

УДК 539.3

© 1991 г.

Ю. А. Антипов, Н. Г. Моисеев

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ, ПЕРЕСЕКАЮЩИМ ЛИНИЮ РАЗДЕЛА СРЕД

Получено точное замкнутое решение задачи о концентрации напряжений в составной упругой плоскости возле прямолинейного разреза, ортогонального линии раздела сред и делящегося ею пополам. Построение решения основано на схеме [1] факторизации матричного коэффициента специального вида задачи Римана, к которой приводится система сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью, соответствующая рассматриваемой задаче теории упругости. Матричный коэффициент задачи Римана не удовлетворяет ограничениям работы [2], а значит, следование методу этой работы приведет к появлению существенной особенности на бесконечности у факторизующих матриц. Использование схемы [1], основанной на аппарате краевых задач Римана, на римановых поверхностях алгебраических функций [3], позволило нейтрализовать (путем обращения соответствующего абелева интеграла) существенно особую точку на бесконечности.

Решение сформулированной задачи получено в квадратурах в форме, удобной для численной реализации. Приведены расчетные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений. Рассмотрен численный пример.

1. Постановка задачи и приведение ее к векторной задаче Римана.

Пусть E_1, ν_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона полуплоскости $\Pi_- = \{x < 0, |y| < \infty\}$, а E_2, ν_2 — соответствующие коэффициенты полуплоскости $\Pi_+ = \{x > 0, |y| < \infty\}$. Области Π_+, Π_- полностью сцеплены ($|y| < \infty$):

$$\|u, v, \sigma_x, \tau_{xy}\|_{x=-0} = \|u, v, \sigma_x, \tau_{xy}\|_{x=+0} \quad (1.1)$$

На линии $y = 0$ имеется разрез $I = \{|x| < \varepsilon, y = \pm 0\}$, к берегам которого приложена нормальная нагрузка $-p(x)$:

$$\sigma_y|_{y=\pm 0} = -p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=\pm 0} = 0 \quad (|x| < \varepsilon) \quad (1.2)$$

Рассматривается плоское напряженное состояние. Требуется найти коэффициенты интенсивности напряжений.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = E(x) \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=-0} - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=+0} \right], \quad E(x) = \begin{cases} E_1, & x < 0 \\ E_2, & x > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

При помощи обобщенной схемы метода интегральных преобразований [4] задача (1.1)–(1.3) сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью в точке пересечения разреза и линии раздела сред

$$\int_0^1 J_+(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^1 S_-(x, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi = p_1(x) \quad (1.4)$$

$$\int_0^1 S_+(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^1 J_-(x, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi = p_2(x) \quad (0 < x < 1)$$

относительно функций $\varphi_1(x) = \varphi(\varepsilon x)$, $\varphi_2(x) = -\varphi(-\varepsilon x)$, причем

$$J_{\pm}(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\xi - x} + \frac{p_1^{\pm} \xi^2 + p_2^{\pm} \xi x + p_3^{\pm} x^2}{(\xi + x)^3} \right]$$

$$S_{\pm}(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{q_1^{\pm} \xi + q_2^{\pm} x}{(\xi + x)^2}, \quad p_j(x) = -4p((-1)^{j-1} \varepsilon x)$$

$$p_1^{\pm} = \delta_0^{-1} [\pm v_0 (\pm v_0 - 2\mu^{\pm} - 6\mu^{\mp}) - 3(1 - \mu)^2]$$

$$p_2^{\pm} = 4\delta_0^{-1} [\pm v_0 (\mp v_0 + 2\mu^{\pm}) \pm 3(1 - \mu^2)]$$

$$p_3^{\pm} = \delta_0^{-1} [-(v_0 + \mu - 1)^2 \pm 4(1 - \mu^2)]$$

$$q_1^{\pm} = 8\delta_0^{-1} \mu^{\mp} (\pm v_0 + 2\mu^{\mp}), \quad q_2^{\pm} = 8\delta_0^{-1} \mu^{\mp} (1 + \mu)$$

$$\delta_0 = (1 + 3\mu + v_0)(3 + \mu - v_0), \quad v_0 = v_1 - \mu v_2, \quad \mu^+ = 1,$$

$$\mu^- = \mu = E_1 E_2^{-1}$$

Решение системы (1.4) ищется в классе гельдеровских на отрезке $(0, 1)$ функций, допускающих интегрируемые особенности на концах и удовлетворяющих условию замкнутости разреза

$$\mu \int_0^1 \varphi_1(\xi) d\xi - \int_0^1 \varphi_2(\xi) d\xi = 0 \quad (1.5)$$

Доопределяем систему (1.4) на полубесконечный отрезок при помощи функций

$$\varphi_{j+}(x) = -4\sigma_j((-1)^{j-1} \varepsilon x, 0) \quad (j = 1, 2)$$

и вводим в рассмотрение функции

$$\Phi_j(s) = \int_0^1 \varphi_j(\xi) \xi^s d\xi, \quad \Phi_{j+}(s) = \int_1^{\infty} \varphi_{j+}(\xi) \xi^s d\xi$$

$$P_j^-(s) = \int_0^1 p_j(x) x^s dx$$

Функции $\Phi_j^-(s)$ и $P_j^-(s)$ аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Re} s > -\delta$ ($0 < \delta < 1$) и $\operatorname{Re} s > -1$ соответственно, а $\Phi_j^+(s)$ — при $\operatorname{Re} s < 0$. Пусть $L = L_{\gamma}^- \cup C_{\gamma} \cup L_{\gamma}^+$, $L_{\gamma}^{\pm} = \{t \in C: \operatorname{Re} t = 0, \operatorname{Im} t \geq |\gamma|\}$, $-\delta < \gamma < 0$, $C_{\gamma} = \{t \in C: |t| = |\gamma|, \operatorname{Re} t < 0\}$. Контур L делит плоскость комплексного переменного C на две области D^+ и $D^- (\ni 0)$. Положительное направление на L выбираем так, чтобы при обходе контура область D^+ оставалась слева. Очевидно, вектор

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \Phi_1^{\pm}(s) \\ \Phi_2^{\pm}(s) \end{pmatrix}, \quad s \in D^{\pm}$$

является кусочно-аналитическим с линией скачков L .

