Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.35

Е. В. Синицын

ЭВОЛЮЦИЯ И РЕЗОНАНСЫ ВО ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Исследуется явление приливной эволюции в движении планет Солнечной системы с использованием многопараметрической модели линейной теории вязкоупругости. Планета моделируется близким к шару вязкоупругим телом, центр масс которого движется по эллиптической орбите. Методом усреднения получены уравнения, описывающие эволюцию плоского вращательного движения в нерезонансном и резонансном случаях. Предельная угловая скорость и условия существования устойчивого резонансного вращения получены как функции эксцентриситета и параметров, характеризующих свойства материала планеты. Указаны области изменения этих параметров, при которых результаты совпадают с полученными ранее на основе гипотез о структуре момента приливных сил [1, 2] либо с использованием модели Кельвина — Фойгта для материала планеты и введения дополнительных предположений о его свойствах [3, 4].

1. Рассмотрим однородное изотропное вязкоупругое тело (планету) плотности ρ из материала со следующими свойствами: коэффициент Пуассона ν не зависит от времени, а определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости при малых деформациях [5—7] представляются в виде

$$\sigma_{kk} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\left(E\varepsilon_{kk} + \eta\dot{\varepsilon}_{kk} + \int_0^t \mu(t-\xi)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\xi}d\xi\right)$$
$$s_{ij} = 2\left(Ee_{ij} + \eta\dot{e}_{ij} + \int_0^t \mu(t-\xi)\frac{\partial e_{ij}}{\partial\xi}d\xi\right) \tag{1.1}$$

Здесь σ_{kk}, ε_{kk} и s_{ij}, e_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — шаровые части и компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно, E и η — постоянные характеризующие вязкоупругие свойства материала, $\mu(t-\xi)$ — функция релаксации, которую можно представить в виде [5]

$$\mu(t-\xi) = \sum_{l=1}^{M} G_l \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_l}\right) \tag{1.2}$$

где G_l, τ_l — материальные постоянные, определяемые из эксперимента.

Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — инерциальная система координат с началом в притягивающем центре и центр масс C планеты описывает относительно точки O эллиптическую орбиту с эксцентриситетом e, лежащую в плоскости $O\xi_1\xi_2$ (ось $O\xi_1$ направлена на перицентр). Свяжем с планетой «среднюю» систему координат $Cx_1x_2x_3$ согласно условиям (см., например, [8])

$$\int \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\,\rho dx = 0, \quad \int \mathbf{r}\times\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\,\rho dx = 0, \quad dx = dx_1dx_2dx_3$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ — радиус-вектор точки недеформированного тела, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — ее смещение. Интегрирование здесь и далее ведется по области, занимаемой телом в недеформированном состоянии.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{R} = OC$, ω — угловая скорость трехгранника $Cx_1x_2x_3$, $\gamma = \mathbf{R}\,|R|^{-1}$, a_i — проекция вектора $\mathbf{a}$ на оси Cx_i $(i = 1, 2, 3)$.

Предполагается, что движение центра масс планеты не зависит от движения относительно центра масс. Тогда

$$\frac{\mu}{R^3} = \frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\vartheta)^3$$

где μ — гравитационная постоянная, ω_0 — орбитальная угловая скорость центра масс в среднем движении, $\vartheta(t)$ — истинная аномалия:

$$\vartheta^{\cdot} = \frac{\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\vartheta)^2 \tag{1.3}$$

Потенциальная энергия гравитационных сил с точностью до $(L/R)^2$ (L — характерный размер планеты) представляется в виде

$$\Pi = -\frac{\mu}{R}\int\left(1-\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{u},\gamma)}{R}-\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{u})^2}{2R^2}+\frac{3(\mathbf{r}+\mathbf{u},\gamma)^2}{2R^2}\right)\rho\,dx$$

Составим систему уравнений, описывающую движение осей $Cx_1x_2x_3$ и деформацию планеты.

Изменение главного момента количеств движения относительно центра масс описывается уравнением

$$\mathbf{K}^{\cdot}+\omega\times\mathbf{K}=\mathbf{M} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{K}=\int(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times(\omega\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})+\mathbf{u}^{\cdot})\rho\,dx$$

$$\mathbf{M}=\gamma\times\operatorname{grad}_\gamma\Pi$$

Уравнения движения сплошной среды запишем в виде

$$u_i^{\cdot\cdot}=\rho^{-1}\sigma_{ij,j}+F_i \tag{1.5}$$

$$\mathbf{F}=-\omega\times(\omega\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}))-\omega^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})-2\omega\times\mathbf{u}^{\cdot}-\rho^{-1}\operatorname{grad}_{\mathbf{u}}\Pi$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, $\mathbf{F}$ — поле массовых сил. Граница тела свободна от напряжений.

