Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36 : 62—50

А. М. Ковалев

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для исследования нелинейных автономных систем управления применяется метод ориентированных многообразий (ОМ) [1]. В предположении, что граница ОМ является дифференцируемой, установлено ее уравнение, которое использовано для получения необходимых условий управляемости и оценок областей управляемости при наличии ограничений на управление.

1. Теорема об управляемости нелинейных систем. Изучаются динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x^{\cdot} = f(x, u) \tag{1.1}$$

где x — фазовый вектор, u — вектор управления на промежутке времени $T = [0, \infty)$ в обла ти $D = \{x\}$, которую считаем связным n-мерным C^r-многообразием ($r \geqslant 2$). Допустимыми управлениями являются ограниченные измеримые функции времени $u = u(t)$, принимающие значения в некотором множестве $U \subseteq R^m$. Будем также предполагать, что $\forall u \in U$ функция $f(x, u)$ $(r - 1)$ раз непрерывно дифференцируема на $D \times \overline{U}$.

Введем определения [2].

Определение 1. Точку $x_1 \in D$ будем называть достижимой из точки $x_0 \in D$, если существует траектория $x(t)$ системы (1.1) такая, что $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ для некоторого $t_1 \in T$. Множество всех точек, достижимых из точки $x \in D$, будем называть положительной орбитой точки x и обозначать $\mathrm{Or}^+ x$; множество $\mathrm{Or}^+ K = U\{\mathrm{Or}^+ x\colon\ x \in K\}$ — положительной орбитой множества $K \subset D$. Соответственно отрицательной орбитой точки x и множества K будем называть множества

$$\mathrm{Or}^- x = \{y \in D\colon\ x \in \mathrm{Or}^+ y\}, \quad \mathrm{Or}^- K = U\{\mathrm{Or}^- x\colon\ x \in K\}$$

Определение 2. Множество $K \subset D$ будем называть ориентированным относительно системы (1.1), если $K = \mathrm{Or}^+ K$ или $K = \mathrm{Or}^- K$.

Простейшими примерами ориентированных множеств являются D, $\varnothing$, $\mathrm{Or}^+ K$ ($K \subset D$). В теории систем известны геометрические объекты аналогичной природы: полупроницаемые поверхности в теории дифференциальных игр [3], линии односторонней штриховки [4], секреты, ловушки [5] в теории нелинейных систем и др.

Определение 3. Систему (1.1) будем называть управляемой, если $\forall x \in D$, $\mathrm{Or}^+ x = D$.

Данное определение управляемости совпадает с принятым в литературе определением глобальной управляемости.

Непосредственно из введенных определений следует теорема.

Теорема 1. Система (1.1) управляема тогда и только тогда, когда отсутствуют ориентированные относительно системы множества $N \neq \varnothing$, D.

Для произвольной системы управления ориентированные множества могут быть устроены сколь угодно сложно, и поэтому использование теоремы 1 для исследования малоконструктивно. Более конструктивный аппарат исследования управляемости может быть получен на основе понятия ориентированного многообразия (ОМ) [1]. Справедлива теорема [2].

Теорема 2. Система (1.1) управляема тогда и только тогда, когда отсутствуют ориентированные относительно системы (1.1) многообразия $N \neq \varnothing$, D.

2. Уравнения ориентированных многообразий. Условие ориентированности означает, что $\forall u \in U$ — векторы скорости $f(x, u)$ в точках границы направлены во внешность многообразия, если $K = \mathrm{Or}^- K$, либо во внутренность, если $K = \mathrm{Or}^+ K$. Проведем касательные плоскости в точках границы, считая ее дифференцируемой. Будем различать случаи многообразия полной размерности ($\dim N = n$) и неполной ($\dim N = s < n$).