Применим к системе (1.4) преобразование Меллина. В результате приходим к векторной задаче Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g^-(t), \quad t \in L \quad (1.6)$$

$$G(s) = b(s)I + c(s)A(s)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} l(s) & m_-(s) \\ m_+(s) & -l(s) \end{pmatrix}, \quad g^-(t) = - \begin{pmatrix} P_1^-(t) \\ P_2^-(t) \end{pmatrix}$$

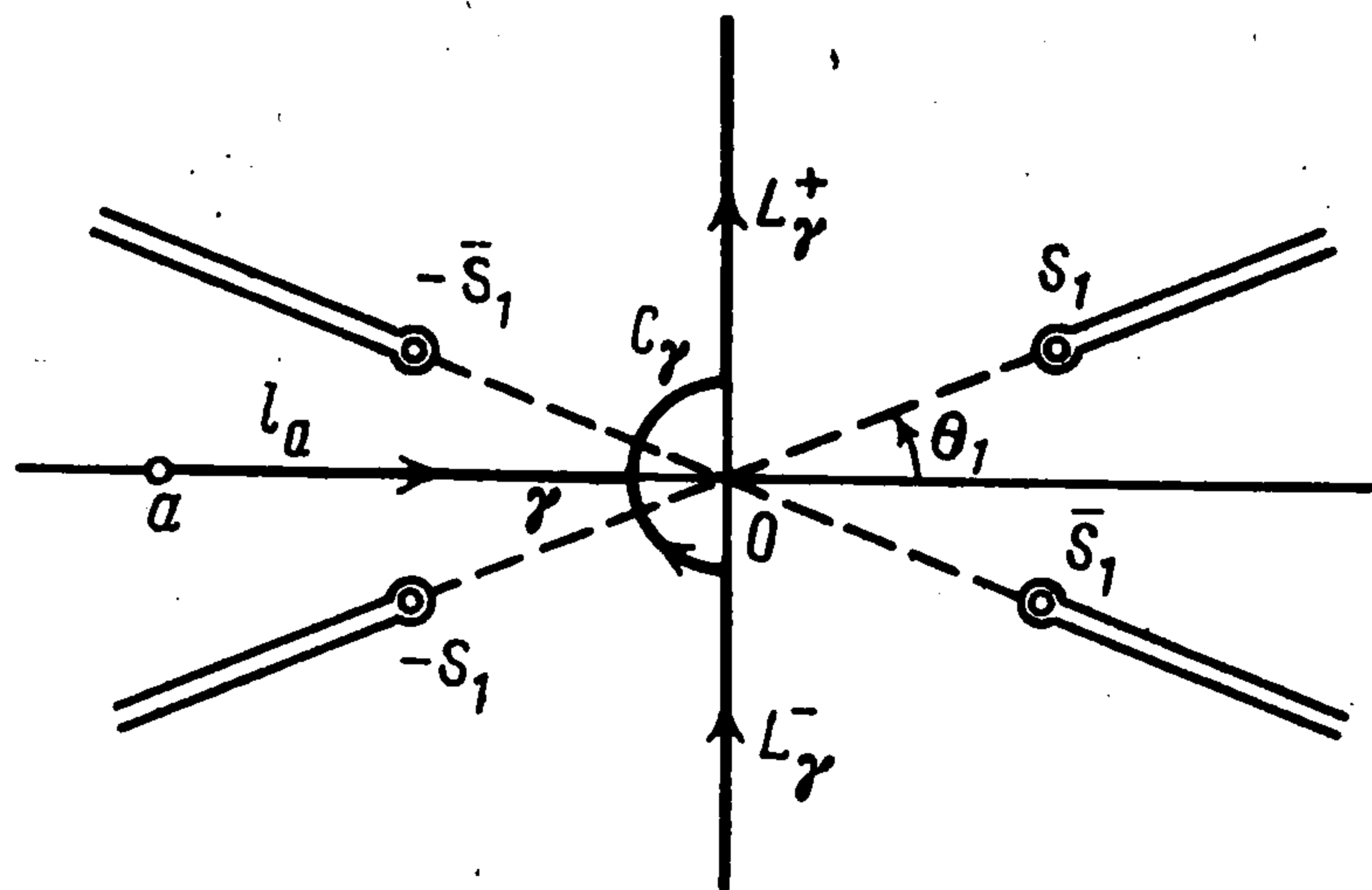
$$b(s) = \operatorname{ctg} \pi s + (r_0 + r_1 s^2) \operatorname{cosec} \pi s, \quad c(s) = \operatorname{cosec} \pi s$$