Система (1.3)—(1.5) замыкается кинематическими уравнениями Пуассона.

2. Предположим, что период свободных упругих колебаний планеты и время их затухания много меньше периода обращения центра масс по орбите. Введем малый параметр ε $(0<\varepsilon\ll 1)$. Если Ω_1 — наименьшая частота свободных упругих колебаний ($\eta=0$, $\mu(t-\xi)\equiv 0$), то $\varepsilon = (\omega_0/\Omega_1)^2$.

В (1.1), (1.2) положим

$$E=\frac{1}{\varepsilon}E^\circ,\quad \eta=\frac{1}{\varepsilon}\eta^\circ,\quad \mu(t-\xi)=\frac{1}{\varepsilon}\mu^\circ(t-\xi),\quad G_l=\frac{1}{\varepsilon}G_l^\circ \tag{2.1}$$

Величины $|\omega|$ и ω_0 считаем одного порядка. Предположение о постоянстве коэффициента Пуассона позволяет искать перемещения в виде [5]

$$\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\,\mathbf{U}_n(\mathbf{r}) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{U}_n(\mathbf{r})$ — собственные формы упругих колебаний.

Подставим ряд (2.2) в (1.4), (1.5) и сделаем замену переменных $q_n = \varepsilon q_n^*$ ($\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\varepsilon\mathbf{u}^*(\mathbf{r},t)$). Получим систему сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерры. Можно показать, что построение асимптотики возможно методом пограничных функций [9]. Пренебрегая экспоненциально затухающей (с показателем экспоненты порядка ε^{-1}) частью асимптотического разложения типа пограничного слоя, находим, что уравнения для определения q_n^* (с учетом членов при

ε^0) описывают квазистатический процесс деформаций. Далее будем считать, что поверхность планеты близка к сферической и в сферических координатах имеет вид

$$r = r_0 + \varepsilon f(\varphi, \psi) \tag{2.3}$$

где f — некоторая функция, явный вид которой в дальнейшем не понадобится.

Используя алгоритм построения асимптотики [10] для поверхности вида (2.3), имеем, что в пределах рассматриваемой точности по ε поле смещений есть поле смещений вязкоупругого шара радиуса r_0.

Планета может двигаться так, что ось Cx_3 «средней» системы координат все время ортогональна плоскости орбиты [8]. Уравнение (1.4) при учете линейных по ε членов приобретает вид

$$\begin{aligned}\omega_3^{\cdot} = 3\,\frac{\mu(A-B)}{R^3C}\gamma_1\gamma_2 - \frac{\varepsilon}{C}\Big(\mathbf{e}_3,\ \frac{3\mu}{R^3}\gamma\int((\mathbf{u}^*,\gamma)\,\mathbf{r} + (\mathbf{r},\gamma)\,\mathbf{u}^*)\,\rho\,dx +\\ + \frac{d}{dt}\int(\mathbf{u}^*\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^*))\,\rho\,dx +\\ + \boldsymbol{\omega}\times\int((\mathbf{u}^*\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^*))\,\rho\,dx)\end{aligned} \tag{2.4}$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции недеформированного тела, $\mathbf{e}_3$ — орт оси Cx_3. Величина $(A-B)/C = O(\varepsilon)$.

Обозначим через φ_1 угол между осями Cx_1 и $C\xi_1$ «средней» и кениговой систем координат. Тогда

$$\gamma_1 = \cos(\varphi_1 - \vartheta),\quad \gamma_2 = -\sin(\varphi_1 - \vartheta),\quad \gamma_3 = 0$$
$$\omega_1 = 0,\quad \omega_2 = 0,\quad \omega_3 = \varphi_1^{\cdot}$$

При $\varepsilon = 0$ из (2.4) имеем $\varphi_1^{\cdot} = \text{const}$. Такое движение — порождающее для определения поля смещений.

