

УДК 538.56 : 519.25

© 1991 г.

О. В. Музычук

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К АНАЛИЗУ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматривается стохастическая система, представляющая собой осциллятор с нелинейной жесткостью и нелинейным демпфированием, находящийся под воздействием гауссовой дельта-коррелированной случайной силы. Нелинейности аппроксимируются полиномами. Вводятся векторы с компонентами, представляющими собой стационарные значения моментов выходной координаты; для них в рамках марковской теории получаются цепочки трехчленного взаимодействия, решение которых представимо матричными цепными дробями. На конкретных примерах численным образом исследуется сходимость таких дробей к точным результатам.

Известно, что найти аналитические решения уравнений Фоккера — Планка, описывающих вероятностные распределения выходных координат нелинейных стохастических систем, удается лишь в немногих частных случаях. Существующие приближенные методы статистического описания, такие, как метод статистической линеаризации, гауссово приближение и более общий кумулянтный подход [1—3], не всегда адекватно отражают поведение системы при достаточно интенсивных случайных воздействиях. Предлагалось [4] использовать матричные цепные дроби для нахождения стационарных значений моментов выходных координат стохастических систем с кубичной нелинейностью (для одномерной системы моменты находятся в виде обычных цепных дробей [5]). Ниже показана возможность применения матричных цепных дробей для анализа стохастических систем с полиномиальной нелинейностью. Поскольку вопросы сходимости такой процедуры как в общем плане, так и для конкретных динамических систем остаются открытыми, здесь этот метод используется для системы, допускающей в некоторых случаях точное статистическое описание.

1. Рассмотрим нелинейный осциллятор, находящийся под воздействием случайной силы

$$x'' + 2h(1 + f(x))x' + \Omega^2(1 + g(x))x = \Omega^2\xi(t) \quad (1.1)$$

Шум будем считать гауссовым и дельта-коррелированным

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle = D_\xi \delta(\tau)$$

Влияние нелинейной жесткости и нелинейного затухания рассмотрим в отдельности, хотя используемый подход допускает в принципе и одновременный учет этих факторов. Введя безразмерные переменные, запишем уравнение (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}x' &= y, \quad \Omega^{-1}y' = -\delta F(x)y - G(x) + \xi(t) \\ F(x) &= 1 + f(x), \quad G(x) = x + xg(x), \quad \delta = 2h/\Omega = Q \end{aligned} \quad (1.2)$$

( $Q$  — добротность соответствующей линейной системы). Стандартным образом получим стационарное уравнение Фоккера — Планка для совместной плотности вероятностей системы (1.2)

$$y \frac{\partial W}{\partial x} - \delta F(x) \frac{\partial}{\partial y} (yW) - G(x) \frac{\partial W}{\partial y} = \delta D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad D = \frac{\Omega D_\xi}{2\delta} \quad (1.3)$$

где параметр  $D$  представляет собой среднюю энергию броуновского движения линейной системы.

В отсутствие нелинейных потерь ( $F(x) = 1$ ) решение уравнения (1.3) известно:

$$W(x, y) = W_x(x) W_y(y) = C \exp \left[ -\frac{1}{D} \left( \frac{y^2}{2} + \int G(x) dx \right) \right] \quad (1.4)$$

Заметим, что плотность вероятности координаты  $W_x(x)$  удовлетворяет простому уравнению в обыкновенных производных:

$$dW_x/dx = -D^{-1}G(x) W_x$$

являющемуся, как можно показать, стационарным уравнением Фоккера—Планка для стохастической системы 1-го порядка

$$\Omega_1^{-1}x' + G(x) = \xi(t), \quad \Omega_1 = Q\Omega \quad (1.5)$$

Таким образом, в отсутствие нелинейных потерь уравнение (1.5) статистически эквивалентно исходной системе (1.1) для отыскания стационарных характеристик координаты.

2. Положим, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  заданы сходящимися степенными рядами; из физических соображений функция  $f(x)$  должна быть четной, четным также должен быть последний оставленный член в разложении  $g(x)$ .