$$l(s) = -r_2 + r_3 s^2, \quad m_{\pm}(s) = -q_2^{\pm} + q_3^{\pm} s$$

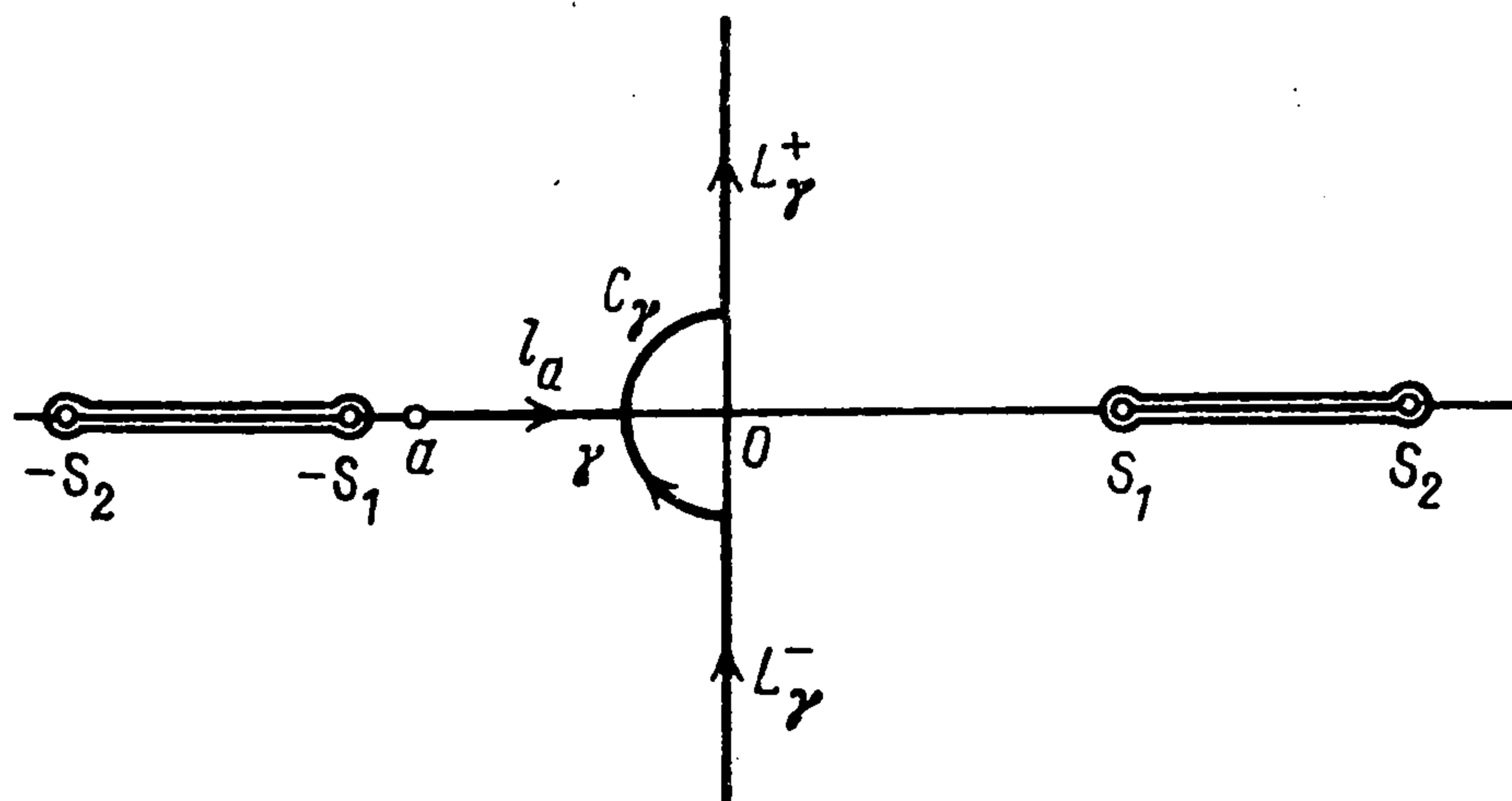
$$r_0 = \delta_0^{-1} (v_0 + \mu - 1)^2, \quad r_1 = 2\delta_0^{-1} [(1 - \mu)^2 - v_0^2], \quad r_2 =$$

$$= 4\delta_0^{-1} (1 - \mu^2)$$

$$r_3 = 4\delta_0^{-1} (1 + \mu)(v_0 + 1 - \mu), \quad q_3^{\pm} = \pm 8\delta_0^{-1} \mu^{\mp} (v_0 + \mu - 1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Исследование матрицы $G(s)$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(s) = l^2(s) + m_+(s) m_-(s) = a_0 s^4 - a_1 s^2 + a_2$$

$$a_0 = 16\delta_0^{-2} (1 + \mu)^2 (v_0 + 1 - \mu)^2, \quad a_2 = 16\delta_0^{-2} (1 + \mu)^4$$

$$a_1 = 32\delta_0^{-2} [2\mu (v_0 + \mu - 1)^2 + (1 - \mu)(1 + \mu)^2 (v_0 + 1 - \mu)]$$

Очевидно, $a_0, a_2 > 0$. Легко доказывается, что для любых $\mu > 0$ и $0 < v_j < 1/2$ ($j = 1, 2$) $a_1 > 0$. Пусть

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2, \quad v_- = \{1 - v_2 + [(1 - v_2)^2 + 4v_1]^{1/2}\} / 2$$

$$v_+ = \{v_1 - 1 + [(v_1 - 1)^2 + 4v_2]^{1/2}\} (2v_2)^{-1} \quad (v_- \leq v_+)$$

Тогда, если $0 < \mu < v_-$ или $\mu > v_+$, то $D < 0$ и $f(s)$ имеет четыре комплексно-сопряженных корня: $\pm s_1, \pm \bar{s}_1$, причем

$$|s_1| = (a_2/a_0)^{1/4}, \quad \arg s_1 = 1/2 \arctg(|D|^{1/2} a_1^{-1}) \in (0, \pi/2)$$

Если $v_- < \mu < v_+$, то $D > 0$ и корни $f(s)$ вещественны и различны: $\pm s_1, \pm s_2$, причем

$$s_1 = [(a_1 - D^{1/2}) (2a_0)^{-1}]^{1/2}, \quad s_2 = [(a_1 + D^{1/2}) (2a_0)^{-1}]^{1/2}$$

И, наконец, в двух исключительных случаях $\mu = v_{\pm}$ имеем $D = 0$, и корни кратные: $\pm s_1, \pm s_1$, причем

$$s_1 = [a_1 (2a_0)^{-1}]^{1/2}$$

Рассмотрим сначала случай $D \neq 0$. Пусть

$$\lambda_1(s) = b(s) + c(s) f^{1/2}(s), \quad \lambda_2(s) = b(s) - c(s) f^{1/2}(s) \quad (2.1)$$

($\lambda_{1,2}$ — характеристические функции матрицы $G(s)$ [2]). Для фиксации ветви $f^{1/2}(s)$ в случае $D < 0$ проведем разрез (фиг. 1), соединяющий точки ветвления $\pm s_1, \pm \bar{s}_1$ и проходящий через точку $s = \infty$ и потребуем, чтобы ($\theta_1 = \arg s_1$):

$$\begin{aligned} -2\pi + \theta_1 < \arg(s - s_1) < \theta_1, & \quad -\pi - \theta_1 < \arg(s + \bar{s}_1) < \pi - \theta_1 \\ -\pi + \theta_1 < \arg(s + s_1) < \pi + \theta_1, & \quad -\theta_1 < \arg(s - \bar{s}_1) < 2\pi - \theta_1 \end{aligned}$$