Решение квазистатической задачи о деформациях вязкоупругого шара будем искать при помощи принципа соответствия упругой и вязкоупругой задач [5, 6]. Для этого в изображении Лапласа по времени от упругого смещения надо заменить модуль сдвига G на

$$G_v = E + \eta s + \sum_{l=1}^{M}\frac{G_l s}{s + \tau_l^{-1}}$$

где s — параметр преобразования. Затем, используя равенство [6]

$$G_v^{-1} = \sum_{l=1}^{M+1}\frac{C_l\delta_l}{\delta_l + s} \tag{2.5}$$

(C_l, δ_l — положительные размерные постоянные) и вычисляя оригинал, найдем поле смещений вязкоупругой задачи.

Решение квазистатической задачи о деформациях упругой планеты ($\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$) имеет вид [3]

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\rho\omega_3^2}{2G}\mathbf{w}^*(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{w}_2 = -\frac{3\mu\rho}{2R^3G}O_1^{-1}\mathbf{w}^*(O_1\mathbf{r}) \tag{2.6}$$

$$\mathbf{w}_3 = -\frac{\mu\rho(1-2\nu)}{R^3G2\upsilon(1-\nu)}\left[r^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu}r_0^2\right]\mathbf{r}$$

$$O_1 = \begin{Vmatrix}\sin(\varphi_1-\vartheta) & \cos(\varphi_1-\vartheta) & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos(\varphi_1-\vartheta) & -\sin(\varphi_1-\vartheta) & 0\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{w}^*(\mathbf{r}) = [(B_1\mathbf{r}, \mathbf{r})\,B_2 + (B_3\mathbf{r}, \mathbf{r})\,B_4 + B_5]\,\mathbf{r}$$

$$B_1 = \mathrm{diag}\,\{b_1, b_1, b_2\}, \quad B_2 = \mathrm{diag}\,\{1, 1, 0\}, \quad B_3 = \mathrm{diag}\,\{a_1, a_1, a_2\}$$
$$B_4 = \mathrm{diag}\,\{0, 0, 1\}, \quad B_5 = \mathrm{diag}\,\{c_1, c_1, c_2\}$$
$$a_1 = 2(3-\nu)\,\alpha(\nu), \quad a_2 = (1+3\nu)\,\alpha(\nu)$$
$$b_1 = -(4-3\nu-5\nu^2)\,\alpha(\nu), \quad b_2 = -(9-8\nu-5\nu^2)\,\alpha(\nu)$$
$$\alpha(\nu) = {}^1/_5\,(1-\nu)^{-1}(5\nu+7)^{-1}$$
$$c_1 = \frac{r_0^2(12-8\nu-12\nu^2)}{(1+\nu)(35-10\nu-25\nu^2)}, \quad c_2 = -\frac{r_0^2(3+18\nu-3\nu^2-10\nu^3)}{(1+\nu)(35-10\nu-25\nu^2)}$$

При определении $\varepsilon\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t)$ далее потребуются разложения ($f_k^{\pm}(e)$ — степенные ряды по e):

$$(1+e\cos\vartheta)^3\cos 2\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^+(e)\cos k\omega_0 t$$
$$(1+e\cos\vartheta)^3\sin 2\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^-(e)\sin k\omega_0 t$$
$$f_k^{\pm}(e) = (1-e^2)^3\,(\Phi_k(e) \pm \Phi_{-k}(e))$$
$$\Phi_n(e) = \frac{1}{\pi(1-e^2)^{3/2}}\int_0^{\pi}(1+e\cos\nu)\cos(n\omega_0 t - 2\vartheta)\,d\vartheta, \qquad n\in Z \qquad (2.7)$$

При помощи принципа соответствия при учете (2.5)—(2.7) находим поле смещений вязкоупругого шара. Уравнение (2.4) после подстановки $\varepsilon\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t)$ можно записать в стандартной форме

$$\varphi_1^{\cdot} = x, \quad \varphi_2^{\cdot} = \omega_0, \quad x^{\cdot} = \varepsilon F^*(\varphi_1, \varphi_2, x) \qquad (2.8)$$

где εF^* — линейная по ε часть разложения правой части уравнения (2.4), разрешенного относительно $\omega_3^{\cdot} = x^{\cdot}$.

