Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 539.3

С. А. Назаров

ПРОЯВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется изгиб пластины с жестко защемленным краем; контур, ограничивающий срединное сечение, имеет угловую точку с раствором угла 2α. Сравнивается влияние пограничных слоев, плоского (вблизи гладкой части боковой поверхности S_h) и трехмерного (вблизи особой линии на S_h); при $\alpha < \pi$ превалирует плоский пограничный слой, а при $\alpha = \pi$ — трехмерный. Последний является линейной комбинацией двух специальных решений $Y^{\pm}$ однородной задачи в клине единичной толщины. Описывается несколько членов асимптотики полей смещений и напряжений в пластине и приведены оценки остатков. В случае входящего угла определяются слагаемые в асимптотическом представлении энергии деформации пластины, учитывающие эффект трехмерности в главном: по сравнению со случаем гладкой боковой поверхности возникают выражения, содержащие квадраты коэффициентов при сингулярных составляющих решения Кирхгофа и множители в разложениях решений $Y^{\pm}$ на бесконечности.

1. Постановка задачи. Предположим, что срединное сечение $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ пластины ограничено простым контуром $\partial\Omega$, гладким (класса C^∞) всюду, кроме угловой точки 0 с раствором угла $2\alpha \in (0, 2\pi]$. Рассмотрим трехмерную задачу о «чистом» изгибе пластины $Q_h = \Omega \times (-{}^1\!/_2 h, {}^1\!/_2 h)$ с защемленной боковой поверхностью:

$$\mu\nabla_x\cdot\nabla_x u(h, x) + (\mu+\lambda)\nabla_x\nabla_x\cdot u(h, x) = 0, \ x \in Q_h \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(3)}(u; h, y, \pm{}^1\!/_2 h) = \pm{}^1\!/_2 p(y) e^{(3)}, \ y = (x_1, x_2) \in \Omega \tag{1.2}$$

$$u(h, x) = 0, \ x \in S_h = \partial\Omega \times (-{}^1\!/_2 h, {}^1\!/_2 h) \tag{1.3}$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе, $e^{(j)}$ — орт в $\mathbf{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений, p — поперечная нагрузка, $\sigma^{(3)} = \sigma e^{(3)}$, $\sigma(u)$ — тензор напряжений с декартовыми компонентами $\sigma_{jk}(u)$. Масштабированием характерный размер области сведем к единичному; тогда h — малый безразмерный положительный параметр, относительная толщина пластины.

Найдем несколько первых членов асимптотики при $h \to 0$ решения $u(h, x)$ задачи (1.1)—(1.3).

2. Предварительные сведения. Известно, что главным членом асимптотического приближения к решению задачи об изгибе пластины служит функция $w^0 \in W_2^{\,2}(\Omega)$, удовлетворяющая задаче

$$D_1\Delta_y^2 w^0(y) = p(y), \ y \in \Omega; \ w^0(y) = (\partial\omega^0/\partial n)(y) = 0,$$
$$y \in \partial\Omega \tag{2.1}$$
$$D_1 = {}^1\!/_3\mu(\mu+\lambda)(2\mu+\lambda)^{-1}$$

в которой D_1 — приведенная ($h = 1$) цилиндрическая жесткость пластины, Δ_y — оператор Лапласа, n — внешняя нормаль. Более точно, по прогибу w^0 восстанавливается трехмерный вектор смещений

$$u^0(h, x) = h^{-3}\Xi(h, h^{-1}x_3, \Delta_y) w^0(y) + hW^0(y, h^{-1}x_3) \tag{2.2}$$

причем дифференциальный оператор $\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$ и вектор W^0 имеют вид

$$\Xi_3(h, z, \nabla_y) w = w + {}^1/_2\nu(1-\nu)^{-1}(z^2 - {}^1/_{12})\Delta_y w, \quad \Xi_k(h, z, \nabla_y) w =$$
$$= hz\{h^2[{}^1/_6(1-\nu)^{-1}((2-\nu)z^2 + {}^1/_4(\nu-6))]\Delta_y - 1\}\partial w/\partial y_k \quad (2.3)$$
$$W_3^0(y, z) = [4\mu(1-\nu)]^{-1}\{{}^1/_2(3-\nu^2)(z^2 - 1/12) - (1-\nu^2)(z^4 - 1/80)\}p$$
$$W_k^0(y, z) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \nu = \lambda[2(\mu+\lambda)]^{-1}$$

Напряжения, рассчитанные по смещениям (2.2), таковы:

$$\sigma_{jk}^0 = -12D_1h^{-2}x_3[\nu\delta_{j,k}\Delta_y + (1-\nu)\partial^2/\partial y_j\partial y_k]w^0 \quad (2.4)$$
$$\sigma_{j3}^0 = 6D_1h^{-1}(x_3^2h^{-2} - {}^1/_4)\partial\Delta_y w^0/\partial y_j \quad (j, k = 1, 2)$$
$$\sigma_{33}^0 = {}^1/_2 x_3 h^{-1}(3 - 4x_3^2h^{-2})p \quad (2.5)$$