Тогда, в частности, $f^{1/2}(t) > 0$, $f^{1/2}(it) > 0$. В случае $D > 0$ разрезы проведем, соединив точки s_1 и s_2 , $-s_1$ и $-s_2$ (фиг. 2) и потребуем, чтобы $-\pi < \arg(s \pm s_j) < \pi$ ($j = 1, 2$). Выбранная ветвь обладает следующими свойствами: $f^{1/2}(t) > 0$ ($-s_1 < t < s_1$) и $f^{1/2}(it) > 0$ ($-\infty < t < \infty$).

Анализ поведения характеристических функций в нуле и на бесконечности приводит к следующим результатам:

$$1) \lambda_j(-0 + i\tau) \sim \mp i, \tau \rightarrow \pm\infty \quad (j = 1, 2)$$

$$2) \lambda_1(\gamma) \sim \eta_1(\pi\gamma)^{-1}, \lambda_2(\gamma) \sim -\eta_2\gamma\pi^{-1}, \gamma \rightarrow -0$$

$$\eta_1 = 8\delta_0^{-1}(1 + \mu)^2, \eta_2 = \pi^2/2 - r_1 - a_1(2a_2^{1/2})^{-1}, \eta_j > 0$$

$$3) \operatorname{Im} \lambda_j(t) \leq 0, t \in L_\gamma^\pm \quad (j = 1, 2)$$

Отсюда $[\arg \lambda_1(t)]|_L = \pi$, $[\arg \lambda_2(t)]|_L = -\pi$ и поэтому, так же, как и в [5]:

$$\kappa_\Delta = \operatorname{ind} \{\lambda_1(t) \lambda_2(t)\} = 0, \kappa_\varepsilon = \operatorname{ind} \{\lambda_1(t) [\lambda_2(t)]^{-1}\} = 1$$

Выберем ветви логарифмов характеристических функций

$$-\pi/2 \leq \arg \lambda_j(t) \leq 3\pi/2, t \in L$$

Тогда если обозначить $\theta^{(j)}(t) = \arg \lambda_j(t)$, то ($j = 1, 2$):

$$\theta^{(j)}(t)|_{t \in L_\gamma^-} = \pi/2, \theta^{(j)}(t)|_{t \in L_\gamma^+} = 3\pi/2 - 2\pi\delta_{j,2}, \theta^{(j)}(t)|_{t=\gamma} = \pi\delta_{j,1} \quad (2.2)$$

Таким образом, зафиксирована ветвь показателя $\varepsilon(t)$ матрицы $G(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \right| + \frac{i}{2} \theta_\varepsilon(t), \quad \theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in L_\gamma^- \\ 2\pi, & t \in L_\gamma^+ \end{cases}$$

$$0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 2\pi, t \in C_\gamma$$

Для того чтобы осуществить факторизацию методом [2], нужно, чтобы

$$E = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varepsilon(t)}{f^{1/2}(t)} dt = 0$$

в рассматриваемом же случае

$$E = g + ie \neq 0$$

$$g = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \frac{\lambda_1(i\tau)}{\lambda_2(i\tau)} \frac{d\tau}{f^{1/2}(i\tau)} > 0, \quad e = \int_0^\infty \frac{d\tau}{f^{1/2}(i\tau)} > 0 \quad (\gamma = 0)$$

Построим факторизующие матрицы методом [1] при помощи краевой задачи Римана на римановой поверхности.

3. Факторизация матрицы $G(s)$. Возьмем два экземпляра C_1, C_2 расширенной комплексной s -плоскости $C \cup \{\infty\}$ с одинаково ориентированными разрезами (фиг. 1, 2) и склеим положительные берега разрезов первого экземпляра C_1 с отрицательными берегами разрезов второго экземпляра и отрицательные берега C_1 с положительными берегами C_2 . Получится двулистная риманова поверхность R (ее род — единица) [6]. Функция $w(s)$, определенная уравнением $w^2 = f(s)$, однозначна на R , причем $w = f^{1/2}(s)$, $s \in C_1$, $w = -f^{1/2}(s)$, $s \in C_2$. Следуя [3] точку поверхности R с аффиксом $s = \alpha$ на листе C_1 будем обозначать парой $(\alpha, f^{1/2}(\alpha))$, на листе C_2 — парой $(\alpha, -f^{1/2}(\alpha))$. Пара (s, w) однозначно определяет точку поверхности R . Через ξ будем обозначать аналогичную w функцию, удовлетворяющую уравнению $\xi^2 = f(t)$. На каждом из листов C_1 и C_2 проведем контур соответственно L_1 и L_2 , совпадающий с L поточечно и по направлению обхода. Контур Γ поверхности R определим следующим образом: $\Gamma = L_1 \cup L_2$.

Представим матрицу $G(s)$ в виде

$$G(s) = \operatorname{ctg} \pi s G_0(s), \quad \operatorname{ctg} \pi s = K^+(s) [K^-(s)]^{-1} \quad (3.1)$$

$$K^+(s) = -\Gamma(-s) [\Gamma(1/2 - s)]^{-1}, \quad K^-(s) = \Gamma(1/2 + s) [\Gamma(1 + s)]^{-1}$$

Для факторизации матрицы

$$G_0(t) = X_0^+(t) [X_0^-(t)]^{-1}, \quad t \in L \quad (3.2)$$

рассмотрим краевую задачу Римана [3] на поверхности R :

$$F^+(t, \xi) = \lambda_0(t, \xi) F^-(t, \xi), \quad (t, \xi) \in \Gamma \quad (3.3)$$

$$\lambda_0(t, \xi) = \operatorname{tg} \pi t [b(t) + \xi c(t)] = 1 + (r_1 t^2 + r_0 + \xi) \sec \pi t \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\lambda_1^\circ(t) = \lambda_0(t, f^{1/2}(t)), \quad \lambda_2^\circ(t) = \lambda_0(t, -f^{1/2}(t)) \quad (3.5)$$