В первом случае граница определяется уравнением $V(x) = 0$ ($V \in R^1$), а касательная плоскость в точке x_0 — $(x - x_0, \nabla V(x_0)) = 0$. Внутренность многообразия определяется направлением вектора $\nabla V(x_0)$, и из условия ориентированности следует $(f(x_0, u), \nabla V(x_0)) \geqslant 0$, $\forall u \in U$ либо $(f(x_0, u), \nabla V(x_0)) \leqslant 0$, $\forall u \in U$. Последние неравенства можно записать в виде равенства, если ввести в области $D \times U$ знакопостоянную $G(x, u)$ и непрерывную $\lambda(x, u)$ функции (ввиду произвольности точки x_0 индекс опускаем):

$$(f(x, u), \nabla V(x)) = \lambda(x, u) V(x) + G(x, u), \quad \forall u \in U \tag{2.1}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть в области $D \times U$ существуют знакопостоянная $G(x, u)$ и непрерывная $\lambda(x, u)$ функции такие, что $\forall u \in U$ уравнение (2.1) имеет в области D решение $V(x)$. Тогда в области D существует ОМ, граница которого определяется уравнением $V(x) = 0$. При этом система (1.1) неуправляема в области D.

Рассмотрим второй случай. Граница ОМ определяется уравнениями $V_i(x) = 0$ ($V_i \in R^1$), касательная плоскость в точке x_0 — $(x - x_0, \nabla V_i(x_0)) = 0$ ($i = 1, \ldots, n - s$). Внутренность определяется одним из векторов $\nabla V_i(x)$, пусть это будет $\nabla V_1(x)$; при этом должны выполняться равенства $V_2(x) = 0, \ldots, V_{n-s}(x) = 0$. Тогда из условия ориентированности следует

$$(f(x_0, u), \nabla V_1(x_0)) \geqslant 0, \quad (f(x_0, u), \quad \nabla V\ (x_0)) = 0 \quad (i = 2, \ldots, n - s)$$

$$\forall u \in U \text{ либо } (f(x_0, u), \nabla V_1(x_0) \leqslant 0, \quad (f(x_0, u), \ \nabla V_i(x_0)) = 0$$

Аналогично первому случаю последние соотношения можно записать в виде системы равенств, если в области $D \times U$ ввести знакопостоянную $G(x, u)$ и непрерывные функции $\lambda_{ij}(x, u)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n - s$)

$$(f(x,u), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{n-s} \lambda_{ij}(x, u) V_j(x) + G_i(x, u), \quad \forall u \in U \tag{2.2}$$

$$G_1(x, u) = G(x, u), \quad G_2 = \ldots = G_{n-s} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - s$$

Тем самым установлена теорема.

Теорема 4. Пусть в области $D \times U$ существуют знакопостоянна $G(x, u)$ и непрерывные функции $\lambda_{ij}(x, u)$ ($i, j = 1, \ldots, n - s$), такие, что $\forall u \in U$ система уравнений (2.2) имеет в области D решения $V_1(x), \ldots, V_{n-s}(x)$. Тогда в области D существует ОМ, граница которого определяется уравнениями $V_i(x) = 0$ ($i = 1, \ldots, n - s$). При этом система (1.1) неуправляема в области D.

Замечания. 1°. Уравнения (2.1), (2.2) и теоремы 3, 4 обобщают соответствующие уравнения и теоремы для инвариантных многообразий динамических систем [6] и систем управления [1] на случай ОМ систем управления.

2°. Уравнения, аналогичные (2.1), известны в теории устойчивости при применении метода функций Ляпунова. При этом существование функции Ляпунова приводит к существованию у соответствующего уравнения семейства решений $V(x) = c$ $(0 \leqslant c \leqslant c_0)$, что и обеспечивает устойчивость либо неустойчивость изучаемого решения. Аналогичная ситуация может случиться и в задаче управления, однако это необязательно, так как для неуправляемости достаточно существования лишь одного решения уравнения (2.1), что и может реализоваться для конкретной, возможно, сложно устроенной системы.

3. Управляемость нелинейных систем без ограничений на управление. Теоремы 3, 4 сводят решение вопроса об управляемости системы (1.1) к изучению существования решений систем дифференциальных уравнений (2.1) или (2.2). Последняя задача осложняется тем, что данные уравнения содержат управляющий параметр u, который в рассматриваемом случае может принимать любые значения из R^m. Эту трудность можно преодолеть, например, при помощи приема, аналогичного введению базисных систем [1] при построении инвариантных многообразий.