($\delta_{j,k}$ — символ Кронекера). Обоснованием главного члена асимптотики служит оценка, вытекающая из асимптотически точного неравенства Корна

$$\|(d+h)^{-2}(u_3 - u_3^0)\| + h^{-1}\|(d+h)^{-1}(u_j - u_j^0)\| + \|(d+h)^{-1}\nabla_y(u_3 - u_3^0)\| +$$
$$+ h^{-1}\|\nabla_y(u_j - u_j^0)\| + h\|(d+h)^{-1}\partial(u_3 - u_3^0)/\partial x_3\| +$$
$$+ \|(d+h)^{-1}\partial(u_j - u_j^0)/\partial x_3\| + h^{-1}\|\sigma_{jk}(u) - \sigma_{jk}^0\| +$$
$$+ \|(d+h)^{-1}(\sigma_{j3}(u) - \sigma_{j3}^0)\| + h^{-1}\|\sigma_{33}(u) - \sigma_{33}^0\| \leqslant ch^{-2}\|p; L_2(\Omega)\| \quad (2.6)$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(Q_h)$, $d(y)$ — расстояние от точки y до границы $\partial\Omega$. Подчеркнем, что для двух последних слагаемых оценка (2.6) малоинформативна — она не оправдывает выделенной в (2.5) асимптотики напряжений σ_{m3} ($m = 1, 2, 3$). Иными словами, без дополнительных предположений о дифференциальных свойствах p и w расчет напряжений σ_{m3} по приближенным формулам (2.5) бессмыслен, и нужно положить $\sigma_{m3}^0 = 0$.

Если бы контур $\partial\Omega$ был гладкий, то [1—5] решение задачи (1.1)—(1.3) раскладывалось бы в асимптотический ряд

$$u(h, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{j-3}\{\Xi(h, h^{-1}x_3, \nabla_y)w^j(y) +$$
$$+ h^4W^j(y, h^{-1}x_3)\} + \chi(y)\sum_{q=2}^{\infty} h^{q-3}v^q(h^{-1}n, h^{-1}x_3, s) \quad (2.7)$$

в котором w^j — решения задач вида (2.1) с некими правыми частями, $z \mapsto W^j(y, z)$ — вектор-функция с нулевым средним по $z \in (-{}^1/_2, {}^1/_2)$ при всех $y \in \Omega$, χ — гладкая срезающая функция, равная единице вблизи $\partial\Omega$ и нулю вне той окрестности контура $\partial\Omega$, где определены локальные координаты n (нормальная) и s (касательная), v^q — экспоненциально исчезающие на бесконечности решения задач о деформации полуполосы с защемленным торцом (слагаемые типа пограничного слоя).

Были вычислены [6] вторые члены асимптотики (для гладкого контура). Оказывается, что $v^0 = v^1 = 0$, и w^1 — решение задачи

$$\Delta_y^2 w^1(y) = 0, \quad y \in \Omega; \quad w^1(y) = 0, \quad (\partial w^1/\partial n)(y) = c(\nu)\Delta_y w^0(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (2.8)$$

где $c(\nu)$ — величина, зависящая лишь от коэффициента Пуассона ν и положительная при $\nu \in (0, {}^1/_2)$ (график функции $\nu \mapsto c(\nu)$ изображен на фиг. 2 [6]). Решение v^2 типа пограничного слоя задается следующим образом:

$$v^2(\eta_1, \eta_2, s) = (X_n(\eta_1, \eta_2), X_3(\eta_1, \eta_2), 0)\Delta_y w^0(s, 0) \quad (2.9)$$

Вектор X является исчезающим на бесконечности решением задачи о плоской деформации полуполосы $\Pi = (0, +\infty) \times (-{}^1/_2, {}^1/_2)$; массовые силы отсутствуют, боковые стороны свободны от напряжений и $X_n = -c(\nu)\eta_2$, $X_3 = {}^1/_2\nu(1-\nu)^{-1}(\eta_2^2 - {}^1/_{12}) - b(\nu)$ на торце $\{\eta : \eta_1 = 0,$

$|\eta_2| < {}^1/_2\}$, $b(\nu)$ — некая величина (подробности см. в разд. 3 [6]). Если теперь учеть названные члены w^1, v^2 и обозначить аналогичные (2.2) и (2.4), (2.5) выражения u^1 и $\sigma_{mn}{}^1$ соответственно, то неравенство (2.6) сохранится после замены верхнего индекса 0 на 1 и правой части на $c_1 h^{-1}(\|p\| + \|\nabla_y p\|)$ (при этом приобретает смысл оценка разности $\sigma_{33}(u) - \sigma_{33}{}^0$).

В случае, когда на границе области есть угловая точка, из-за особенности решения в вершине угла возможно соотношение $w^0 \in W_2{}^2(\Omega) \setminus \setminus W_2{}^3(\Omega)$. Но тогда выражение $\sigma_{j3}{}^0$ из (2.5) не принадлежит $L_2(Q_h)$, что несуразно. Как обычно в таких ситуациях, вблизи ребра $\omega = 0 \times (-{}^1/_2 h, {}^1/_2 h)$ на боковой поверхности пластины возникает дополнительный пограничный слой. Это явление обсуждается в разд. 4, 5, а следующий раздел посвящен формулировке нужных результатов о поведении решений плоских задач (2.1) и (2.8) около вершины угла.

