Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

В. Д. Иртегов

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

Приводится ряд результатов, связанных с исследованием инвариантных многообразий стационарных движений (ИМСД) механических систем с первыми интегралами [1], которые имеют в фазовом пространстве размерность большую нуля. Обсуждается определение таких ИМСД, способы выделения их подмногообразий и некоторые условия на первые интегралы, обеспечивающие существование таких ИМСД.

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями, определенную в некоторой области R^n:

$$x_i^{\bullet} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

которая допускает гладкий автономный первый интеграл $V(x_1, \ldots, x_n)$. Здесь и всюду далее $i, j = 1, \ldots, n$.

Пусть частные производные этого интеграла могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{k} \varphi_l(x) a_{li}(x) \qquad (k < n) \tag{1.2}$$

где $a_{li}(x)$ $(l = 1, \ldots, k)$ — гладкие функции, определенные на многообразии

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = \varphi_k(x) = 0 \tag{1.3}$$

и в его окрестности.

Определение 1. Будем говорить, что представление (1.2) правильное, если ранг матрицы $\| a_{li}(x) \|$ на многообразии (1.3) равен k.

Определение 2. Всякий первый интеграл $V(x_1, \ldots, x_n)$ системы (1.1), допускающий хотя бы одно правильное представление вида (1.2), назовем интегралом части системы.

Так, квадрат гладкого первого интеграла $V(x) - h = 0$ является интегралом части системы для тех значений $h = h^\circ$, для которых на многообразии $V(x) = h^\circ$ частные производные $\partial V/\partial x_i$ определены и все одновременно не обращаются в нуль. Это непосредственно следует из формулы

$$\partial (V(x) - h)^2/\partial x_i = 2(V(x) - h)\, \partial V/\partial x_i$$

и приведенных определений.

Известно [2], что всякое невырожденное решение системы уравнений стационарности гладкого интеграла

$$\partial V/\partial x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.4}$$

является невырожденным инвариантным многообразием (1.1), и, поскольку оно всегда служит решением системы (1.1), то, обычно, называется стационарным движением. (Невырожденным решением называется такое, на котором якобиан системы (1.4) не обращается в нуль.)

Если же в некоторой области фазового пространства якобиан системы (1.4) равен нулю, то уравнения (1.4) зависимы.

Пусть независимыми по x среди них являются первые k функций в (1.4)

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \quad f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.5}$$

и они «не приводимы» (не представимы в виде произведений функций), то система (1.5) определяет инвариантное многообразие (1.1) [1]. Исключая при помощи (1.5) некоторые из переменных x_{i_l} $(l = 1, \ldots, k)$ из (1.1), получим (в соответствующей карте многообразия (1.5) [3]) дифференциальные уравнения векторного поля на (1.5)

$$\dot{x}_{i_{k+1}} = X_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}), \ldots, \dot{x}_{i_n} = X_{i_n}(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}) \tag{1.6}$$

В других картах многообразия (1.5) уравнения аналогичны (1.6).

Определение 3. Инвариантное многообразие размерности большей нуля, уравнения которого являются решением системы (1.4), с векторным полем на нем, определяемым исходной системой дифференциальных уравнений, будем называть вырожденным инвариантным многообразием стационарных движений (ИМСД).

Понятно, что всякие возмущения правых частей уравнений (1.1), которые оставляют без изменения интеграл $V(x)$, оставляют инвариантными и уравнения (1.5), изменяя при этом векторное поле на обсуждаемом ИМСД. Поэтому включение в понятие ИМСД векторного поля на нем существенно «замыкает задачу» для вырожденных ИМСД. (Число уравнений, входящих в определение ИМСД, равно размерности фазового пространства.)

При использовании теоремы Рауса — Ляпунова и ее обобщений следует также иметь в виду следующее интуитивно понятное

Утверждение 1. Не всякое подмногообразие вырожденного ИМСД само является ИМСД и даже просто инвариантным многообразием.