Ограничимся изучением уравнения (2.1). В каждой точке $x \in D$ представим вектор $f(x, u)$ в виде линейной комбинации векторных полей

$$f(x, u) = \alpha_1(x, u) f_1(x) + \ldots + \alpha_l(x, u) f_l(x) + \alpha_{l+1}(x, u) f_{l+1}(x) + \ldots \\ \ldots + \alpha_k(x, u) f_k(x) \tag{3.1}$$

$$\alpha_{l+1}(x, u) \geqslant 0, \ldots, \alpha_k(x, u) \geqslant 0, \quad \forall (x, u) \in D \times R^m$$

(коэффициенты $\alpha_1(x, u), \ldots, \alpha_l(x, u)$ принимают как положительные, так и отрицательные значения). Тогда если имеет решение $V(x)$ система уравнений:

$$(f_i(x), \nabla V(x)) = \lambda_i(x) V(x) + G_i \ (i = 1, \ldots, k) \tag{3.2}$$

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_l = 0, \quad G_j = G_j(x) \quad (j = l + 1, \ldots, k)$$

где $\lambda_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — непрерывные в D функции, а $G_j(x)$ — функции, знакопостоянные одного знака в D, то в силу представления (3.1) функция $V(x)$ будет решением уравнения (2.1), в котором функции

$$\lambda(x, u) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x, u) \lambda_i(x), \quad G(x, u) = \sum_{j=l+1}^{k} \alpha_j(x, u) G_j(x)$$

удовлетворяют требованиям теоремы 3. Тем самым доказана теорема.

Теорема 5. Пусть в области $D \times R^m$ функция $f(x, u)$ представима в виде (3.1) и существуют непрерывные в D функции $\lambda_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и знакопостоянные одного знака в D функции $G_j(x)$ $(j = l + 1, \ldots, k)$, такие, что система (3.2) имеет решение в области D. Тогда у системы (1.1) существует ОМ и система (1.1) неуправляема в области D.

Отметим, что если представление (3.1) возможно лишь при $l = n$, то ОМ (и тем более, инвариантного) не существует, что очевидно, так как в каждой точке движение возможно по всем направлениям. Если $l = k$, т. е. все $G_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, то решение системы (3.2) определяет инвариантное многообразие с границей $V(x) = 0$ (сама граница также является инвариантным многообразием). Для получения условий его существования может быть эффективно использован [1] аппарат скобок Якоби. При этом векторные поля $f_i(x)$ и функции $\lambda_i(x)$ должны быть дифференцируемыми, для чего необходимо потребовать дифференцируемость функции $f(x, u)$.

Для системы (3.2) общего вида существование решения ее первой подсистемы ($i = 1, \ldots, l$) проверяется при помощи скобок Якоби, как и при отыскании инвариантных многообразий [1]. В случае ее совместности изучение полной системы (3.2) требует дополнительных рассуждений, возможно, и не использующих скобок Якоби.

Так, для двумерных систем ориентированные многообразия могут существовать, если $f(x, u) = \alpha_1(x, u) f_1(x) + \alpha_2(x, u) f_2(x)$, $\alpha_2(x, u) \geqslant 0$. Система (3.2) состоит из двух уравнений

$$(f_1(x), \nabla V) = \lambda_1(x) V, \quad (f_2(x), \nabla V) = \lambda_2(x) V + G(x) \tag{3.3}$$

Считая функцию $f(x, u)$ достаточное число раз дифференцируемой, функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ выберем также дифференцируемыми и линейно-независимыми, т. е. $\det(f_1(x), f_2(x)) \neq 0 \quad \forall x \in D$. При этом первое из уравнений (3.3) всегда имеет решение $V = \varphi(x)$; функцию $\lambda_1(x)$ можно выбрать достаточно произвольно, примем $\lambda_1(x) = 0$. Тогда вектор $\nabla\varphi$ ортогонален вектору $f_1(x)$, и его проекция на вектор $f_2(x)$ не обращается в нуль, так как это означало бы коллинеарность векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$, что противоречит предположению об их линейной независимости в области D. Поэтому имеет место представление $\nabla\varphi(x) = \beta_1(x) f_1(x) + \beta_2(x) f_2(x)$, где $\beta_2(x)$ сохраняет знак. При подстановке $\nabla\varphi(x)$ во второе уравнение (3.3) получаем соотношение

$$\beta_1(x)(f_1(x), f_2(x)) + \beta_2(x) f_2^2(x) = \lambda_2(x)\varphi(x) + G(x)$$

которое удовлетворяется при $\lambda_2(x) = 0$, $G(x) = \beta_2(x)[f_2(x) - f_1^{-2}(x)(f_1(x), f_2(x)) f_1(x)]^2$.