Тогда, сравнивая формулы (3.5) с (3.4), (2.1) получаем на основании (2.2)

$$[\theta_1^\circ(t)]|_L = 0, \quad [\theta_2^\circ(t)]|_L = -2\pi, \quad (2\pi)^{-1} [\arg \lambda_0(t, \xi)]|_\Gamma = -1$$

где $\theta_j^\circ(t) = \arg \lambda_j^\circ(t)$ ($j = 1, 2$), причем $\theta_j^\circ(t)|_{t \in \Gamma_\gamma^\pm} = 0$. Функция $\theta_1^\circ(t)$ непрерывна на C_γ , а $\theta_2^\circ(t)$ меняется от $\theta_2^\circ = \pi$ в начальной точке $= |\gamma| \exp\{i(\pi - 0)\}$ контура L до $\theta_2^\circ = 0$ в точке $t = i|\gamma|$. При обходе точки t контура L_γ^+ , переходе на L_γ^- вплоть до точки $t = -|\gamma|i$ имеем $\theta_2^\circ = 0$. Затем θ_2° уменьшается до $\theta_2^\circ = -\pi$ в точке $t = \exp\{i(\pi + 0)\}$. Кроме того:

$$\lambda_j^\circ(i\tau) \sim 1, \quad \tau \rightarrow \pm\infty; \quad \lambda_1^\circ(\gamma) \sim \eta_1, \quad \lambda_2^\circ(\gamma) \sim -\eta_2\gamma^2, \quad \gamma \rightarrow -0 \quad (3.6)$$

Следуя [3], решение задачи (3.3) запишем в виде

$$F(s, w) = \exp\{\varphi(s, w)\} \quad (3.7)$$

$$\varphi(s, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \ln \lambda_0(\tau, \xi) \frac{w + \xi}{2\xi} \frac{d\tau}{\tau - s} + \left(\int_{l_a} -n \int_{l_*} \right) \frac{w + \xi}{2\xi} \frac{d\tau}{\tau - s} \quad (3.8)$$

Вещественный параметр a и целое число n подлежат определению.

Контур l_a и l_* , расположенные на отрезках вещественных осей листов поверхности R , определяются для случаев $D < 0$ и $D > 0$ следующим образом:

1) $D < 0$. Контур l_* проходит только по первому листу от $-\infty$ до $+\infty$. Контур l_a проходит по второму листу от точки (a, ξ_a) до точки (γ, ξ_γ) , где $\xi_a = -f^{1/2}(a)$, $\xi_\gamma = -f^{1/2}(\gamma)$, причем если $a > -|\gamma|$, то он проходит через бесконечно удаленную точку второго листа, оставаясь на вещественной оси. На фиг. 1 этот контур изображен для случая $a < -|\gamma|$.

2) $D > 0$. Контур l_* проходит по первому листу от точки $(-s_1, 0)$ до $(s_1, 0)$ и по второму листу от $(s_1, 0)$ возвращается в $(-s_1, 0)$. Контур l_a проходит l_* ($l_a \subset l_*$) в противоположном к l_* направлении от точки (a, ξ_a) ($\xi_a = \delta f^{1/2}(a)$) до точки (γ, ξ_γ) ($\xi_\gamma = -f^{1/2}(\gamma)$), причем точка (a, ξ_a) может лежать как на первом листе ($\delta = 1$), так и на втором ($\delta = -1$). Параметр δ , так же как a и n будет определен далее. На фиг. 2 контур l_a изображен для случая $\delta = -1$, $a < -|\gamma|$.

Для того чтобы функция $F(s, w)$ не имела существенно особых точек (бесконечно удаленных) необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \frac{\lambda_1^\circ(\tau)}{\lambda_2^\circ(\tau)} \frac{d\tau}{f^{1/2}(\tau)} - n \int_{l_*} \frac{d\tau}{\xi} + \int_{l_a} \frac{d\tau}{\xi} = 0 \quad (3.9)$$

Таким образом, пришли к задаче обращения эллиптического интеграла первого рода, из которой однозначно определяются параметры a , n и δ . Результаты решения задачи (3.9) приведем для случая $\gamma = -0$, который понадобится в дальнейшем. Для $D < 0$ имеем

$$\begin{aligned} a &= (a_2/a_0)^{1/4} [(1 - \operatorname{cn}(u))(1 + \operatorname{cn}(u))^{-1}]^{1/2} \operatorname{sgn}(g - (2n + 1)K_0) \quad (3.10) \\ n &= E((2K_0)^{-1}g), \quad u = 2(a_0a_2)^{1/4}(K_0 - |g - (2n + 1)K_0|) \\ K_0 &= (a_0a_2)^{-1/4} \mathbf{K}(k), \quad k = 1/2(2 + a_1(a_0a_2)^{-1/2})^{1/2} \end{aligned}$$

$$g = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \frac{\lambda_1^\circ(i\tau)}{\lambda_2^\circ(i\tau)} \frac{d\tau}{f^{1/2}(i\tau)}$$

где $E(b)$ — целая часть числа b , $\operatorname{cn}(u)$ — эллиптический косинус, $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $D > 0$:

$$\begin{aligned} a &= s_1 \operatorname{sn}(a_0^{1/2}s_2u_0) \operatorname{sgn}(g - 2(2n + 1)K_0) \\ n &= E(g(4K_0)^{-1}), \quad u_0 = K_0 - |K_0 - |g - (2n + 1)2K_0|| \\ \delta &= \operatorname{sgn}(K_0 - |g - (2n + 1)2K_0|) \end{aligned}$$