Для получения примера такого подмногообразия в случае ИМСД (1.5) (1.6) достаточно выбрать такие постоянные значения координат $x_{i_{k+1}} = \overset{\circ}{x}_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} = \overset{\circ}{x}_{i_n}$, чтобы при этих значениях координат не обращались в нуль некоторые из

$$X_{i_d}|_0 = X_{i_d}(\overset{\circ}{x}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i_n}), \quad (d = k+1, \ldots, n)$$

в (1.6). Тогда получающееся из (1.4) при $\overset{\circ}{x}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i_n}$ подмногообразие

$$f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \overset{\circ}{x}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i_n}) = 0, \ldots, \; f_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \overset{\circ}{x}_{i_{k+1}}, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i_n}) = 0$$

очевидно, останется решением задачи (1.4), но не будет решением системы (1.1).

Теперь рассмотрим случай «приводимых» уравнений (1.4).

Утверждение 2. Всякий первый интеграл $V(x_1, \ldots, x_n)$ части системы порождает вырожденное ИМСД (1.3) с соответствующим векторным полем на нем.

Доказательство. Запишем тождества по x

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{dV}{dt}\right) \equiv 0$$

используя перестановочность операций частного дифференцирования $V(x)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \equiv 0$$

Данные выражения после учета представления (1.2) для производных от интеграла части системы $V(x)$, позволяют записать n равенств

$$\sum_{l=1}^{k} \varkappa_l a_{lj} = -\sum_{l=1}^{k} \varphi_l \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} X_i + a_{li} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \right], \quad \varkappa_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} X_i$$

Последние на многообразии (1.3) сводятся к системе однородных уравнений относительно k неизвестных $\varkappa_l$ $(l = 1, \ldots, k)$. Поскольку представление (1.2) правильное, то ранг матрицы рассматриваемой системы равен k, и на многообразии (1.3) она имеет только тривиальное решение. Это позволяет заключить, что многообразие (1.3) является инвариантным для системы (1.1).

Чтобы получить соответствующее (1.3) ИМСД, достаточно определить векторное поле на данном многообразии. Для этого нужно при помощи формул (1.3) исключить k переменных x_{i_j} из уравнений (1.1). В результате получатся дифференциальные уравнения вида (1.6), которые определяют нужное векторное поле в соответствующей карте. Так, перебирая все карты, можно определить векторное поле на всем многообразии.

Рассмотрим полную производную от интеграла $V(x)$ в силу системы (1.1)

$$\partial V/dt \overset{\Delta}{=} \varphi_1(x)(a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n) + \ldots + \varphi_k(x)(a_{k1}X_1 + \\ + \ldots + a_{kn}X_n) \tag{1.7}$$

и введем новые переменные при помощи следующих дифференциальных соотношений:

$$\varphi_l^{\boldsymbol{\cdot}} = a_{l1}x_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \ldots + a_{ln}x_n^{\boldsymbol{\cdot}} \quad (l = 1, \ldots, k) \tag{1.8}$$

Если последняя система уравнений (распределение [3]) интегрируема, т. е. если

$$\partial\varphi_1/\partial x_1 = a_{11}, \ldots, \partial\varphi_1/\partial x_n = a_{1n}, \ldots, \quad \partial\varphi_k/\partial x_1 = a_{k1}, \ldots, \partial\varphi_k/\partial x_n = \\ = a_{kn}$$

то в новых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ выражение (1.7) может быть записано в виде

$$dV/dt = \varphi_1\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \ldots + \varphi_k\varphi_k^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$V = {}^1/_2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_k^2) \tag{1.9}$$

Таким образом, в случае интегрируемости распределения (1.8) существуют переменные, в которых рассматриваемое ИМСД (1.3) (1.6) превращается в линейное подпространство

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = 0 \tag{1.10}$$

с соответствующим векторным полем на нем (1.6), а квадратичный интеграл части системы (1.9) служит для него порождающим.

Очевидно, многообразие (1.10) можно считать базовым, тогда исходное ИМСД (1.3) является для него, вообще говоря, разветвленным накрывающим.

Интеграл (1.9) знакоопределен по $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ в окрестности (1.10), и значит, на основании соответствующей теоремы второго метода Ляпунова можно сделать вывод об устойчивости ИМСД (1.10), а следовательно, и для ИМСД (1.3), (1.6). Тем самым доказана

Теорема 1. Если для системы (1.1), имеющей первый интеграл части системы с представлением (1.2), распределение (1.8) интегрируемо, то ИМСД (1.3) (1.6) устойчиво по Ляпунову.

2. Приведем конкретное исследование достаточно общей механической системы, у которой существуют неквадратичные первые интегралы части системы дифференциальных уравнений движения.