Поскольку функция $G(x)$ сохраняет знак, то условия теоремы 5 выполнены, при сделанных предположениях существует ОМ и система неуправляема.

Пример. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = -y + x(u - u_0)^2, \quad y^{\cdot} = x + y(u - u_0)^2 \tag{3.4}$$

Имеем

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + (u - u_0)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

т. е. $\alpha_1 = 1 > 0$, $\alpha_2 = (u - u_0)^2 \geqslant 0$, $\det(f_1, f_2) = -x^2 - y^2$.

Таким образом, система (3.4) неуправляема в любой области, не содержащей начала координат.

Рассмотрение для данного случая системы (3.3) показывает, что система (3.4) неуправляема в любой области, так как система (3.3) допускает решение

$$V = x^2 + y^2 - c \; (\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \; G = 2(x^2 + y^2))$$

которое при соответствующем подборе постоянной c определяет ОМ N в любой области D.

4. Управляемость линейных систем с ограничениями на управление. Наличие ограничений на управление изменяет свойство управляемости даже линейных автономных систем, для которых критерия Калмана становится уже недостаточно, причем управляемость системы зависит и от характера ограничений: являются они геометрическими, интегральными или смешанными.

Пользуясь уравнением (2.1), изучим управляемость автономной системы

$$x^{\cdot} = Ax + bu \quad (x \in R^n, u \in R^1, n \geqslant 2) \tag{4.1}$$

при наличии геометрических ограничений

$$|u| < u_0 \tag{4.2}$$

Считаем, что система (4.1) записана в базисе, в котором матрица A имеет действительную жорданову форму. Рассмотрим ее управляемость в предположении, что без ограничений (4.2) она управляема, т. е. выполнено условие

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0 \tag{4.3}$$

Воспользуемся теоремой 3. Уравнение (2.1) для системы (4.1) имеет вид

$$(Ax + bu,\ \nabla V) = \lambda V + G \tag{4.4}$$

В зависимости от собственных значений матрицы A рассмотрим три случая.

Сначала предположим, что среди собственных значений имеется число $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ с ненулевой вещественной частью. Тогда матрица A и векторы x, b представим в виде $A^T = (A_1^T,\ A_2^T)$, $x^T = (x_1^T,\ x_2^T)$, $b^T = (b_1^T,\ b_2^T)$, где $x_1,\ b_1 \in R^2$ и

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

Уравнение (4.4) удовлетворяется, если принять

$$V = -c^2 + x_1^2,\quad \lambda = 0,\ G = 2\alpha x_1^2 + 2u\,(b_1,\ x_1)$$

При учете ограничения (4.2) и условия $\alpha \neq 0$ заключаем, что функция G знакопостоянна в области $D \times U$, $D = \{x\colon\ x_1^2 > \nu^2\}$, $U = \{u\colon\ |u| < u_0\}$ при $\nu^2 \geqslant u_0^2 b_1^2/\alpha^2$. По теореме 3 система (4.1) при ограничениях (4.2) неуправляема в области D, а значит, и в R^m. ОМ будет область, ограниченная эллиптическим цилиндром $x_1^2 = c$ при соответствующем выборе c.

Пусть теперь среди собственных значений имеется действительное число $\lambda_1 \neq 0$. Как и в предыдущем случае, выделим матрицу $A_1 = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$ и векторы x_1, $b_1 \in R^1$. Уравнение (4.4) удовлетворяется, если принять $V = -c + x_1$, $\lambda = 0$, $G = \lambda_1 x_1 + ub_1$. Функция G знакопостоянна в области $D \times U$, $D = \{x\colon\ |x_1| > \nu\}$, $U = \{u\colon\ |u| < u_0\}$ при $\nu \geqslant u_0/|\lambda_1 b_1|$. По теореме 3 система (4.1) при ограничениях (4.2) неуправляема в области D, а значит, и в R^n, ОМ будут области, ограниченные плоскостями $x_1 = c$ при соответствующем выборе c.