3. Усредним третье из уравнений (2.8) по «быстрым» переменным φ_1 и φ_2. Получаем уравнение (здесь и далее в окончательных результатах сделаем обратную замену $\varepsilon\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$), описывающее эволюцию вращательного движения планеты в нерезонансном случае

$$x^{\cdot} = -k_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi_k^2(e)\sum_{l=1}^{M+1}C_l\delta_l\,\frac{2x-k\omega_0}{\delta_l^2+(2x-k\omega_0)^2} \qquad (3.1)$$
$$k_1 = {}^9/_2\,\omega_0^4\rho^2C^{-1}\int\{[(b_1-a_1)(x_1^2-x_2^2)+(b_2-a_2)x_3^2+c_2-c_1]\times$$
$$\times(x_1^2+x_3^2)+2(a_1-a_2+b_1-b_2)x_1^2x_3^2\}\,dx>0$$

Положения равновесия уравнения (3.1) x_* (стационарные вращения планеты с угловой скоростью $\omega_3 = x_*$) будем искать в виде ряда по степеням эксцентриситета

$$x_* = \omega_0\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i e^i \qquad (3.2)$$

Подставим разложение (3.2) в правую часть (3.1). Разлагая в ряд и приравнивая нулю коэффициенты при e^k ($k = 0, 1, \ldots$), находим, что положение равновесия единственно. При учете первых членов в разложениях $\Phi_k(e)$ [1, 11] получаем коэффициенты

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 6\Sigma_1^{-1}\Sigma_2, \quad \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_4 = {}^1/_8\,\Sigma_1^{-1}(25\Sigma_2 + 578\Sigma_3 - 100\alpha_2\Sigma_4)$$
$$\Sigma_1 = \sum_{l=1}^{M+1}\frac{C_l}{\delta_l}, \quad \Sigma_2 = \sum_{l=1}^{M+1}\frac{C_l\delta_l}{\delta_l^2+\omega_0^2} \qquad (3.3)$$
$$\Sigma_3 = \sum_{l=1}^{M+1}\frac{C_l\delta_l}{\delta_l^2+4\omega_0^2}, \quad \Sigma_4 = \sum_{l=1}^{M+1}C_l\delta_l\,\frac{\delta_l^2-\omega_0^2}{(\delta_l^2+\omega_0^2)^2}$$

Анализ уравнения (3.1) в окрестности положения равновесия x_* показал, что оно асимптотически устойчиво. Таким образом, в процессе эволюции угловая скорость стремится к стационарному значению x_*.

Если положить $M = 0$ (модель Кельвина — Фойгта) и принять

$$\delta_1 = \chi d_1, \; d_1 = \text{const}, \quad \chi \sim \varepsilon^{\delta}, \; {}^1/_2 < \delta < 1 \tag{3.4}$$

то получим модель, используемую в работах [3—5]. При указанных предположениях при учете линейных по χ членов из (3.2), (3.3) следует разложение по степеням эксцентриситета известного [2] выражения для предельной угловой скорости, найденной в предположении, что угол запаздывания «приливного горба» пропорционален угловой скорости.

4. В процессе эволюции траектории системы (2.8) пересекают резонансные поверхности (в одномерном пространстве x резонансная поверхность есть точка)

$$2x - m\omega_0 = 0, \; m \in Z$$

В окрестности резонанса вводим новые переменные по формулам [12]

$$x = x_0 + \sqrt{\varepsilon} q, \; \theta = 2\varphi_1 - m\varphi_2, \; x_0 = {}^1/_2 m\omega_0$$

Из системы (2.8) с точностью до $\sqrt{\varepsilon}$ получаем

$$\dot{\varphi}_1 = x_0 + \sqrt{\varepsilon} q, \; \dot{\theta} = 2\sqrt{\varepsilon} q, \; \dot{q} = \sqrt{\varepsilon} F^* (\varphi_1, \theta, q) \tag{4.1}$$

Усредним второе и третье уравнения (4.1) по быстрой фазе φ_1, полученную систему запишем в виде одного уравнения второго порядка

$$\ddot{\theta} + k_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(e) \sum_{l=1}^{M+1} C_l \delta_l \frac{(m-k)\,\omega_0 + \dot{\theta}}{\delta_l^2 + ((m-k)\,\omega_0 + \dot{\theta})^2} + k_2 \Phi_m(e) \sin\theta = 0 \tag{4.2}$$

$$k_2 = \frac{3(B-A)}{2C}\,\omega_0^2$$

описывающего эволюцию вращательного движения планеты в окрестности резонанса.