Величина g определена в (3.10), а $\operatorname{sn}(u)$ — эллиптический синус. Функция $\varphi(s, w)$ (3.8) на l_a и l_* имеет скачки, кратные $2\pi i$. Однако функция $F(s, w)$ в окрестности точек контуров l_a и l_* за исключением особых $((a, \xi_a), (\gamma, \xi_\gamma))$ и бесконечно удаленных) является аналитической. Значения $F(s, w)$ при $(s, w) \in l_a, l_*$ вычисляются предельным переходом из области аналитичности соответствующих интегралов типа Коши согласно формулам Сохоцкого. Анализ интегрального представления $F(s, w)$ (3.7) — (3.9) ($\gamma < 0$) в окрестности особых точек показывает, что функция $F(s, w)$ нигде на R не обращается в нуль и ограничена на R за исключением точки (a, ξ_a) , в которой она имеет простой полюс

$$F(s, w) = O((s - a)^{-1}), \quad (s, w) \rightarrow (a, \xi_a)$$

Канонической матрицей решений [7] однородной задачи Римана

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t) \Phi_0^-(t), \quad t \in L \quad (3.11)$$

является матрица $X_0(s)$, определенная соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} X_0(s) &= [F(s, w)B(s, w) + F(s, -w)B(s, -w)]R(s) \quad (3.12) \\ X_0^{-1}(s) &= R^{-1}(s)[F^{-1}(s, w)B(s, w) + F^{-1}(s, -w)B(s, -w)] \\ B(s, w) &= w^{-1}B_0(s, w), \quad 2B_0(s, w) = wI + A(s) \\ R(s) &= \|\rho_a, \rho_a'(s - a)\|, \quad \det X_0(s) = F(s, w)F(s, -w)(s - a) \end{aligned}$$

где ρ_a — ненулевой столбец матрицы $-B_0(a, -\xi_a)$, а ρ_a' — вектор-столбец, такой, что $\det \|\rho_a, \rho_a'\| = 1$. Столбцы ρ_a, ρ_a' всегда существуют, так как $\operatorname{rang} B_0(s, w) = 1$.

В окрестности особой точки $s = a$ матрица $X_0(s)$ ограничена вследствие тождества $B_0(s, w)B_0(s, -w) \equiv 0$. Определитель матрицы $X_0(s)$ ограничен всюду в конечной части плоскости, а на бесконечности имеет порядок, равный единице. Порядки столбцов матрицы $X_0(s)$ на бесконечности равны 0, 1, а значит частные индексы задачи (3.11) равны $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = -1$.

Для конкретизации дальнейших формул при $m_+(a) \neq 0$ возьмем в качестве матрицы $R(s)$ следующую:

$$R(s) = \left\| \begin{array}{cc} [\xi_a - l(a)]/2 & 2(s - a)m_+^{-1}(a) \\ -m_+(a)/2 & 0 \end{array} \right\| \quad (3.13)$$

4. Решение векторной задачи Римана (1.6). Подставим представления для $G(t)$ (3.1) и (3.2) в краевое условие (1.6) и получим

$$[K^+(t) X_0^+(t)]^{-1} \Phi^+(t) - \Psi^+(t) = [K^-(t) X_0^-(t)]^{-1} \Phi^-(t) - \Psi^-(t) \quad (4.1)$$

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [X_0^+(t)]^{-1} \frac{g^-(t)}{K^+(t)} \frac{dt}{t-s}$$

Определим поведение $X_0^{-1}(s)$ на бесконечности. Пусть сначала $D < 0$. Тогда, если $s \rightarrow \infty$ и $|\arg s| < \theta_1$, $|\arg s| < \pi - \theta_1$, то

$$w = f^{1/2}(s) \sim a_0^{1/2} s^2, \quad B(s, \pm w) \sim 1/2 \operatorname{diag} (1 \pm a_0^{-1/2} r_3, 1 \mp a_0^{-1/2} r_3) \quad (4.2)$$

Принимая во внимание условие (3.9), на основании (3.8) находим ($\gamma \rightarrow -0$):

$$\begin{aligned} \varphi(s, w) &= \mu_a^- - \pi n i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} s + O(s^{-1}) \\ \varphi(s, -w) &= -\mu_a^- + 1/2 \pi i (\operatorname{sgn} a + 1) \operatorname{sgn} \operatorname{Im} s + O(s^{-1}), \quad s \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\mu_a^- = \frac{a_0^{1/2}}{2} \int_{l_a} \frac{\tau d\tau}{f^{1/2}(\tau)} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2(a_0 f(a))^{1/2} + 2a_0 a^2 - a_1}{2(a_0 a_2)^{1/2} - a_1} \right| \quad (\gamma = -0)$$

И тогда в силу (3.7) имеем

$$F(s, w) \sim (-1)^n \exp(\mu_a^-), \quad F(s, -w) \sim -\operatorname{sgn} a \exp(-\mu_a^-), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

Пусть теперь $D > 0$. Для выбранной ветви $w = f^{1/2}(s)$ имеем $w \sim -a_0^{1/2} s^2$, $s \rightarrow \infty$. Далее

$$\begin{aligned} B(s, \pm w) &\sim 1/2 \operatorname{diag} (1 \mp a_0^{-1/2} r_3, 1 \pm a_0^{-1/2} r_3), \quad s \rightarrow \infty \\ \varphi(s, \pm w) &= \pm \mu_a^+ + O(s^{-1}), \quad F(s, \pm w) \sim \exp(\pm \mu_a^+), \quad s \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mu_a^+ = \frac{a_0^{1/2}}{2} \int_{l_u} \frac{\tau d\tau}{\xi} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(2a_0 s_1^2 - a_1)^{\delta+1}}{[2(a_0 a_2)^{1/2} - a_1] [2(a_0 f(a))^{1/2} + 2a_0 a^2 - a_1]^\delta} \right|$$

Матрица $R^{-1}(s)$, обратная к определенной в (3.13), ведет себя на бесконечности следующим образом:

$$R^{-1}(s) \sim \begin{vmatrix} 0 & -2m_+^{-1}(a) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad s \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Учитывая теперь асимптотические равенства (4.2) и (4.4)–(4.6), на основании (3.12) получим

$$X_0^{-1}(s) \sim \begin{vmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad s \rightarrow \infty \quad (\rho = \operatorname{const} \neq 0) \quad (4.7)$$