3. Угловая точка. Будем считать для простоты, что нагрузка равна нулю в окрестности точки O. Степенные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в угле $K_\alpha = \{y : r > 0, \ |\theta| < \alpha\}$ имеют вид $r^{1+\Lambda_\pm}\Psi_\pm(\theta)$, где r, θ — полярные координаты, $\Lambda_\pm$ — корни уравнения

$$\Lambda \sin 2\alpha \pm \sin 2\Lambda\alpha = 0 \tag{3.1}$$

(корни $\Lambda_- = \pm 1$ при $\alpha \neq {}^1/_2\pi, \alpha_*, \pi$ и $\Lambda_\pm = 0$ исключаются из рассмотрения; здесь $\alpha_* \in ({}^1/_2\pi, {}^3/_4\pi)$ — решение уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$). Расположение корней уравнений (2.1) на комплексной плоскости в зависимости от величины α известно (см. [7], и др.). Если $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$, то в полосе $\Upsilon(1) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant 1\}$ их нет. Если же $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi]$, то в $\Upsilon(1)$ есть пара вещественных корней $\pm\Lambda_+(\alpha)$, а при $\alpha \in [\alpha_*, \pi]$ к ним добавляется еще одна пара $\pm\Lambda_-(\alpha)$. Далее через $\Upsilon(l_\alpha)$ обозначается максимальная полоса, содержащая лишь названные корни уравнений (3.1).

Угловые части $\Psi_\pm$ задаются равенствами

$$\begin{aligned}\Psi_+(\Lambda, \theta) &= C_+(\Lambda)\{\cos[(\Lambda+1)\alpha]\cos[(\Lambda-1)\theta] - \cos[(\Lambda - \\ &\quad - 1)\alpha]\cos[(\Lambda+1)\theta]\} \\ \Psi_-(\Lambda, \theta) &= C_-(\Lambda)\{\sin[(\Lambda+1)\alpha]\sin[(\Lambda-1)\theta] - \\ &\quad - \sin[(\Lambda-1)\alpha]\sin[(\Lambda+1)\theta]\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

Явный вид нормировочных множителей $C_\pm(\Lambda)$ не понадобится (исключение составляет случай $\alpha = \pi$, о котором речь пойдет в конце раздела). Будет использован только такой факт [8]: за счет выбора упомянутых множителей функции $U_\pm(y) = r^{1+\Lambda_\pm(\alpha)}\Psi_\pm(\Lambda_\pm(\alpha), \theta)$ и $Z_\pm(y) = r^{1-\Lambda_\pm(\alpha)}\Psi_\pm(-\Lambda_\pm(\alpha), \theta)$ можно нормировать следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle U_\pm, Z_\pm\rangle_\delta \equiv \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \Big\{ U_\pm \frac{\partial}{\partial r}\Delta_y \overline{Z}_\pm - \frac{\partial U_\pm}{\partial r}\Delta_y \overline{Z}_\pm + \\ + \frac{\partial \overline{Z}_\pm}{\partial r}\Delta_y U_\pm - \overline{Z}_\pm \frac{\partial}{\partial r}\Delta_y U_\pm \Big\}\Big|_{r=\delta} d\theta = D_1^{-1}\end{aligned} \tag{3.3}$$

(черта означает комплексное сопряжение и ее присутствие несущественно для вещественных $\Lambda_\pm(\alpha)$ или, в частности, при $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi]$). Подчеркнем, что левая часть тождества (3.3) не зависит от $\delta > 0$.

Если угол α мал, то решение w^0 принадлежит $W_2{}^4(\Omega)$. При $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$ верно включение $w^0 \in W_2{}^3(\Omega)$, а при $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi]$ справедливо представление

$$w^0(y) = \sum_\pm c_\pm U_\pm(y) + O(r^{1+l_\alpha}), \quad r \to 0 \tag{3.4}$$

причем полагаем $c_- = 0$ для $\alpha \in (^1/_2\pi, \alpha_*)$. В случае $\alpha \in (^1/_2\pi, \pi]$ есть нетривиальное решение $\zeta_+ \in W_2^1(\Omega)$ однородной задачи (2.1), обладающее асимптотикой

$$\zeta_\pm(y) = Z_\pm(y) + O(r^{1+\Lambda_+(\alpha)}), \quad r \to 0 \tag{3.5}$$

Такое же решение ζ_- попадает в $W_2^1(\Omega)$, если $\alpha \in (\alpha_*, \pi]$. Благодаря нормировке (3.3) верны формулы [8]

$$c_\pm = \int_\Omega p(y)\overline{\zeta_\pm(y)}\,dy \tag{3.6}$$

Для выпуклого угла K_α решение w^1 задачи (2.8) содержится в пространстве $W_2^2(\Omega)$. Если же угол входящий (т. е. $\alpha > {}^1/_2\pi$), то при $c_+ \neq 0$ задача (2.8) достоверно не имеет решения из $W_2^2(\Omega)$. В более широком классе $W_2^1(\Omega)$ нет теоремы единственности и приходится выделять решение асимптотическим представлением

$$w^1(y) = \sum_\pm c_\pm W_\pm(y) + O(r^{1+\Lambda_+(\alpha)}), \quad r \to 0 \tag{3.7}$$

Здесь $W_\pm(y) = r^{\Lambda_\pm(\alpha)}\Phi_\pm(\theta)$ — решение задачи в угле K_α

$$\Delta_y^2 W_\pm(y) = 0, \quad y \in K_\alpha \tag{3.8}$$

$$W_\pm(y) = 0, \ (\partial W_\pm/\partial n)(y) = c(\nu)\,\Delta_y U_\pm(y), \quad y \in \partial K_\alpha \setminus 0$$

Согласно общим результатам [9], решение (3.7) задачи (2.8) существует и единственно, а модельная задача (3.8) обладает решением указанного вида, если только число $\Lambda_\pm(\alpha) - 1$ не совпадает с одним из корней уравнения (3.1). Последнее требование выполнено при $\alpha \in (^1/_2\pi, \pi)$ и нарушено при $\alpha = \pi$, поскольку $\Lambda_\pm(\pi) = {}^1/_2$. Из-за этого угловая точка с раствором угла 2π (трещина с защемленными берегами в пластине) нуждается в дополнительных рассмотрениях.