Предположим сначала, что нелинейные потери отсутствуют, а нелинейная жесткость — четная функция, определяемая разложением

$$g(x) = \sum_{k=1}^m b_k x^{2k} \quad (2.1)$$

(что соответствует броуновскому движению с симметричным потенциалом). Обозначив  $x^{2k} = I^k$ , на основании соотношений (1.5), (2.1) получим бесконечную цепочку для стационарных моментов интенсивности

$$\langle I^s \rangle + \sum_{k=1}^m b_k \langle I^{s+k} \rangle = (2s-1)D \langle I^{s-1} \rangle, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Введя моментные векторы размерности  $m$  вида

$$\begin{aligned} X_1 &= (\langle I \rangle, \langle I^2 \rangle, \dots, \langle I^m \rangle), \dots \\ X_n &= (\langle I^{(n-1)m+1} \rangle, \langle I^{(n-1)m+2} \rangle, \dots, \langle I^{nm} \rangle) \end{aligned}$$

от уравнений (2.2) можно перейти к соответствующей матричной цепочке трехчленного взаимодействия

$$A_1 X_1 + B_1 X_2 = C_1 X_0, \dots, A_n X_n + B_n X_{n+1} = C_n X_{n-1} \quad (2.3)$$

где вспомогательный вектор  $X_0$  имеет компоненты  $(0, \dots, 0, 1)$ . Вид матриц, входящих в цепочку (2.3), находим из уравнений (2.2). В частности, при ограничении в разложении (2.1) двумя членами, имеем

$$\begin{aligned} X_n &= (\langle I^{2n-1} \rangle, \langle I^{2n} \rangle), \quad A_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ -(2n+1)D & 1 \end{vmatrix} \\ B_n &= \begin{vmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad C_n = \begin{vmatrix} 0 & (2n+1)D \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

а при  $m = 3$

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ D(3-6n) & 1 & b_1 \\ 0 & D(1-6n) & 1 \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

(единственный ненулевой элемент матриц  $C_n$  это  $C_{13} = D(6n-5)$ ).

Решение цепочки (2.3) для искомого моментного вектора имеет вид матричной цепной дроби

$$X_1 = \frac{C_1 X_0}{A_1 + \frac{B_1 C_2}{A_2 + \frac{B_2 C_3}{A_3 + \dots}}} \quad (2.6)$$

а соответствующий вычислительный алгоритм легко реализуем на ЭВМ (см. подробнее в [4]).

3. Рассмотрим в качестве первого примера броуновское движение системы в потенциальных ямах вида

$$G_1(x) = \text{sh}(x), \quad G_2(x) = \text{tg}(x) \quad (3.1)$$

Для использования изложенного метода ограничимся учетом первых двух нелинейных членов разложений

$$G_1(x) \simeq x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad G_2(x) \simeq x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \quad (3.2)$$

Первые два момента интенсивности, полученные с помощью цепной дроби (2.6), сопоставим с результатами численного интегрирования соответствующих вероятностных распределений.

Сравнительные данные приведены в таблице 1. Здесь в первых строках даны моменты, найденные численным интегрированием плотности вероятности (1.4) с нелинейностями вида (3.1), во вторых строках — соответствующие результаты численного интегрирования с полиномиальными нелинейностями (3.2), в третьих — результаты цепной дроби (2.6) с учетом аппроксимации (3.2). В последней строке приведены номера приближений (равные порядкам подходящих дробей (2.6), для которых достигалась заданная точность  $10^{-3}$  при вычислении средней интенсивности). Заметим, что для нелинейности  $G_1$  вторые и третьи строки практически совпадают. Относительно большое отличие вторых и третьих строк для нелинейности  $G_2$  связано с тем, что соответствующее вероятностное распределение

$$W_x(x) = C (\cos x)^{1/D}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

является финитным и моменты второй строки получались также интегрированием в этих пределах. При интегрировании в «бесконечных» пределах отличие этих строк не превосходит 0,003 для приведенных значений  $D$ . Более медленная сходимость цепной дроби для нелинейности  $G_2$  связана с большей величиной коэффициентов разложения в (3.2).|