Осталось рассмотреть случай, когда все собственные значения чисто мнимые или нулевые. При этом найденные в предыдущих случаях функции G не являются знакопостоянными и изучение уравнения (4.4) значительно усложняется. Более того, оказывается, что система (4.1) в этом случае управляема в R^n, и значит, решений уравнения (4.4) со свойствами, указанными в теореме 3, не существует.

Для доказательства управляемости покажем существование управления, решающего конкретную двухточечную задачу $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ для системы (4.1). Потребуем, чтобы траектория лежала в шаре радиуса $R = 2\max(\|x_0\|, \|x_1\|)$. Тогда при учете выполнения условия (4.3) можно ввести новое управление $v = c^T x + u$, такое, что для $\|x\| < R$ будет выполнено условие $\|v\| \leqslant v_0$, где $0 < v_0 < u_0$, и все собственные значения матрицы $A - bc^T$ будут чисто мнимыми $\lambda_j = i\omega_j$ (ω_j несоизмеримы, $j = 1, \dots, k$) для четного $n = 2k$, а для нечетного $n = 2k + 1$ будет $\lambda_j = i\omega_j$ (ω_j несоизмеримы, $j = 1, \dots, k$), $\lambda_{2k+1} = 0$.

Вместо системы (4.1) с ограничением (4.2) будем рассматривать систему $x^{\cdot} = A_c x + bv$ ($A_c = A - bc^T$) с ограничением $|v| \leqslant v_0$, считая, что матрица A_c имеет действительную жорданову форму.

Сначала рассмотрим случай четного $n = 2k$. Поскольку при $v \equiv 0$ решения лежат на сфере, построение искомого управления проведем в два этапа. На первом этапе строим управление, переводящее систему с начальной сферы $x^2 = x_0^2$ на конечную $x^2 = x_1^2$ в некоторый момент t_*. Это всегда возможно, так как $V = x^2$ имеем $V^{\cdot} = 2x^T bv$ и $V^{\cdot} \geqslant 0$ при $v = v_0\operatorname{sign}(x^T b)$, $V^{\cdot} \leqslant 0$ при $v = -v_0 \operatorname{sign}(x^T b)$. Выбранное таким образом управление обеспечивает принадлежность траектории шару $\|x\| \leqslant \max(\|x_0\|, \|x_1\|)$. Затем при нулевом управлении попадаем в некоторый конечный момент времени t_1 в конечную точку x_1, если все величины $\Delta\varphi_j/\omega_j$ соизмеримы, либо в заданную сколь угодно малую окрестность точки x_1, если $\Delta\varphi_j/\omega_j$ несоизмеримы.

Здесь $\Delta\varphi_j = \varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_*)$ приращения полярных углов точек x_1, $x(t_*)$ в плоскостях, соответствующих собственным значениям λ_j. В последнем случае по теореме [7] $\forall\varepsilon > 0$ существует управление v, удовлетворяющее ограничению $|v| < \varepsilon$, переводящее систему из начальной точки $x(t_*)$ в любую точку некоторой окрестности точки $x(t_*) \exp A_c(t_1 - t_*)$ в том числе и в точку x_1. Тем самым доказано существование управления в данном случае.

Для нечетного n в отличие от рассмотренного случая на первом этапе необходимо в момент t_* не только попасть на конечную сферу $x^2 = x_1^2$, но и обеспечить выполнение условия $x_{2k+1}(t_*) = x_{2k+1,1}$. Для этого надо комбинировать найденное в предыдущем случае управление с нулевым, выбирая соответствующим образом моменты переключений. В остальном доказательство совпадает с предыдущим.

Тем самым доказана теорема.

Теорема 6. Система (4.1) управляема в R^n при ограничении (4.2) лишь в случае, когда выполнено условие (4.3) и все собственные значения матрицы A чисто мнимые (в том числе и нулевые), при этом значение u_0 может быть принято сколь угодно малым.