Принимая во внимание поведение на бесконечности вектор-функций $[K^\pm(s)]^{-1} \Phi^\pm(s) = O(1)$, $\Psi(s) = o(1)$, $s \rightarrow \infty$, $s \in D^\pm$, а также матрицы $X_0^{-1}(s)$ (4.7), применяем к равенству (4.1) теорему Лиувилля и находим, что соотношение (4.1) определяет аналитическую всюду в плоскости S вектор-функцию, равную $\|C, 0\|^\pm$ (C — произвольная постоянная). Итак, решение задачи Римана (1.6) имеет вид

$$\Phi^\pm(s) = K^\pm(s) X_0^\pm(s) [\Psi^\pm(s) + \|C, 0\|^\pm], \quad s \in D^\pm \quad (4.8)$$

Постоянная C находится из условия

$$\mu \Phi_1^-(0) - \Phi_2^-(0) = 0 \quad (4.9)$$

следующего из условия замкнутости разреза (1.5). Для вычисления $\Phi_j^-(0)$ необходимо располагать формулами для $F(0, \pm f^{1/2}(0))$. Пусть сначала $D < 0$. Аналогично [5] положим в (3.8) $s = 0$, а затем перейдем

к пределу $\gamma \rightarrow -0$. Учитывая (3.6), имеем

$$\lambda_0(\tau, f^{1/2}(\tau)) \sim \eta_1, \quad \lambda_0(\tau, -f^{1/2}(\tau)) \sim -\eta_2\tau^2, \quad \tau \rightarrow 0$$

и тогда

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} F(0, f^{1/2}(0)) = (-1)^n \eta_1^{-1/2} \exp\{V_-(a)\}$$

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} F(0, -f^{1/2}(0)) = |a|^{-1} \eta_2^{-1/2} \exp\{-V_-(a)\}$$

$$V_-(a) = \frac{1}{2} \int_0^{|a|} \frac{f^{1/2}(0) - f^{1/2}(\tau)}{\tau f^{1/2}(\tau)} d\tau = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2a_2}{a_2 - 1/2 a_1 a^2 + (a_2 f(a))^{1/2}} \right|$$

При $D > 0$ приходим к формулам:

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} F(0, f^{1/2}(0)) = (-1)^{n+1} \operatorname{sgn} a \eta_1^{-1/2} \exp\{V_+(a)\}$$

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow 0} F(0, -f^{1/2}(0)) = (-1)^n |a|^{-1} \eta_2^{-1/2} \exp\{-V_+(a)\}$$

$$V_+(a) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2a_2 [a_2 - 1/2 a_1 a^2 + (a_2 f(a))^{1/2}]^\delta}{(a_2 - 1/2 a_1 s_1^2)^{\delta+1}} \left(\frac{s_1}{a}\right)^{2(\delta+1)} \right|$$

Подставляя теперь значения $\Phi_j^-(0)$ из (4.8) в равенство (4.9), получим

$$C = \frac{(\gamma_{21} - \mu\chi_{11}) \Psi_1^-(0) + (\chi_{22} - \mu\chi_{12}) \Psi_2^-(0)}{\mu\chi_{11} - \chi_{21}}, \quad \Psi^-(0) = \begin{vmatrix} \Psi_1^-(0) \\ \Psi_2^-(0) \end{vmatrix}$$

$$\chi_{j1} = 1/2 [(\xi_a - l(a)) \chi_j^+ - m_+(a) \chi_{3-j}^-], \quad \chi_{j2} = -2am_+^{-1}(a) \chi_j^+ \quad (j = 1, 2)$$

$$\chi_1^\pm = 1/2 [(1 \mp a_2^{-1/2} r_2) F(0, f^{1/2}(0)) + (1 \pm a_2^{-1/2} r_2) F(0, -f^{1/2}(0))]$$

$$\chi_2^\pm = 1/2 a_2^{-1/2} q_2^\pm [-F(0, f^{1/2}(0)) + F(0, -f^{1/2}(0))].$$

Заметим, что $\xi_a = -f^{1/2}(a)$ в случае $D < 0$ и $\xi_a = \delta f^{1/2}(a)$ при $D > 0$. В случае, когда $p(x)$ — полином степени N :

$$p(x) = \sum_{j=0}^N p_j x^j \quad (4.10)$$

компоненты вектора $\Psi^-(0)$ вычисляются в явном виде

$$\Psi^-(0) = 4 \sum_{j=0}^N \frac{\Gamma(3/2 + j)}{(j+1)!} [X_0^+(-j-1)]^{-1} p_j \varepsilon^j \begin{vmatrix} 1 \\ (-1)^j \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

5. Коэффициенты интенсивности напряжений K_I^+ , K_I^- . Введем в рассмотрение коэффициенты

$$K_I^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm \varepsilon \pm 0} [2\pi (\pm x - \varepsilon)]^{1/2} \sigma_y(x, \pm 0) \quad (5.1)$$

$$N_k = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} (1 - \xi)^{1/2} \varphi_k(\xi)$$

Тогда по теореме абелева типа

$$\Phi_k^-(s) \sim N_k \pi^{1/2} s^{-1/2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad s \in D^- \quad (5.2)$$