При $\alpha = \pi$ специальные решения $U_\pm$ и $Z_\pm$ имеют вид

$$U_+(y) = Ar^{3/2}\psi_+(\theta), \quad U_-(y) = -Ar^{3/2}\psi_-(\theta), \quad A = (2\mu)^{-1}\sqrt{2}$$

$$Z_+(y) = 3Br^{1/2}\psi_+(\theta), \quad Z_-(y) = -Br^{1/2}\psi_-(\theta), \quad B = {}^3/_4\pi^{-1}(1-\nu)\sqrt{2}$$

$$\psi_+(\theta) = \cos {}^1/_2\theta + {}^1/_3\cos {}^3/_2\theta, \quad \psi_-(\theta) = \sin {}^1/_2\theta + \sin {}^3/_2\theta \tag{3.9}$$

(см., например, [10, 7] и ср. с (3.2), (3.3)). Непосредственно проверяется что решениями модельных задач (3.8) служат функции $W_+ = 0$ и

$$W_-(y) = \pi^{-1}c(\nu)\,Ar^{1/2}[\psi_-(\theta)\ln r + \theta(\cos {}^1/_2\theta - \cos {}^3/_2\theta)] + A_0 r^{1/2}\psi_-(\theta)$$

$$A_0 = -(4\pi\mu)^{-1}c(\nu)\sqrt{2} \tag{3.10}$$

Обращаем внимание на то, что решение (3.10) определено с точностью до линейной комбинации $A_0 Z_- + B_0 Z_+$; коэффициент B_0 обратили в нуль для сохранения нечетности функции по переменной θ, а коэффициент A_0 выбрали из условия $\langle U_-, W_-\rangle_\delta = -8c(\nu)A^2 \ln\delta$ (это равенство используется при выводе формулы (6.4)). Итак, в силу [9] после указанного изменения вида функции W_- (линейная зависимость от $\ln r$) все сказанное о решении w^1 в случае $\alpha \in (-^1/_2\pi, \pi)$ остается справедливым и для $\alpha = \pi$.

4. Пограничный слой вблизи ребра ω. В окрестности точки O введем «быстрые» переменные $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = h^{-1}x$ и положим формально $h = 0$. В результате пластина Q_h преобразуется в сектор слоя $K_\alpha \times (-^1/_2, {}^1/_2)$. Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений следует построить решения $Y^\pm$ однородной задачи теории упругости в «клине» $K_\alpha \times (-{}^1/_2, {}^1/_2)$ с такой асимптотикой на бесконечности:

$$Y^\pm(\eta) = e^{(3)}U_\pm(\eta') + o(\rho^{1+\Lambda_\pm(\alpha)}), \quad \rho \to \infty \qquad (4.1)$$

$$(\eta' = (\eta_1, \eta_2), \ \rho = |\eta'| = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2})$$

Названные решения обращают функционал упругой энергии в бесконечность; из [11] вытекает, что эти решения существуют и единственны, а формула (4.1) допускает уточнение:

$$\begin{aligned} Y^\pm(\eta) = \Xi(1, \eta_3, \partial/\partial\eta')\{U_\pm(\eta') + W_\pm(\eta') + \mu^{-1}k_\pm(\alpha, \nu) Z_\pm(\eta')\} + \\ + \chi_0(\theta - \alpha)\, \mathrm{X}(\eta^{(\alpha)})\, \Delta_\eta U_\pm(\eta')\,|_{\theta=\alpha} + \\ + \chi_0(\theta + \alpha)\, \mathrm{X}(\eta^{(-\alpha)})\, \Delta_\eta U_\pm(\eta')\,|_{\theta=-\alpha} + O(\rho^{\gamma_\pm(\alpha)}) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Прежде чем пояснить обозначения, принятые в (4.2), подчеркнем, что алгорифм построения разложения (4.2) по существу тот же, что и в случае тонкой пластины. Дело в том, что вид разложения решения эллиптической задачи в области Ω определяется формой множества M_R, вырезаемого сферой $\{\eta: |\eta| = R\}$ из Ω. При $R \to \infty$ множество M_R следует интерпретировать как тонкую область: ее длина составляет $O(R)$, а ширина — $O(1)$.

Первая группа слагаемых в (4.2) вполне аналогична членам первого ряда из (2.7). Оператор Ξ определен формулой (2.3), $U_\pm$, $W_\pm$ и $Z_\pm$ — функции, описанные в разд. 3, а $k_\pm(\alpha, \nu)$ — некоторая величина, зависящая только от раствора α угла K_α и от коэффициента Пуассона ν (по всей вероятности, вычисление $k_\pm(\alpha, \nu)$ возможно лишь с привлечением ЭВМ).

