Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

А. Я. Фидлин

ОБ УСРЕДНЕНИИ В СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Обосновывается процедура осреднения для систем с переменным числом степеней свободы, возникающих при рассмотрении виброударных колебаний с нулевым коэффициентом восстановления скорости. По сравнению с методом поэтапного интегрирования [1, 2] излагаемый подход, связанный с неаналитическими заменами переменных [3, 4], позволяет несколько расширить класс рассматриваемых систем. В отличие от классического метода осреднения [5—7] в силу специфической вырожденности задачи производится редукция по вырожденным степеням свободы.

1. Рассмотрим систему, описываемую на части интервала времени дифференциальными, а на части — дифференциальными и конечными соотношениями следующего вида:

$$x^{\cdot} = \mu X(x, yM, t, \mu), \quad y^{\cdot}M = \mu Y(x, yM, t, \mu)\, M \qquad (1.1)$$
$$y(2\pi n) = G(x(2\pi n), \mu), \quad x(0) = x_0$$

Здесь $M = M(t)$ — 2π-периодическая кусочно-постоянная функция (см. фиг. 1); выше и всюду далее $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем считать X, Y ограниченными 2π-периодическими конечномерными вектор-функциями, удовлетворяющими условиям Липшица по первому и второму аргументам; G — ограниченная вектор-функция, имеющая ограниченную частную производную по первому аргументу, μ — малый параметр.

Векторная функция $y(t)$ представляет собой решение бесконечной последовательности систем дифференциальных уравнений, каждая из которых действует на интервале времени $2\pi n \leqslant t < 2\pi(n+1)$, по истечении которого ставятся новые начальные условия.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим осредненные уравнения

$$\xi^{\cdot} = \mu \Xi(\xi, \eta, \mu) \equiv \mu \langle X(\xi, \eta M, t, \mu)\rangle \qquad (1.2)$$
$$\eta = G(\xi, \mu), \quad \xi(0) = x_0$$

В указанных предположениях может быть сформулирована следующая

Теорема. Если решение системы (1.2) определено на интервале времени порядка $1/\mu$, то

$$\| x - \xi \| \leqslant C_1\mu, \quad \| yM - \eta M \| \leqslant C_2\mu \qquad (1.3)$$

на тех же временах, а постоянные C_1, C_2 остаются ограниченными при $\mu \to 0$.

Доказательство. Доопределим систему (1.1) в области, где $M = 0$:

$$x_1^{\cdot} = \mu X(x_1, y_1 M, t, \mu)$$
$$y_1^{\cdot} = \mu Y(x_1, y_1 M, t, \mu) + 2\mu H(x_1, y_1, \mu)(1 - M) \qquad (1.4)$$
$$y_1(2\pi n) = G(x(2\pi n), \mu), \quad x_1(0) = x_0$$

Здесь $H(x_1, y_1, \mu)$ — произвольная ограниченная, удовлетворяющая условию Липшица, функция, которая будет определена ниже. В силу единственности решения задачи Коши $x_1 \equiv x$, $y_1 M \equiv yM$.

Применим к системе (1.4) процедуру метода осреднения. Проведем точную замену переменных

$$x_1 = \xi_* + \mu u, \quad y_1 = \eta_* + \mu v \tag{1.5}$$

где u, v — периодические функции от ξ_*, η_*, t, μ с нулевым средним. Учтем, что функции X, Y, H удовлетворяют условиям Липшица и выберем функции u, v следующим образом:

$$u = \int [X(\xi_*, \eta_* M, t, \mu) - \Xi]\, dt$$
$$v = \int [Y(\xi_*, \eta_* M, t, \mu) - \Psi]\, dt + 2H \int [{}^1/_2 - M]\, dt$$
$$\Xi = \Xi(\xi_*, \eta_*, \mu) \equiv \langle X(\xi_*, \eta_* M, t, \mu)\rangle$$
$$\Psi = \Psi(\xi_*, \eta_*, \mu) \equiv \langle Y(\xi_*, \eta_* M, t, \mu)\rangle$$

где интегрирование проводится по явно входящему времени на отрезке $[t_0, t]$.