Рассмотрим систему связанных твердых тел с носителем (одно из тел имеет одну закрепленную точку).

Функция Лагранжа такой системы может быть записана следующим образом [4]:

$$2L = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}(q)\,\omega_\alpha\omega_\beta + 2\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} e_{k\alpha}(q)\,\omega_\alpha q_k^{\cdot} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(q)\,q_j^{\cdot} q_k^{\cdot} - 2U(q_1, \ldots, q_n)$$

Здесь ω_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — проекции угловой скорости несущего тела на связанные с ним оси координат, q_k ($k = 1, \ldots, n$) — обобщенные координаты, определяющие положение несомых тел друг относительно друга и по отношению к несущему телу, $U(q_1, \ldots, q_n)$ — силовая функция, определяющая взаимодействие несомых тел (интерпретация L может быть и другой (см., например, [5]). Дифференциальные уравнения движения такой системы

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j^{\cdot\cdot} + \sum_{\alpha=1}^{3} e_{i\alpha}\omega_\alpha^{\cdot} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial e_{k\alpha}}{\partial q_i} - \frac{\partial e_{i\alpha}}{\partial q_k}\right) q_k^{\cdot}\omega_\alpha + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial c_{kj}}{\partial q_i}\right) q_k^{\cdot} q_j^{\cdot} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial J_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\omega_\alpha\omega_\beta - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} J_{1\alpha}\omega_\alpha^{\cdot} + \sum_{k=1}^{n} e_{k1}q_k^{\cdot\cdot} + \sum_{k=1}^{n}\left(e_{k3}\omega_2 - e_{k2}\omega_3 + \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial J_{1\alpha}}{\partial q_k}\omega_\alpha\right) q_k^{\cdot} + \sum_{\alpha=1}^{3}(J_{3\alpha}\omega_2 - J_{2\alpha}\omega_3)\,\omega_\alpha + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial e_{k1}}{\partial q_j} q_k^{\cdot} q_j^{\cdot} = 0$$

$$\gamma_1^{\cdot} = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2 \quad (1,\ 2,\ 3)$$

(невыписанные уравнения получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3) допускают четыре первых интеграла

$$2H = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}(q)\,\omega_\alpha\omega_\beta + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{3} e_{k\alpha}(q)\,q_k^{\cdot}\omega_\alpha + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(q)\,q_j^{\cdot} q_k^{\cdot} - 2U(q) = 2h, \quad V_1 = \sum_{\beta=1}^{3}\Omega_\beta\gamma_\beta = m \qquad (2.2)$$

$$V_2 = \sum_{\beta=1}^{3}\Omega_\beta^2 = n^2, \quad V_3 = \sum_{\beta=1}^{3}\gamma_\beta^2 = 1,$$

$$\Omega_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} J_{\alpha\beta}\omega_\alpha + \sum_{k=1}^{n} e_{k\beta}q_k^{\cdot} \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

Последние три из них, как легко проверить, являются интегралами части системы (2.1).

Выделим вырожденные инвариантные многообразия стационарных движений, которые соответствуют этой тройке интегралов. Составим для этого связку:

$$K_{(123)} = {}^1/_2V_2 - \lambda_1 V_1 - {}^1/_2\lambda_3 V_3$$

и запишем условия стационарности одного из интегралов связки на остальных, следуя методике Лагранжа

$$\frac{\partial K_{(123)}}{\partial \omega_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{3} (\Omega_\beta - \lambda_1\gamma_\beta) J_{\beta\gamma} = 0, \quad \frac{\partial K_{(123)}}{\partial \gamma_\gamma} = -\lambda_1\Omega_\gamma - \lambda_3\gamma_\gamma = 0 \quad (\gamma = 1,2,3)$$

$$\frac{\partial K_{(123)}}{\partial q_i^{\cdot}} = \sum_{\beta=1}^{3} (\Omega_\beta - \lambda_1\gamma_\beta) e_{i\beta} = 0$$

$$\frac{\partial K_{(123)}}{\partial q_i} = \sum_{\beta=1}^{3} (\Omega_\beta - \lambda_1\gamma_\beta)\left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial J_{\beta\alpha}}{\partial q_i}\omega_\alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial e_{k\beta}}{\partial q_i} q_k^{\cdot}\right) = 0$$

$$V_1 = \sum_{\beta=1}^{3} \Omega_\beta\gamma_\beta = m, \quad V_3 = \sum_{\beta=1}^{3} \gamma_\beta^2 = 1$$