Вторая группа слагаемых в (4.2) представляет собой решение типа пограничного слоя: $\eta^{(\pm\alpha)} = (\pm\eta_1 \sin\alpha - \eta_2\cos\alpha, \ \eta_3)$ — декартовы координаты в плоскостях, параллельных оси $O\eta_3$ и перпендикулярных боковым граням клина, X — экспоненциально исчезающее на бесконечности решение задачи в полуполосе Π, фигурировавшее в (2.9), χ_0 — гладкая четная срезающая функция, $\chi_0(t) = 1$ вблизи точки $t = 0$.

Отдельно остановимся на оценке остатка, в который включены слагаемые $O(r^{1+\Lambda_\pm(\alpha)-2})$ и $O(r^{1-\Lambda_\pm(\alpha)-1})$ (решения гладкого типа, следующие за функциями $U_\pm$, $W_\pm$ и $Z_\pm$ соответственно), младшие члены пограничного слоя и решения вида $\Xi r^{1-\Lambda_\pm}\Psi_\pm$, отвечающие другим корням $\Lambda_\pm$ уравнения (3.1) (при этом $\mathrm{Re}\,\Lambda_\pm > \mathrm{Re}\,\Lambda_\pm(\alpha) > 0$). Таким образом, показатели $\gamma_\pm(\alpha)$ подчиняются условиям

$$\gamma_\pm(\alpha) \geqslant \max\{\Lambda_\pm(\alpha) - 1, \ 1 - l_\alpha\} \qquad (4.3)$$

Если $\alpha \in (-{}^1/_2\pi, \pi]$ (или $\alpha \in [\alpha_*, \pi]$), то первое выражение справа в (4.2) определяет главный член асимптотики поля смещений Y^+ (или Y^-), а решения типа пограничного слоя суть $O(r^{\Lambda_\pm(\alpha)-1})$ и их можно отбросить. Однако после однократного дифференцирования последние решения сохраняют свой порядок и поэтому включаются в главную часть асимптотики (при $\rho \to \infty$) полей напряжений и деформаций. В случае $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$ (или $\alpha \in (0, \alpha_*) \setminus \{{}^1/_2\pi\}$) слагаемое, содержащее Z_+ (или Z_-), можно удалить из разложения (4.2): так как $\mathrm{Re}\,\Lambda_\pm(\alpha) > 1$, то из-за роста остатка присутствие исчезающей на бесконечности функции $Z_\pm$ не дает информации об асимптотике решения; это слагаемое, разумеется, восстановится в разложении после учета младших членов. (Характеристики, данные величинам из (4.2), согласуются с дальнейшими результатами разд. 5, 6 о влиянии угловой точки на напряженно-деформированное состояние пластины.) Наконец, заметим, что при совпадении числа $\Lambda_\pm(\alpha)$—

— 2 или $-\Lambda_{\pm}(\alpha) - 1$ с корнем уравнения (3.1) в выражении $\rho^{\gamma_{\pm}(\alpha)}$ может появиться дополнительный логарифмический множитель (ср. с (3.10)), который указывать не будем, увеличив показатель $\gamma_{\pm}(\alpha)$ на малое положительное число (если же $\ln\rho$ нет, то формула (4.3) содержит знак равенства).

5. **Сращивание решений разных типов.** Эффект трехмерности напряженно-деформированного состояния вблизи ребра $\omega \subset S_h$ сводится к тому, что в малой окрестности ω решение $u(h, x)$ задачи (1.1)—(1.3) представляется в главном суммой

$$Y(h, x) = c_+ h^{\Lambda_+(\alpha)-2} Y^+(h^{-1}x) + c_- h^{\Lambda_-(\alpha)-2} Y^-(h^{-1}x) \tag{5.1}$$

Коэффициенты $c_{\pm}$ берутся из разложения (3.4) решения плоской задачи Кирхгофа (2.1). Наличие в (5.1) малых множителей $h^{1+\Lambda_{\pm}(\alpha)}$ показывает, что в зависимости от величины угла α степень влияния трехмерного пограничного слоя различна. Например, при $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$ поправкой к двучленной асимптотике ($j = 0$, 1 и $q = 2$ в (2.7)), построенной в [6], служат члены тех же рядов (2.7) при $j = 2$, $q = 3$, а трехмерность проявляется в еще более младших слагаемых.

Для того чтобы подтвердить сказанное и выяснить степень влияния пограничного слоя (5.1) в случае $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi]$, необходимо определить глобальное асимптотическое приближение к решению исходной задачи. С этой целью применим вариант метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [12, 13] и др.).