Воспользуемся теперь произвольностью функции $H(\xi_*, \eta_*, \mu)$ и положим

$$H(\xi_*, \eta_*, \mu) = (\partial G(\xi_*, \mu)/\partial \xi_*)\, \Xi - \Psi$$

Тогда получим

$$\xi_*^{\cdot} = \mu \Xi + \mu^2 O(1), \quad \eta_*^{\cdot} = \mu (\partial G/\partial \xi_*)\, \Xi + \mu^2 O(1) \tag{1.6}$$
$$\eta_*(2\pi n) = G(\xi_*(2\pi n), \mu) + \mu O(1)$$

Отсюда следуют уравнения

$$\eta_*^{\cdot} = G^{\cdot}(\xi_*, \mu) + \mu^2 O(1), \quad \eta_*(2\pi n) = G(\xi_*(2\pi n), \mu) + \mu O(1) \tag{1.7}$$

представляющие собой последовательность систем дифференциальных уравнений, каждая из которых действует на интервале времени $2\pi n \leqslant t < 2\pi(n + 1)$ и имеет свои начальные условия. Интегрируя систему (1.7) с учетом конечности каждого интервала, получим соотношение

$$\eta_* = G(\xi_*, \mu) + \mu O(1) \tag{1.8}$$

справедливое при любых временах.

Подставляя выражение (1.8) в первое уравнение системы (1.6) и используя то, что функция Ξ также удовлетворяет условиям Липшица, приходим к окончательной форме уравнений

$$\xi_*^{\cdot} = \mu \Xi(\xi_*, G(\xi_*, \mu), \mu) + \mu^2 O(1) \tag{1.9}$$
$$\xi_*(0) = x_0, \quad \eta_* = G(\xi_*, \mu) + \mu O(1)$$

Система (1.9) полностью эквивалентна системе (1.4) на любом интервале времени.

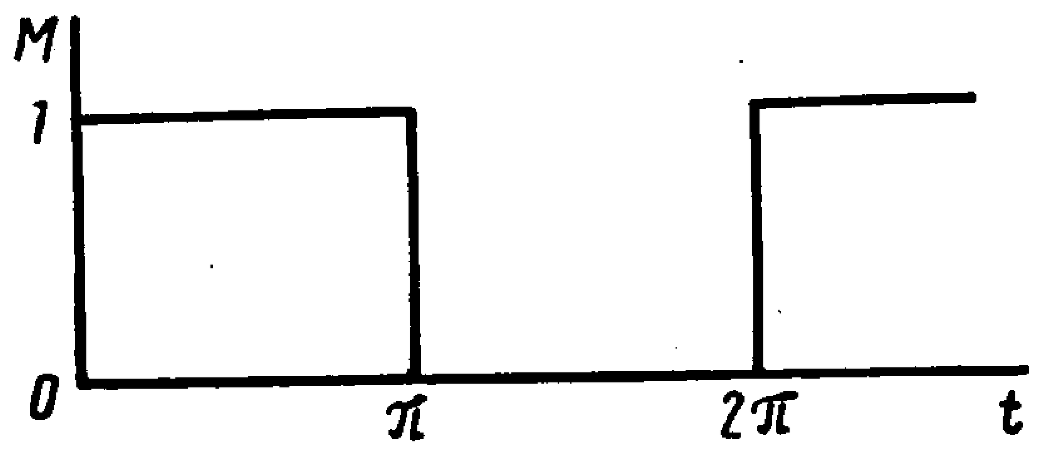
Рассматривая теперь наряду с (1.9) систему (1.2), при помощи леммы Гронуолла получаем требуемые оценки (1.3) на интервале времени порядка $1/\mu$.

Замечания. 1°. Если функции X, Y, G непрерывны при $\mu = 0$, то система

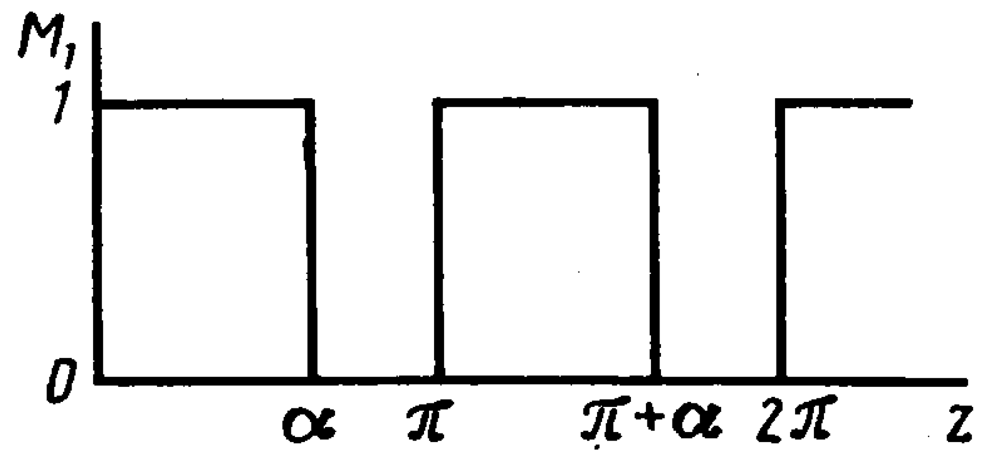
$$\xi_0^{\cdot} = \mu \Xi(\xi_0, \eta_0, 0), \quad \eta_0 = G(\xi_0, 0), \quad \xi_0(0) = x_0$$