5. Оценка областей управляемости. Выше показано, что управляемая линейная система при наложении геометрических ограничений на управление может стать неуправляемой (во всем пространстве). Построенные в случаях неуправляемости ОМ отделены от нуля, и в некоторой области, содержащей начало координат, система оказывается управляемой, поскольку известно [7], что область управляемости содержит некоторую окрестность начала координат. Отсюда возникает задача описания области управляемости, решение которой, однако, встречает большие трудности даже для двумерных систем [5]. Проведенный анализ ориентированных многообразий позволяет найти радиус R_0 такой, что при $R > R_0$ система (4.1) неуправляема в шаре $\|x\| < R$ при $|u| \leqslant u_0$. Эта характеристика полезна при описании областей управляемости и может быть использована при количественной оценке качества системы управления.

Вычислим R_0 для системы (4.1) при ограничении (4.2). Пусть собственными значениями матрицы A являются k действительных чисел λ_j (среди которых k^+ положительных чисел λ_j^+ и k^- отрицательных λ_j^-) и m комплексных чисел $\varkappa_j = \alpha_j + i\beta_j$ (среди которых m^+ с положительной вещественной частью α_j^+ и m^- с отрицательной α_j^-). Координаты, соответствующие первым строкам соответствующих им действительных жордановых клеток, обозначим через $x_j^\pm$ и $\xi_j^\pm$, $\eta_j^\pm$, а соответствующие координаты вектора b — через $p_j^\pm$, и $\gamma_j^\pm$, $\delta_j^\pm$. Границы ориентированных многообразий получаются обращением в нуль следующих функций:

$$V_{1\nu}^{\pm} = -c^2 + \sum_{j=1}^{\nu} x_j^{\pm 2}, \quad V_{2\mu}^{\pm} = -c^2 + \sum_{j=1}^{\mu} (\xi_j^{\pm 2} + \eta_j^{\pm 2})$$

$$V_{\nu j}^{\pm} = c^2 + x_\nu^{\pm 2} - x_j^{\mp} \quad (\nu, j = 1, \ldots, k^\pm, \ \mu = 1, \ldots, m^\pm)$$

при условии, что знакопостоянны функции

$$G_{1\nu}^{\pm} = \dot{V}_{1\nu}^{\pm} = 2\sum_{j=1}^{\nu} (\lambda_j^\pm x_j^{\pm 2} + p_j^\pm x_j^\pm u)$$

$$G_{2\mu}^{\pm} = \dot{V}_{2\mu} = 2\sum_{j=1}^{\mu} [\alpha_j^\pm(\xi_j^{\pm 2} + \eta_j^{\pm 2}) + u(\xi_j^\pm\gamma_j^\pm + \eta_j^\pm\delta_j^\pm)]$$

$$G_{\nu j}^{\pm} = \dot{V}_{\nu j} = 2\lambda_\nu^\pm x_\nu^{\pm 2} - \lambda_j^\mp x_j^\mp + u(2x_\nu^\pm p_\nu^\pm - p_j^\mp)$$

(в приведенных формулах используются либо только верхние, либо только нижние знаки). Из условия знакопостоянства функций $G_{1\nu}^{\pm}$, $G_{2\mu}^{+}$ во всем пространстве, а функций $G_{\nu j}^{\pm}$ на многообразиях $V_{\nu j}^{\pm} = 0$ получаем

$$R_0 = \min(R_{1\nu}^{\pm}, R_{2\mu}^{\pm}, R_{\nu j}^{\pm})$$

$$R_{1\nu}^{\pm} = u_0 \max_{x^{\pm} \in S_\nu} \left| \sum_{j=1}^{\nu} p_j^{\pm} x_j^{\pm} / \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j^{\pm} x_j^{\pm 2} \right|$$

$$R_{2\mu}^{\pm} = u_0 \max_{(\xi^{\pm}, \eta^{\pm}) \in S_{2\mu}} \left| \sum_{j=1}^{\mu} (\xi_j^{\pm} \gamma_j^{\pm} + \eta_j^{\pm} \delta_j^{\pm}) / \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_j^{\pm} (\xi_j^{\pm 2} + \eta_{j2}^{\pm}) \right| \qquad (5.1)$$

$$R_{\nu j}^{\pm} = u_0 [(p_\nu^{\pm 2} u_0 + | p_j^{\mp} (2\lambda_\nu^{\pm} - \lambda_j^{\mp}) |) / | \lambda_j^{\mp} (2\lambda_\nu^{\pm} - \lambda_j^{\mp}) |]$$

(S_k — единичная сфера с центром в начале координат).