Обозначим $V^\circ(h, x)$ сумму слагаемых справа в (2.7) с индексами $j = 0,1$ и $q = 2$. Пусть сначала $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi)$ (напомним, что формально считается, что в (3.4) $c_- = 0$ для $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \alpha_*)$). Сравнивая соотношения (3.4), (3.7), (2.9) с разложениями (4.2) (третье слагаемое из фигурных скобок отнесено в остаток), находим, что в промежуточной зоне $r \sim h^{1/2}$ величины $V^\circ(h, x)$ и $Y(h, x)$ в главном совпадают — отличия наблюдаются лишь в младших членах разложений. Учет в (4.2) слагаемых, содержащих $Z_{\pm}$, принуждает ввести в представление гладкого типа решения, имеющие в качестве асимптотик при $r \to 0$ такие выражения:

$$\mu^{-1} c_{\pm} h^{\Lambda_{\pm}(\alpha)-2} k_{\pm}(\alpha, \nu) Z_{\pm}(h^{-1}y) = h^{2\Lambda_{\pm}(\alpha)-3} \mu^{-1} c_{\pm} k_{\pm}(\alpha, \nu) Z_{\pm}(y) \tag{5.2}$$

Вспомним пояснения к формуле (3.5), которые указывали решения $\zeta_{\pm} \in W_2{}^1(\Omega)$ однородной задачи (2.1), и положим

$$V(h, x) = V^\circ(h, x) + \mu^{-1} \sum_{\pm} h^{2\Lambda_{\pm}(\alpha)-3} c_{\pm} k_{\pm}(\alpha, \nu)\, \Xi(h, h^{-1}x_3, \nabla_y)\, \zeta_{\pm}(y) \tag{5.3}$$

Теперь в силу (3.5) сращивание V и Y происходит при участии последнего слагаемого из фигурных скобок в (4.2).

Приступим к выбору глобального асимптотического приближения U. Из-за особенностей решений в вершине угла приходится изменить поле (5.3), содержащее слагаемые Ξw^0, Ξw^1, $\Xi\zeta_{\pm}$ и v^2. В функции v^2 типа плоского пограничного слоя, заданной формулой (2.9), заменим $\Delta_y w^0$ разностью

$$\Delta_y w^0(y) - \chi_0(r) \sum_{\pm} c_{\pm} \Delta_y U_{\pm}(y) \tag{5.4}$$

Вычитаемое устраняет особенности решения w^0, выделенные в (3.4) — их учет передается функции (5.1) типа трехмерного пограничного слоя. Отметим еще, что для согласования разложений величин (5.3) и (5.1) потребуется уточнить выбор срезки χ в (2.7): в окрестности точки $y = 0$ нужно соблюсти равенство $\chi(y) = \chi_0(\theta - \alpha) + \chi_0(\theta + \alpha)$ (ср. с (4.2)).

Выражение Ξw^0 определяется согласно (2.3) и содержит слагаемые $N_k w^0$, где $N_k(\nabla_y)$ — дифференциальные операторы порядков $k = 0, \ldots, 3$. Если $k \leqslant 2$, то вместо $N_k w^0$ в Ξw^0 включим аналогичную (5.4) величину $N_k w^0 - \chi_0 \sum c_\pm N_k U_\pm$. Если же $k = 3$, то в качестве замены для $N_k w^0$ берется величина

$$(1 - \chi_0 (h^{-1} r)) \left\{ N_k (\nabla_y) w^0 (y) - \chi_0 (r) \sum_\pm c_\pm N_k (\nabla_y) U_\pm (y) \right\} \tag{5.5}$$

Иными словами, как и ранее для v^2, часть сингулярных составляющих поля Ξw^0 относится к трехмерному пограничному слою. Кроме того, разность $\mathbf{w}^0 = w^0 - \chi_0 \sum c_\pm U_\pm$ принадлежит $W_2^3 (\Omega)$, но может не попасть в $W_2^4 (\Omega)$. В последнем случае отсутствует необходимое включение $N_3 \mathbf{w}^0 \in W_2^1 (Q_h)$, что исправляется умножением на срезку, равную нулю при малых $h^{-1} r$. Подобным образом поступим и с решениями w^1 и $\zeta_\pm$; в силу (3.7) и (3.5) функции $\mathbf{w}^1 = w^1 - \chi_0 \sum c_+ W_\pm$ и $\boldsymbol{\zeta}_\pm = \zeta_\pm - \chi_0 Z_\pm$ содержатся в $W_2^2 (\Omega)$, и поэтому для выражений $N_k w^1$, $N_k \zeta_\pm$ предписывается изменение вида (5.4) при $k = 0, 1$ и вида (5.5) при $k = 2, 3$.

Обозначим через $\mathbf{V} (h, x)$ правую часть равенства (5.3), в которой совершена указанная выше перестройка, а через $\mathbf{Y} (h, x)$ — сумму (5.1), умноженную на срезку $\chi_0 (r)$, и положим $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{Y}$. Так определяется глобальное приближение к решению задачи (1.1)—(1.3). Подчеркнем, что приведенная сложная конструкция нужна лишь для строгой формулировки оценки остатка. Асимптотически оправданным является и применение разных разложений для различных зон: вне малой окрестности ребра ω пригодно приближение (5.3), а внутри этой окрестности — (5.1).