обеспечивает ту же асимптотическую точность.

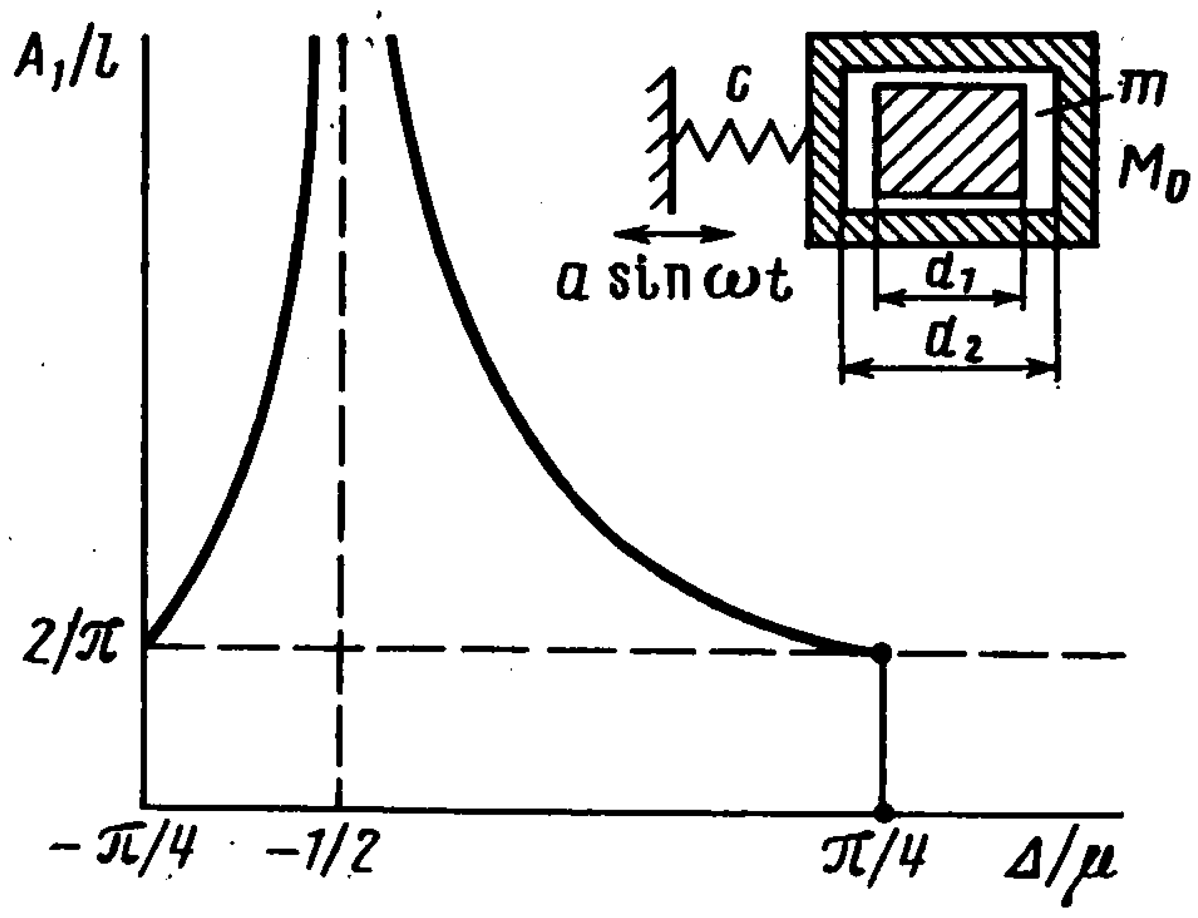
2°. Приведенные рассуждения сохраняют силу, если функция M представляет собой на интервале $0 \leqslant t < 2\pi$ конечное число единичных импульсов произвольной фиксированной длины.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Рассмотрим более сложную задачу:

$$x^{\cdot} = \mu X, \quad y^{\cdot} M_1 = \mu Y M_1, \quad z^{\cdot} M_1 = (1 + \mu Z) M_1, \quad \varphi^{\cdot} = 1 + \mu \Phi \tag{2.1}$$
$$y(t_n) = G(x(t_n)) + \mu G_1(x(t_n), \quad \varphi(t_n), \mu)$$
$$\varphi(t_n) = \pi n + \mu F(x(t_n), \quad \varphi(t_n), \mu)$$
$$z(t_n) = \pi n, \quad x(0) = x_0, \quad M_1 = M_1(z, \alpha)$$

Здесь x, y — по-прежнему вектор-функции произвольной конечной размерности; z, φ — скалярные фазы; X, Y, Z, Φ — функции, зависящие от аргументов x, yM_1, φ, zM_1, μ; Φ, G, F, Z — ограниченные функции, кроме того, $F(x, \varphi, \mu)$ имеет ограниченные частные производные по первым двум аргументам; требования к функциям X, Y, G те же, что и в системе (1.1).

Функция $M_1(z, \alpha)$ представлена на фиг. 2; точка переключения α может зависеть от медленных переменных.

Введем новую фазу $\varphi_1 = \varphi - \mu F$ и медленную переменную $\theta = z - \varphi_1$. Переходя затем к фазе

$$\varphi_2 = \begin{cases} \pi n + \dfrac{\pi(\varphi_1 - \pi n)}{2(\alpha - \theta)}, & \pi n \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi n + \alpha - \theta \\ \pi n + \dfrac{\pi}{2}\left(1 + \dfrac{\varphi_1 - \pi n - \alpha + \theta}{\pi - \alpha + \theta}\right), & \pi n + \alpha - \theta \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi(n+1) \end{cases}$$

которой соответствует разрывная частота

$$U = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(\alpha - \theta)}, & \pi n \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi(n + 1/2) \\ \dfrac{\pi}{2(\pi - \alpha + \theta)}, & \pi(n + 1/2) \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi(n+1) \end{cases}$$

и, рассматривая φ_2 в качестве независимой переменной, получаем систему

$$\frac{dx}{d\varphi_2} = \mu \frac{X}{U} + \mu^2 O(1), \quad \frac{dy}{d\varphi_2} M(\varphi_2) = \mu \left\{\frac{Y}{U} + \mu O(1)\right\} M(\varphi_2) \tag{2.2}$$
$$\frac{d\theta}{d\varphi_2} M(\varphi_2) = \mu \left\{\frac{Z - \Phi}{U} + \mu O(1)\right\} M(\varphi_2)$$
$$y(\pi n) = G(x(\pi n)) + \mu O(1), \quad \theta(\pi n) = 0; \quad x(0) = x_0$$

к которой можно применить доказанную теорему.

3. Уравнения вида (2.1) естественным образом возникают при рассмотрении колебаний виброударных систем с нулевым коэффициентом восстанавления скорости при ударе, если ограничиться периодическими режимами движения с зонами контакта и воспользоваться подходом [3, 4], связанным с неаналитическими заменами переменных. В качестве примера рассмотрим простейшую виброударную систему с двусторонним ограничением и кинематическим возбуждением, представленную на фиг. 3 ($d_2 - d_1 = 2l$).

Уравнения ее движения имеют вид

$$s^{\cdot\cdot} = -k^2 (1-\mu)s + k^2\mu (1-\mu)r + k^2 a (1-\mu) \sin \omega t \tag{3.1}$$

$$r^{\cdot\cdot} = \begin{cases} k^2 s - k^2\mu r - k^2 a \sin \omega t, & |r| < l \\ 0, & |r| = l \end{cases}$$

$$r = \pm l, \; s = \mu r + a \sin \omega t, \; s^{\cdot} = 0 \tag{3.2}$$

Здесь s — координата центра масс системы, r — относительная координата тела массы M_0 в зазоре, $k = \sqrt{c/M_0}$ — частота свободных колебаний тела массы M_0, $\mu = m/(M_0 + m)$ и a/l — малые параметры одного порядка. Условия (3.2) представляют собой условия отрыва (перехода от этапа совместного к этапу раздельного движения).