6. Управление угловым движением твердого тела. Известно, что управлять угловой скоростью твердого тела, движущегося по инерции, можно одним «косопоставленным», реактивным двигателем [1, 8]. Рассмотрим свойства этих управляемых движений при наличии ограничений на управление. Уравнения движения линеаризуем в окрестности равномерного вращения вокруг третьей главной оси при нулевом управлении

$$\omega_1^{\cdot} = a_1 \omega \omega_2 + \alpha_1 u, \quad \omega_2^{\cdot} = a_2 \omega \omega_1 + \alpha_2 u, \quad \omega_3^{\cdot} = \alpha_3 u \qquad (6.1)$$

$$a_1 = (A_2 - A_3)/A_1, \quad a_2 = (A_3 - A_1)/A_2$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3 — возмущения проекций на главные оси вектора угловой скорости, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — вектор, характеризующий направление момента реактивной силы, u — величина реактивной силы, ω — угловая скорость равномерного вращения, A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции тела.

Исследуем управляемость системы (6.1) при ограничениях на управление $|u| \leqslant u_0$ в предположении, что при отсутствии ограничений система (6.1) управляема, т. е.

$$\det(b, Ab, A^2 b) = a_1 a_2 \alpha_3 \omega^3 (a_1 \alpha_2^2 - a_2 \alpha_1^2) \neq 0$$

В зависимости от корней λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda^2 - a_1 a_2 \omega^2) = 0$$

рассмотрим два случая:

1) вращение вокруг меньшей и большей оси эллипсоида инерции

$$(a_1 a_2 < 0)\colon \lambda_1 = i\omega\sqrt{-a_1 a_2}, \quad \lambda_2 = -i\omega\sqrt{-a_1 a_2}, \quad \lambda_3 = 0$$

2) вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции $(a_1 a_2 > 0)$:

$$\lambda_1 = \omega\sqrt{a_1 a_2}, \quad \lambda_2 = -\omega\sqrt{a_1 a_2}, \quad \lambda_3 = 0$$

В первом случае в соответствии с теоремой 6 система (6.1) управляема во всем пространстве при любом значении u_0.

Во втором случае система (6.1) при $|u| \leqslant u_0$ во всем пространстве неуправляема, и для оценки области управляемости воспользуемся формулами (5.1), предварительно приведя систему (6.1) к жордановой форме.

По формуле (5.1) находим

$$R_0 = \min(R_1^+, R_1^-, R_{11}^+, R_{11}^-)$$

$$R_1^{\pm} = u_0 | \alpha_1 \sqrt{a_2} \pm \alpha_2 \sqrt{a_1} | / (2 a_1 a_2 \omega), \quad R_{11}^{\pm} = R_1^{\pm} + R_1^{\mp 2}/3$$

Окончательно имеем

$$R_0 = \min(R_1^+, R_1^-) \qquad (6.2)$$

Формула (6.2) может быть использована, например, при оценке качества системы управления движением твердого тела и оптимизации ее параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, если в качестве критерия качества принять $\varkappa = \max R_0$. Для более полной оценки необходимо рассмотреть и другие режимы движения тела кроме выбранного равномерного вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
2. *Губин С. В., Ковалев А. М.* Глобальная управляемость склерономных систем // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1990. Вып. 22. с. 72—76.
3. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
4. *Бутковский А. Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем. М.: Наука, 1985. 136 с.
5. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Никитин С. В.* Нелинейные системы: Управляемость, стабилизируемость, инвариантность // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 23. С. 3—107.
6. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
7. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
8. *Аграчев А. А., Сарычев А. В.* Управление вращением асимметричного твердого тела // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12. № 5. С. 335—347.

Донецк

Поступила в редакцию
2.III.1990