Если теперь, действуя аналогично [6, 14, 15], подставить в уравнения (1.1)—(1.3) найденную функцию $\mathbf{U}$, вычислить и оценить появившуюся невязку, а затем воспользоваться неравенством Корна, то в результате получится соотношение

$$\begin{gathered} \| (d + h)^{-2} (u_3 - \mathbf{U}_3) \| + h^{-1} \| (d + h)^{-1} (u_j - \mathbf{U}_j) \| + \| (d + h) \nabla_y (u_3 - \mathbf{U}_3) \| + \\ + h^{-1} \| \nabla_y (u_j - \mathbf{U}_j) \| + h \| (d + h)^{-2} \partial (u_3 - \mathbf{U}_3) / \partial x_3 \| + \| (d + h)^{-1} \partial (u_j - \mathbf{U}_j) / \partial x_3 \| + \\ + h^{-1} \| \sigma_{jk} (u - \mathbf{U}) \| + \| (d + h)^{-1} \sigma_{j3} (u - \mathbf{U}) \| + \| \sigma_{33} (u - \mathbf{U}) \| \leqslant \\ \leqslant c h^{-1} \{ \| r^{2 - l \alpha - \varepsilon} p \| + \| r^{1 - l \alpha - \varepsilon} \nabla_y p \| \}, \quad j, k = 1, 2 \end{gathered} \tag{5.6}$$

в котором $0 < \varepsilon$ — любое число. Весовые множители включены в нормы функции p для того, чтобы обеспечить [9] справедливость разложений (3.4) и (3.7). Оценки остатков в разложениях также следовало бы переписать в терминах весовых классов Соболева [9] — этот факт игнорируется для упрощения изложения; к тому же (не обязательное) предположение о нагрузке p, указанное в начале разд. 3, исчерпывает все вопросы.

В случае $\alpha = \pi$ (трещина) асимптотика незначительно модифицируется из-за присутствия $\ln \rho = \ln r - \ln h$ в функции $W_- (\eta')$ (см. (3.10)). Исходная формула (5.3) видоизменяется так:

$$\begin{gathered} V (h, x) = V^\circ (h, x) + \mu^{-1} h^{-2} \{ c_+ k_+ (\pi, \nu) \Xi (h, h^{-1} x_3, \nabla_y) \zeta_+ (y) + \\ + c_- [k_- (\pi, \nu) + {}^2/_3 c (\nu) (1 - \nu)^{-1} \ln h] \Xi (h, h^{-1} x_3, \nabla_y) \zeta_- (y) \} \end{gathered} \tag{5.7}$$

Все дальнейшие преобразования остаются теми же, но вместо множителя h^{-1} справа в (5.6) пишется $h^{-1-\varepsilon}$ (ввиду возникновения логарифмов; см. разд. 4).

Обсудим, наконец, случай $\alpha \in (0, {}^1/_2 \pi)$, когда построение асимптотики упрощается благодаря возможности отнести члены пограничного слоя в остаток. Если решения w^0 и w^1 попадают соответственно в пространства $W_2^4 (\Omega)$ и $W_2^3 (\Omega)$ (угол α мал), то напряжения, рассчитанные по функциям w^0 и w^1 при помощи формул (2.4), (2.5) (см. разд. 5 [6]) принадлежат $L_2 (Q_h)$. Значит, сама величина (5.3) годится в качестве асимптотического приближения, и при $\mathbf{U} = V$ справедливо неравенство (5.6). Если же w^0 содержится в $W_2^3 (\Omega)$ (при $\alpha \in (0, {}^1/_2 \pi)$ это имеет место всегда), но не в $W_2^4 (\Omega)$, то при учете в (5.3) вклада решения w^1 необходимо умножить на срезку $1 - \chi_0 (h^{-1} r)$ члены разложения функции $N_3 w^1$, выводящие из класса $W_2^1 (Q_h)$ (ср. с (5.5)). Совершаемая при этом ошибка составляет $o (h^{-1})$.

6. Обсуждение. Если боковая поверхность S_h гладкая, то вдали от края пластины влияние плоского пограничного слоя сводится в главном к замене решения Кирхгофа $h^{-3} w^0$ суммой $h^{-3} w^0 + h^{-2} w^1$, причем поправка следующего порядка имеет вид $h^{-1} w^2$. Из формулы (5.3) вытекает, что дополнительный вклад угловой точки контура $\partial \Omega$ устанавливается таким приближением к прогибу пластины:

$$h^{-3} w^\circ + h^{-2} w^1 + \mu^{-1} \sum_\pm h^{2 \Lambda_\pm (\alpha) - 3} c_\pm k_\pm (\alpha, \nu) \zeta_\pm \tag{6.1}$$

При $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$ верно неравенство $\operatorname{Re} \Lambda_\pm (\alpha) > 1$, т. е. третье выражение в (6.1) слабее, чем величина $h^{-1}w^2$. В случае $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi)$ (входящий угол) по крайней мере один из показателей $2\Lambda_\pm(\alpha) - 3$ меньше -1, а значит, возмущение, вызванное угловой точкой, сильнее, чем $h^{-1}w^2$; однако по-прежнему основной поправкой служит член $h^{-2}w^1$, построенный в [6]. Наконец, для трещины согласно (5.7) к сумме (6.1) добавляется слагаемое ${}^2/_3 c_- c(\nu)[\mu(1-\nu)]^{-1}\zeta_- h^{-2}\ln h$, которое и является главным возмущением решения Кирхгофа $h^{-3}w^\circ$.