при $\lambda_3 = -\lambda_1^2$ можно, вводя обозначения

$$\varphi_1 = \Omega_1 - \lambda_1\gamma_1, \quad \varphi_2 = \Omega_2 - \lambda_1\gamma_2, \quad \varphi_3 = \Omega_3 - \lambda_1\gamma_3$$

переписать условия стационарности в виде (1.2)

$$\frac{\partial K_{(123)}}{\partial \omega_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{3} \varphi_\beta J_{\beta\gamma} = 0, \quad \frac{\partial K_{(123)}}{\partial \gamma_\gamma} = -\lambda_1\varphi_\gamma = 0$$

$$\frac{\partial K_{(123)}}{\partial q_i^{\cdot}} = \sum_{\beta=1}^{3} \varphi_\beta e_{i\beta} = 0, \quad \frac{\partial K_{(123)}}{\partial q_i} = \sum_{\beta=1}^{3} \varphi_\beta \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial J_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\omega_\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial e_{k\beta}}{\partial q_i} q_k^{\cdot}\right) = 0, \quad V_1 = \sum_{\beta=1}^{3} \Omega_\beta\gamma_\beta = m, \quad V_3 = \sum_{\beta=1}^{3} \gamma_\beta^2 = 1$$

Это представление правильное, так как определитель матрицы

$$\det \begin{Vmatrix} J_{11}(q) & J_{12}(q) & J_{13}(q) \\ J_{12}(q) & J_{22}(q) & J_{23}(q) \\ J_{13}(q) & J_{23}(q) & J_{33}(q) \end{Vmatrix}$$

при всех значениях q_k ($k = 1, \ldots, n$) не равен нулю в силу его механического смысла.

Отсюда следует, согласно с утверждением 2, что уравнения

$$\varphi_\beta = \Omega_\beta - \lambda_1\gamma_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

определяют семейство инвариантных многообразий системы (2.1). Исключая $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ с помощью (2.3) из интегралов $V_1 = m$ и $V_3 = 1$, будем иметь $m = \lambda_1 = n$.

Таким образом, на каждой поверхности уровня интеграла $V_1 = m$ лежит в точности один представитель однопараметрического семейства (2.3).

Исключая $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ при помощи тех же условий из последних трех дифференциальных уравнений (2.1), получим соотношения, совпадающие с первыми тремя уравнениями (2.1).

Следовательно, векторное поле на инвариантных многообразиях (2.3) будет определяться уравнениями (2.1), если в них опустить три последних уравнения (Пуассона). Заметим, что при всех значениях параметра семейства $\lambda_1 = m$ векторное поле будет одно и то же. (Параметр в дифференциальных уравнениях не содержится.)

Прямая проверка показывает, что система (1.8) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varphi_\beta^{\cdot} = \sum_{\alpha=1}^{3} J_{\alpha\beta}\omega_\alpha^{\cdot} + \sum_{k=1}^{n} e_{k\beta}q_k^{\cdot\cdot} - \lambda_1\gamma_\beta^{\cdot} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial J_{\alpha\beta}}{\partial q_j}\omega_\alpha + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial e_{k\beta}}{\partial q_j}q_k^{\cdot}\right)q_j^{\cdot} \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

и интегрируема.

В новых переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, q_j^{\cdot} q_j$, переход к которым возможен, семейство ИМСД (2.3) принимает вид линейного подпространства

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \tag{2.4}$$

с векторным полем, описываемым уравнениями (2.1) (без трех уравнений Пуассона).

Порождающий интеграл $K_{(123)}$ в окрестности (2.4) становится квадратичным: $K_{(123)} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2$, и на основании второго метода Ляпунова [6] позволяет сделать заключение об устойчивости найденного ИМСД.

Из устойчивости ИМСД (2.4) здесь следует и устойчивость ИМСД (2.3) при любом $\lambda_1 \neq 0$.

3. Располагая регулярным алгоритмом выделения вырожденных ИМСД, можно ставить вопрос о нахождении подмногообразий стационарных движений этих вырожденных ИМСД.

Здесь представляются две возможности в соответствии с двумя группами уравнений (1.5) и (1.6), входящими в определение ИМСД.