Перейдем к новым фазовым переменным при помощи следующей неаналитической замены, которая для режима с зонами контакта и двумя ударами за один период колебаний обоймы обеспечивает точное выполнение условий удара:

$$s = A \sin\psi, \; s^{\cdot} = Ak \cos\psi, \; \Omega = \omega t$$

$$r = l\,(\operatorname{sign}(\sin\varphi) - M_2) + \{-l + B\,(\varphi - \pi\,[\varphi/\pi]) - A \sin\psi M_2\}\, M_2$$

$$r^{\cdot} = k\,\{B - A \cos\psi M_2\}\, M_2, \; M_2 = M_2(\varphi, \alpha) = M_1(\varphi, \alpha)\operatorname{sign}(\sin\varphi)$$

Здесь $[z]$ — целая часть z, а вспомогательная медленная переменная α определяется трансцендентным уравнением

$$B\alpha - A \sin\psi = 2l \text{ при } \varphi = \alpha$$

Рассмотрим наиболее интересный резонансный случай $\omega - k = k\Delta$, где Δ — малый параметр порядка μ. Вводя медленную переменную $\sigma = \Omega - \psi$, безразмерное время $\tau = kt$ и ограничиваясь слагаемыми порядка μ, получаем систему в форме (2.1)

$$A^{\cdot} = {}^1/_2\mu A \sin 2\psi + \mu r \cos\psi + a \sin(\psi + \sigma)\cos\psi$$

$$\sigma^{\cdot} = \Delta + \mu \sin^2\psi + \mu r A^{-1} \sin\psi + a A^{-1} \sin(\psi + \sigma) \sin\psi$$

$$B^{\cdot} M_2(\varphi, \alpha) = \mu A \sin\psi\, M_2^2(\varphi, \alpha)$$

$$\varphi^{\cdot} M_2(\varphi, \alpha) = \{1 - \mu\,(\varphi - \pi\,[\varphi/\pi]) A B^{-1} \sin\psi\, M_2(\varphi, \alpha)\}\, M_2(\varphi, \alpha)$$

$$\psi^{\cdot} = 1 - \mu \sin^2\psi - \mu r A^{-1} \sin\psi - a A^{-1} \sin(\psi + \sigma)\sin\psi$$

с условиями отрыва

$$\varphi = \pi n, \; B = A + \mu^2 O(1), \; \psi = \pi n + \mu O(1)$$

Усредняя ее по быстрой фазе ψ при помощи приведенных выше процедур и обозначая штрихом дифференцирование по ψ, приходим к уравнениям первого приближения

$$\begin{gathered} A_1' = \mu\pi^{-1} \{-2l \sin\alpha_1 - A_1 (\alpha_1 \sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 - 1) - {}^1/_2 A_1 \sin^2\alpha_1\} + \\ + {}^1/_2 a \sin\sigma_1, \; \sigma_1' = \Delta + {}^1/_2\mu + \mu/\pi\,\{2l/A_1 \cos\alpha_1 - \alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 - \\ - {}^1/_2\alpha_1 + {}^1/_4 \sin 2\alpha_1\} + {}^1/_2 a A_1 \cos\sigma_1, \; \alpha_1 - \sin\alpha_1 = 2lA_1^{-1} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) верны на временах порядка $1/\mu$ с погрешностью порядка μ. Приравнивая нулю правые части системы (3.3), получаем систему трансцендентных уравнений для определения стационарного резонансного режима.

На фиг. 3 приведена зависимость резонансной амплитуды центра масс A_1 от отстройки Δ для $\mu = 0{,}01$ $a/l = 0{,}01$. При этом необходимо учитывать условие реализации рассмотренного простейшего виброударного режима с зоной контакта: $0 < \alpha_1 < \pi$; существование данного резонансного режима обеспечивается при выполнении неравенств

$$\mu < \pi^2 a/(8l), \; |\Delta| < \pi a/(4l)$$

Аналогичный подход может быть использован и при рассмотрении более сложных задач, учитывающих нелинейность возбудителя колебаний.

Автор благодарит И. И. Блехмана, Р. Ф. Нагаева и А. В. Печенева за замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
2. *Нагаев Р. Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42. вып. 5. С. 781—788.
4. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
13.IV.1990