину области раскрытия  $2a$  ищем последовательным приближением по алгоритму разд. 2.

На фигуре представлена зависимость от  $H/l$  коэффициентов интенсивности напряжений при  $\sigma = 0$ :  $K_1^+ / (\tau \sqrt{l})$  — кривая 1,  $K_2 / (\tau \sqrt{l})$  — кривая 2,  $K_2^- / (\tau \sqrt{l})$  — кривая 3; знак плюс соответствует концу трещины  $x_1 = l$ , а минус —  $x_1 = -l$ ; точками отмечены результаты вычисления  $K_1^+ / (\tau \sqrt{l})$  без учета области налегания. Из этих зависимостей следует, что коэффициент интенсивности  $K_1^+$  становится больше, чем аналогичный, вычисленный без учета области налегания. Представлено также изменение длины области раскрытия  $2a$  в этом случае в зависимости от  $H/l$ .

При  $H/l = 0,6; 1; 5$  вычислено отношение  $\sigma/\tau$ , при котором трещина либо полностью открыта ( $\sigma_t$ ), либо полностью закрыта ( $\sigma_c$ ):  $\sigma_t/\tau = 0,13; 0,088; 0,002$ ,  $\sigma_c/\tau = -0,29; -0,19; -0,005$ .

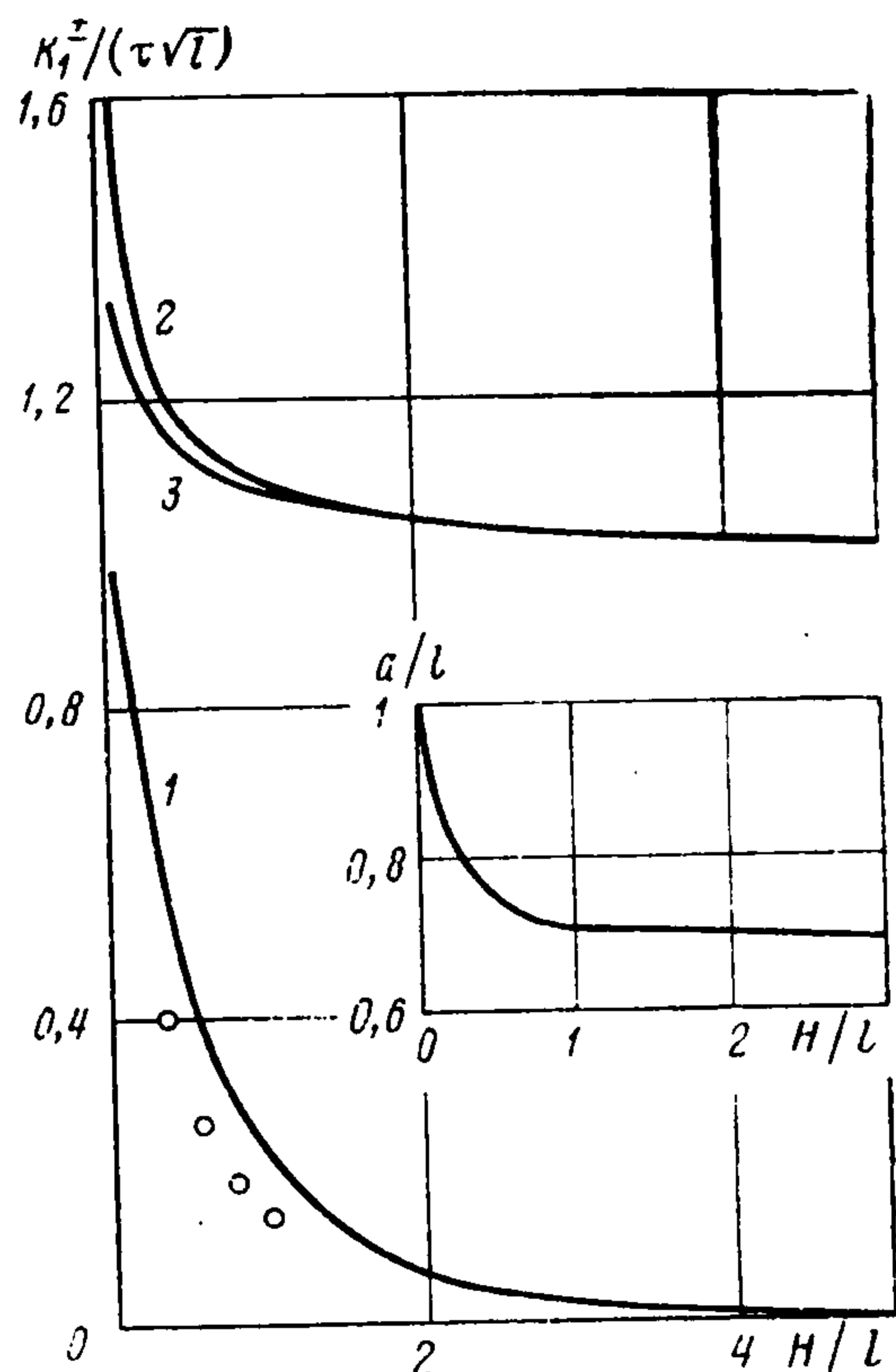
Соответственно рассчитано также изменение длины области раскрытия  $2a$  и коэффициентов интенсивности при  $H/l = 0,6$  в зависимости от  $\sigma/\tau$ :

$\sigma/\tau$	-0,29	-0,20	-0,12	0,00	0,06	0,13
$a/l$	0,00	0,42	0,55	0,73	0,83	1,048
$K_2^+ / (\tau \sqrt{l})$	1,111	1,112	1,116	1,139	1,148	1,177
$K_2^- / (\tau \sqrt{l})$	1,111	1,109	1,060	1,090	1,075	1,048
$K_1^+ / (\tau \sqrt{l})$	0,000	0,116	0,207	0,506	0,444	0,534

Из этих результатов следует, что при  $\sigma \leq \sigma_c < 0$  имеем  $K_1^\pm = 0$ , а при  $\sigma_c < \sigma < \sigma_t$  будет  $K_1^- = 0$  и предельное равновесие трещины в этом случае определяется коэффициентом интенсивности  $K_2^\pm$  при  $\sigma \leq \sigma_c < 0$  и  $K_2^\pm$ ,  $K_1^+$  при  $\sigma_t < \sigma$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
2. Erdogan F., Arin K. A half plan and a strip with an arbitrary located crack. // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. N 2. P. 191—204.
3. Ashbaugh N. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. N 2. P. 205—218.



4. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Численно-аналитический метод решения пространственных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. Ч. 1. № 4. С. 75—85.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
6. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826—834.
7. *Житников Ю. В., Тулинов Б. М.* Равновесие разреза по дуге окружности при неоднородном взаимодействии берегов // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 874—880.
8. *Корельштейн Л. Б.* Численно-аналитическое решение осесимметричных задач о трещинах по цилиндрической поверхности // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 119—127.

Москва

Поступила в редакцию  
6.XII.1990