Определим поведение на бесконечности вектор-функции $\Phi^-(s)$ на основании (4.8). Имеем

$$X_0(s) = [F_0 + s^{-1} F_1 + O(s^{-2})] (R_1 + s R_0), \quad s \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

$$R_0 = \begin{vmatrix} 0 & r_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_1 = \begin{vmatrix} r_{11} & -ar_{12} \\ -r_{12}^{-1} & 0 \end{vmatrix}, \quad F_0 = \begin{vmatrix} x_+ & 0 \\ 0 & x_- \end{vmatrix}$$

$$r_{11} = 1/2 [\xi_2 - l(a)], \quad r_{12} = 2m_+^{-1}(a)$$

$$x_{\pm} = \begin{cases} 1/2 [(-1)^n \exp(\mu_a^-) A_0^{\pm} - \operatorname{sgn} a \exp(-\mu_a^-) A_0^{\mp}], & D < 0 \\ 1/2 [\exp(\mu_a^+) A_0^{\mp} + \exp(-\mu_a^+) A_0^{\pm}], & D > 0 \end{cases}$$

$$A_0^{\pm} = 1 \pm a_0^{-1/2} r_3$$

(F_1 — (2×2) -матрица, величины μ_a^{\pm} определены формулами (4.5), (4.3)). Подставляя равенство (5.3) в (4.8) и учитывая (5.2), получим

$$\pi^{1/2} \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix} = F_0 R_0 \begin{vmatrix} \Psi_1^{\circ} \\ \Psi_2^{\circ} \end{vmatrix} + F_0 R_1 \begin{vmatrix} C \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Psi^{\circ} = -\frac{1}{2\pi i} \int [X_0^+(t)]^{-1} \frac{g^-(t)}{K^+(t)} dt, \quad \Psi^{\circ} = \begin{vmatrix} \Psi_1^{\circ} \\ \Psi_2^{\circ} \end{vmatrix}$$

Принимая во внимание асимптотические равенства

$$\sigma_y(\varepsilon x, \pm 0) \sim -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_j(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad x \rightarrow 1 + 0, \quad j = 1, 2$$

$$\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{-1/2}}{\xi - x} d\xi \sim -\pi(x-1)^{-1/2}, \quad x \rightarrow 1 + 0$$

находим коэффициенты, введенные в (5.1)

$$K_{\Gamma}^+ = \varepsilon^{1/2} 2^{-3/2} x_+ (C r_{11} + \Psi_2^{\circ} r_{12}), \quad K_{\Gamma}^- = -\varepsilon^{-1/2} 2^{-3/2} x_- C r_{12}^{-1}$$

Для полиномиальной нагрузки (4.10) имеем

$$\Psi^{\circ} = 4 \sum_{j=0}^N [X_0^+(-j-1)]^{-1} \begin{vmatrix} 1 \\ (-1)^j \end{vmatrix} p_j \varepsilon^j \frac{\Gamma(3/2+j)}{j!} \quad (5.4)$$

Приведем формулы ($D < 0$) для $F(x, \pm f^{1/2}(x))$ (x — вещественное число), которые необходимо знать, чтобы вычислить значения матрицы $[X_0^+(-j-1)]^{-1}$, входящие в (4.11) и (5.4):

$$F(x, f^{1/2}(x)) = (-1)^n R_1^+ R_2, \quad F(x, -f^{1/2}(x)) = x(a-x)^{-1} \operatorname{sgn} a R_1^- R_2^{-1}$$

$$R_1^{\pm} = \exp \left\{ -\frac{x}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\ln(\lambda_1^{\circ}(it) \lambda_2^{\circ}(it)) \pm \left(\frac{f(x)}{f(it)} \right)^{1/2} \ln \frac{\lambda_1^{\circ}(it)}{\lambda_2^{\circ}(it)} \right] \frac{dt}{t^2 + x^2} \right\}$$

$$R_2 = \exp \{ w_a(x) + [n + 1/2 (\operatorname{sgn} a + 1)] w^{\circ}(x) \}$$

$$w_a(x) = \frac{1}{2} \int_0^{|a|} \frac{f^{1/2}(x) - f^{1/2}(\tau)}{f^{1/2}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - x \operatorname{sgn} a}$$

$$w^{\circ}(x) = x \int_0^{\infty} \frac{f^{1/2}(x) - f^{1/2}(\tau)}{f^{1/2}(\tau)} \frac{d\tau}{x^2 - \tau^2}$$

Отметим, что для $D = 0$ решение задачи может быть получено как предельным переходом при $D \rightarrow \pm 0$, так и непосредственно [1] (род поверхности R равен нулю). Кроме того, в этом случае соответствующую задачу Римана можно решить, следуя [8, 5].

В качестве численного примера рассмотрен случай $p(x) = p = \operatorname{const}$, $\varepsilon = 1$. В таблице представлены зависимости $p^{-1} K_{\Gamma}^+$ и $p^{-1} K_{\Gamma}^-$ от $\mu = E_2^{-1} E_1$ при некоторых

μ	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,2, \nu_2 = 0,3$	
	$p^{-1}K_I^+$	$p^{-1}K_I^-$	$p^{-1}K_I^+$	$p^{-1}K_I^-$
0,02	2,75	1,13	2,77	1,13
0,1	2,48	1,27	2,45	1,27
0,2	2,27	1,38	2,27	1,39
0,4	2,04	1,53	2,03	1,53
0,6	1,91	1,62	1,90	1,63
0,8	1,82	1,70	1,82	1,70
1,0	1,77	1,77	1,76	1,77

значениях ν_1, ν_2 . При $|\mu| \rightarrow 1$ ($\nu_1 = \nu_2$) величины K_I^+ и K_I^- стремятся к $K_I = \pi^{1/2}p$ — величине коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва для однородной плоскости.

Для всех рассмотренных при численных расчетах значений μ, ν_1 и ν_2 параметр a оказывается отрицательным, $n = 0$ и в случае $D > 0$ $\delta = -1$ (точка (a, ξ_a) лежит на втором листе поверхности R). Так как $D > 0$ при $\nu_- < \mu < \nu_+$, и ν_-, ν_+ близки между собой (например, при $\nu_1 = 0,2, \nu_2 = 0,3$ $\nu_- \approx 0,9179, \nu_+ \approx 0,9274$), случай $D < 0$ при численной реализации более интересен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Г. О факторизации матриц-функций специального вида // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 1. С. 44—47.
2. Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677—689.
3. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113—179.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
5. Антипов Ю. А., Попов Г. Я. Плоское напряженное состояние упругой плоскости с двумя пересекающимися разрезами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 617—627.
6. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 343 с.
7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
8. Златин А. Н., Храпков А. А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 4. С. 810—813.

Одесса

Поступила в редакцию
21.VI.1990