Первая из них связана с отысканием ИМСД более высокого уровня для уравнений (1.6) при помощи имеющихся у этих уравнений первых интегралов и поднятия этих ИМСД в фазовое пространство [7].

Второй путь связан с уравнениями (1.5) и состоит из нахождения сечений исходных вырожденных инвариантных многообразий стационарных движений гиперповерхностями уровня первых интегралов задачи.

В том и другом случае приходится проводить доказательства, что таким образом найденные инвариантные подмногообразия действительно являются инвариантными подмногообразиями стационарных движений, т. е. доставляют стационарное значение некоторому первому интегралу или их связке.

В некоторых случаях это может оказаться не так. Не всякое ИМСД второго уровня [1] можно поднять в фазовое пространство, но даже поднятое ИМСД второго уровня может не оказаться там ИМСД.

Порождающим интегралом для подмногообразий ИМСД, получаемых вторым способом, является порождающий интеграл для исходного ИМСД, дополненный квадратом того интеграла, который «высекает» из рассматриваемого ИМСД нужное подмногообразие.

Эта конструкция дает хорошую интерпретацию связок интегралов, которые кроме линейной комбинации интегралов содержит и квадраты последних, в рамках теоремы Рауса — Ляпунова.

4. Для демонстрации особенностей при выделении подмногообразий ИМСД приведем конкретные исследования такой задачи в случае движений волчка Ковалевской. Дифференциальные уравнения здесь имеют вид [8]

$$2p^{\cdot} = qr, \quad 2q^{\cdot} = -pr + x_0\gamma_3, \quad r^{\cdot} = -x_0\gamma_2, \ \gamma_1^{\cdot} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{4.1}$$

Рассмотрим связку из интеграла энергии и интеграла Ковалевской (4.1)

$$2K_{(02)} = 2p^2 + 2q^2 + r^2 + 2x_0\gamma_1 - \lambda_2\left[(p^2 - q^2 - x_0\gamma_1)^2 + (2pq - x_0\gamma_2)^2\right] \tag{4.2}$$

и запишем условия стационарности $K_{(02)}$ в виде

$$\begin{gathered}
\partial K_{(02)}/\partial p = 2\,[1 - \lambda_2\,(p^2 + q^2 - x_0\gamma_1)]\,p + 2\lambda_2 x_0 q\gamma_2 = 0\\
\partial K_{(02)}/\partial q = 2\lambda_2 pqp + 2px_0\gamma_2 + 2q\,[1 - \lambda_2\,(q^2 + x_0\gamma_1)] = 0\\
\partial K_{(02)}/\partial \gamma_1 = \lambda_2 px_0 p + x_0\,[1 - \lambda_2\,(q^2 + x_0\gamma_1)] = 0\\
\partial K_{(02)}/\partial \gamma_2 = 2\lambda_2 qx_0 p - \lambda_2 x_0^2\gamma_2 = 0, \quad \partial K_{(02)}/\partial r = r = 0\\
2H = 2p^2 + 2q^2 + r^2 + 2x_0\gamma_1 = 2h
\end{gathered} \tag{4.3}$$

При $\lambda_2 \neq 0$ представление (4.3) правильное, и поэтому определяет семейство инвариантных многообразий стационарных движений:

$$p = r = \gamma_2 = 0, \quad 1 - \lambda_2\,(q^2 + x_0\gamma_1) = 0, \quad 2h = 1/\lambda_2 \tag{4.4}$$

Векторное поле на данном многообразии получается стандартным путем из (4.1)

$$2q^{\cdot} = x_0\gamma_3, \quad \gamma_3^{\cdot} = q\,(1 - \lambda_2 q^2)/x_0\lambda_2 \tag{4.5}$$

Параметр семейства λ_2 содержится как в (4.4), так и в (4.5). Соответствующее представлению (4.3) распределение не интегрируемо. На это семейство вырожденных ИМСД можно смотреть как на подмногообразие инвариантного многообразия маятниковых колебаний тела вокруг горизонтальной главной оси y, которое описывается уравнениями

$$r = p = \gamma_2 = 0 \tag{4.6}$$

$$\gamma_1^{\cdot} = -\gamma_3 q, \quad 2q^{\cdot} = x_0\gamma_3, \quad \gamma_3^{\cdot} = \gamma_1 q \tag{4.7}$$

полученное из (4.6) (4.7) сечением последнего гиперповерхностью уровня интеграла энергии.