Вычислим первые члены асимптотики потенциальной энергии деформации пластины

$$U_h(u) = E_h(u) - A_h = -{}^1/_2 A_h = -{}^1/_4 \sum_\pm \int_\Omega p(y)\, u_3(h, y \pm {}^1/_2 h)\, dy \quad (6.2)$$

Здесь $E_h(u)$ — функционал упругой энергии, A_h — работа внешних сил. Подставляя в (6.2) найденное приближение к решению задачи (1.1)—(1.3) и вспоминая оценку (5.6), выводим, что при $\alpha \in ({}^1/_2\pi, \pi)$ справедливо соотношение

$$U_h(u) = -{}^1/_2 h^{-3} \int_\Omega p\left(w^\circ + hw^1 + \sum_\pm \mu^{-1} h^{2\Lambda_\pm(\alpha)} c_\pm k_\pm(\alpha, \nu)\, \zeta_\pm\right) dy + O(h^{-1})$$

Воспользуемся уравнениями (2.1), (2.8) и проинтегрируем по частям в Ω, а также применим равенства (3.6). В результате получаем асимптотическую формулу

$$U_h(u) = -{}^1/_2 h^{-3}\mathbf{E}_1(w^\circ) + {}^1/_2 h^{-2} c(\nu) D_1 \int_{\partial\Omega} |\Delta_y w^\circ(y)|^2 ds_y -$$
$$- {}^1/_2 \mu^{-1} \sum_\pm h^{2\Lambda_\pm(\alpha)-3} k_\pm(\alpha, \nu)\, c_\pm{}^2 + O(h^2) \quad (6.3)$$

Здесь $\mathbf{E}_h(w^0)$ — упругая энергия деформации пластины Кирхгофа. Согласно сказанному ранее, при $\alpha \in (0, {}^1/_2\pi)$ из асимптотики исчезает сумма по $\pm$. Если же $\alpha = \pi$, то в силу (3.4), (3.9) интеграл по контуру $\partial\Omega$ расходящийся, и соотношение (6.3) нуждается в исправлении. Приведем соответствующие выкладки (они в основном повторяют вывод [8] равенств (3.6)). Положим $\Omega(\delta) = \{y \in \Omega : r > \delta\}$ и $\Gamma(\delta) = \{y \in \partial\Omega : r > \delta\}$, где $\delta > 0$. Вспоминая специальную нормировку угловой части (3.10), упомянутую в конце разд. 3, получаем при помощи формулы Грина, что

$$D_1^{-1}\, pw^1\, dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega(\delta)} w^1 \Delta_y{}^2 w^2\, dy =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\partial\Omega(\delta)} \left(w^1 \Delta_y \frac{\partial w^0}{\partial n} - \frac{\partial w^1}{\partial n}\Delta_y w^0 + \frac{\partial w^0}{\partial n}\Delta_y w^1 - w^0 \Delta_y \frac{\partial w^1}{\partial n}\right) ds_y =$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\left\{\langle w^0, w^1\rangle_\delta - c(\nu)\int_{\Gamma(\delta)} |\Delta_y w^0(y)|^2 ds_y\right\} =$$
$$= -c(\nu) \lim_{\delta\to 0}\left\{8c_-{}^2 A^2 \ln\delta + \int_{\Gamma(\delta)} |\Delta_y w^0(y)|^2 ds_y\right\} \equiv -c(\nu)\, L(w)$$

Так как в силу (3.4), (3.9) $|\Delta_y w^0(y)|^2 = 4r^{-1}(Ac_- \sin{}^1/_2\theta)^2 + O(r^{-1/2})$, то предел $L(w^0)$ существует. Значит, при учете дополнительного по сравнению с (5.3) слагаемого в (5.7) выводим

$$U_h(u) = -{}^1/_2 h^{-3}\mathbf{E}_1(w^0) - {}^1/_3 \mu^{-1} h^{-2} \ln h\, c(\nu)(1-\nu)^{-1} c_-{}^2 +$$
$$+ {}^1/_2 h^{-2}\left[c(\nu) D_1 L(w^0) - \mu^{-1}\sum_\pm k_\pm(\pi, \nu)\, c_\pm{}^2\right] + O(h^{-1-\varepsilon}) \quad (6.4)$$

Подчеркнем, что для вычисления всех членов асимптотики (6.3) или (6.4), уточняющей классические формулы, нужна лишь информация о решении w^0 задачи (2.1) и значения трех величин $c(\nu)$ и $k_\pm(\alpha, \nu)$, характеризующих пограничные слои. Аналогично изложенному в разд. 8 [6] можно получить подобные же выражения для собственных частот изгибных колебаний пластины.

Отметим, наконец, что метод сращиваемых асимптотических разложений ([12] и др.) позволяет построить и полный асимптотический ряд для решения задачи (1.1)—(1.3) в случае нагрузки p, гладкой на $\overline{\Omega}$. В отличие от ряда (2.7) этот ряд содержит члены типа трехмерного пограничного слоя; кроме того, показатели степеней h не являются целыми и представляют собой линейные комбинации (с целыми коэффициентами) корней уравнения (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих оболочек: М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141—161.
4. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
5. *Gregory R. D., Wan F. V. M.* Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elast. 1984. V. 14. № 1. P. 27—64.
6. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 622—650.
7. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
8. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. B. 76. S. 29—60.
9. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
10. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
11. *Назаров С. А.* Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН Арм ССР. 1988. Т. 87. № 3. С. 156—159.
12. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. *Назаров С. А., Ромашев Ю. А.* Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами // Изв. АН АрмССР. Механика, 1982. № 4. С. 30—40.
14. *Шойхет Б. А.* Одно энергетическое тождество в физически нелинейной упругости и оценки погрешности уравнения плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 317—326.
15. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1032—1048.

Ленинград

Поступила в редакцию
2.VII.1990