Если выполнено неравенство

$$k_2 \,|\Phi_m(e)| > k_1 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(e) \sum_{l=1}^{M+1} \frac{C_l \delta_l (m-k)\,\omega_0}{\delta_l^2 + (m-k)^2\,\omega_0^2} \right| \tag{4.3}$$

то уравнение (4.2) имеет две особые точки. Неравенство (4.3) является условием существования резонансного вращения планеты с угловой скоростью $\omega_3 = {}^1/_2 m\omega_0$.

Анализ особых точек уравнения (4.2) показывает, что одна из особых точек — седло, а другая — фокус. При выполнении неравенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(e) \sum_{l=1}^{M+1} C_l \delta_l \frac{\delta_l^2 - (m-k)^2\,\omega_0^2}{(\delta_l^2 + (m-k)^2\,\omega_0^2)^2} > 0 \tag{4.4}$$

фокус асимптотически устойчив, в противном случае — неустойчив.

В процессе эволюции вращательного движения планеты ее угловая скорость достигает резонансного значения. При подходе к резонансу, в зависимости от параметров орбиты и параметров, характеризующих свойства материала, возможны три качественно различных случая:

а) неравенство (4.3) выполнено с обратным знаком — «захват» в резонанс невозможен;

б) условие (4.3) выполнено, а неравенство (4.4) выполнено с обратным знаком — «вероятность захвата» [1] в резонансное вращение равна нулю;

в) выполнены условия (4.3) и (4.4) — часть траекторий захватывается в резонанс, так как в этом случае уравнение (4.2) имеет асимптотически устойчивую особую точку.

В случаях б) и в) существует по две траектории, стремящихся к неустойчивой особой точке типа седло (сепаратрисы).

5. Сравним полученные результаты с известными [1—4].

Усредненный по времени приливной момент ($\langle T\rangle$) согласно теории Дарвина имеет вид [1]

$$\langle T\rangle = -k_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(e) \sin\delta(2x - k\omega_0), \quad k_0 = \mathrm{const} \tag{5.1}$$

где $\delta(\omega)$ — угол запаздывания компоненты прилива с частотой ω. Две обычно употребляемые модели для $\delta(\omega)$ имеют вид [1, 2]

$$\sin\delta \sim \delta \sim k'\omega, \quad k' = \mathrm{const} \tag{5.2}$$

$$\sin\delta \sim k'' \,\mathrm{sign}\,\omega, \quad k'' = \mathrm{const} \tag{5.3}$$

В нашем случае усредненный по времени приливной момент определяется правой частью уравнения (3.1). Из сопоставления величин (5.1) и (3.1) видно, что в рассматриваемом случае

$$\sin\delta \sim \sum_{l=1}^{M+1} C_l \delta_l \frac{\omega}{\delta_l^2 + \omega^2} \tag{5.4}$$

Отметим, что соотношения (5.2) и (5.3) носят характер предположений, в то время как (5.4) получено на основе точного решения квазистатической задачи о деформациях вязкоупругого шара.

Если в (5.4) положить $\delta_l = \chi d_l$, $l = 1, \ldots, M+1$ (аналогично (3.4)), то при учете линейных по χ членов получим модель, эквивалентную (5.2).

Параметры C_l, δ_l, M можно выбрать так (например, методом наименьших квадратов), что в рассматриваемом интервале угловых скоростей величина (5.4) будет с высокой степенью точности аппроксимировать сигнатурную модель (5.3).

Сопоставление модели материала, используемой в данной работе, и модели работ [3, 4] даны в разд. 3.

Таким образом, известные модели приливных явлений можно получить выбором параметров, определяющих свойства материала, в рассмотренной многопараметрической модели вязкоупругости.

Автор благодарит А. П. Маркеева за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голдрайх П., Пил С.* Динамика вращения планет // Приливы и резонансы в Солнечной системе. М.: Мир, 1975. С. 130—167.
2. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
3. *Вильке В. Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1980. Т. 44. № 3. С. 395—402.
4. *Вильке В. Г., Копылов С. А., Марков Ю. Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 25—34.
5. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
6. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
7. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 2. С. 163—175.
9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
10. *Денисов Г. Г., Новиков В. В.* О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 43—50.
11. *Черноусько Ф. Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528—538.
12. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Болшево, Московская обл.

Поступила в редакцию
26.XI.1990