Такие ИМСД, очевидно, могут возникать в случаях, когда один из интегралов, входящих в порождающую связку, на данном ИМСД становится равным квадрату другого интеграла в этой связке. (В рассматриваемом случае на многообразии $p = r = \gamma_2 = 0$ интеграл Ковалевской равен квадрату интеграла энергии.)

Покажем, что само инвариантное многообразие (4.6), (4.7) является ИМСД, а порождающий интеграл для него получается из (4.2) добавлением квадрата интеграла энергии. Действительно, связка

$$K_{(020)} = H - {}^1\!/_2\lambda_2 V_2 - {}^1\!/_2\mu\,(H - h)^2$$

позволяет записать пять условий стационарности, принимая в которых $\mu = -\lambda_2$ и $h = -1/\mu$, получаем следующее представление частных производных от $K_{(020)}$:

$$\begin{gathered}
\partial K_{(020)}/\partial p = 4\lambda_2 x_0\gamma_1 p + 2\lambda_2 x_0 q\gamma_2 + 2\lambda_2 prr = 0\\
\partial K_{(020)}/\partial q = 2px_0\gamma_2 + \lambda_2 qrr = 0\\
\partial K_{(020)}/\partial r = [1 + \lambda_2\,(H - h)]\,r = 0, \quad \partial K_{(020)}/\partial \gamma_1 = {}^1\!/_2\lambda_2 x_0 rr = 0\\
\partial K_{(020)}/\partial \gamma_2 = 2\lambda_2 x_0 qp - \lambda_2 x_0^2\gamma_2 = 0
\end{gathered}$$

Видно, что при $\lambda_2 \neq 0$ и $h \neq 0$ это представление правильное и определяет нужное инвариантное многообразие маятниковых колебаний (4.6) (4.7).

Чтобы закончить с иллюстрацией возможных аномалий, возьмем ИМСД Делоне, определяемое уравнениями [1]

$$p^2 - q^2 - x_0\gamma_1 = 0, \quad 2pq - x_0\gamma_2 = 0 \tag{4.8}$$

$$2p^{\cdot} = pq, \quad 2q^{\cdot} = -rp + x_0\gamma_3, \quad r^{\cdot} = -2pq, \quad \gamma_3^{\cdot} = q\,(p^2 + q^2)/x_0 \tag{4.9}$$

и найдем ИМСД второго уровня, порождаемое на данном многообразии (4.8), (4.9) интегралом энергии системы (4.9) $4p^2 + r^2 = 2h$. Таким инвариантным многообразием второго уровня, очевидно, будет

$$p = q = 0, \quad 2q^{\cdot} = x_0\gamma_3, \quad \gamma_3^{\cdot} = -\,q^3/x_0 \tag{4.10}$$

Поднимая это ИМСД при помощи формул (4.8) (4.9) в фазовое пространство исходной задачи, получим

$$p = r = \gamma_2 = 0, \quad q^2 + x_0\gamma_1 = 0, \quad 2q^{\cdot} = x_0\gamma_3, \quad \gamma_3^{\cdot} = -q^3/x_0 \tag{4.11}$$

Это инвариантное многообразие системы (4.1) представляет собой те маятниковые колебания тела вокруг горизонтальной оси y, для которых механическая энергия $q^2 + x_0\gamma_1 = h = 0$. Оно будет «предельным» для семейства ИМСД (4.4) (4.5) и интересно тем, что, являясь поднятием ИМСД второго уровня (4.10) в фазовое пространство, не оказывается там ИМСД (не имеет порождающего интеграла).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иртегов В. Д.* Инвариантные многообразия стационарных движений и их устойчивость. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
2. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики, Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
4. *Иртегов В. Д.* Об инвариантных многообразиях стационарных движений одной системы // Устойчивость и управление сложных систем. Казань: Авиац. ин-т, 1988. С. 4—11.
5. *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Оптимальное демпфирование нутационного движения спутников, стабилизируемых вращением // Celest. mech. 1976. Т. 13. № 3. Р. 383—405.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 263 с.
7. *Иртегов В. Д.* Об устойчивости инвариантных многообразий механических систем. М.: ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 348—355.
8. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.

Иркутск

Поступила в редакцию 18.X.1990