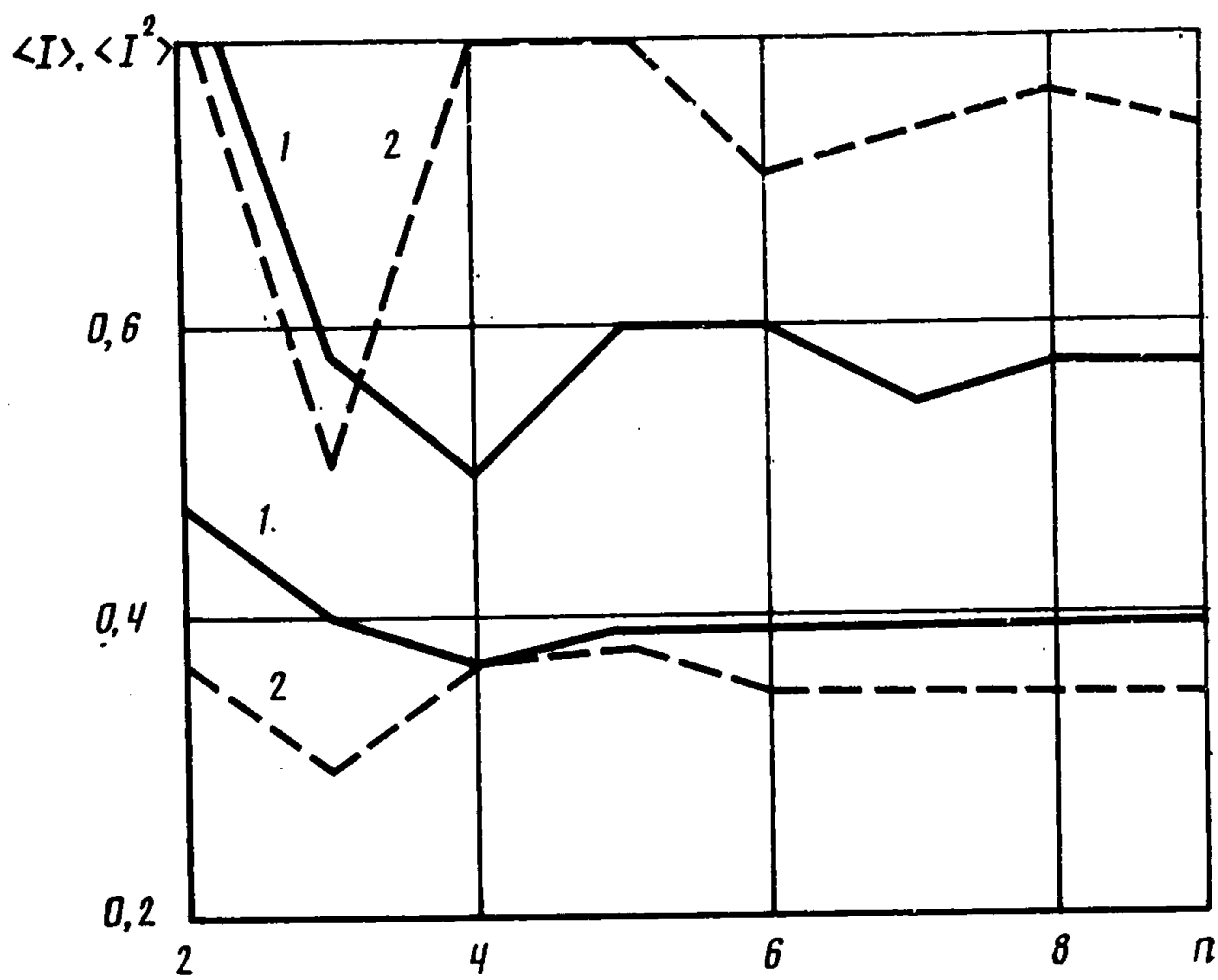
На основании выполненного на ПЭВМ численного анализа можно заключить, что сходимость цепных дробей в данной задаче имеет место для любых разумных значений

Таблица 1

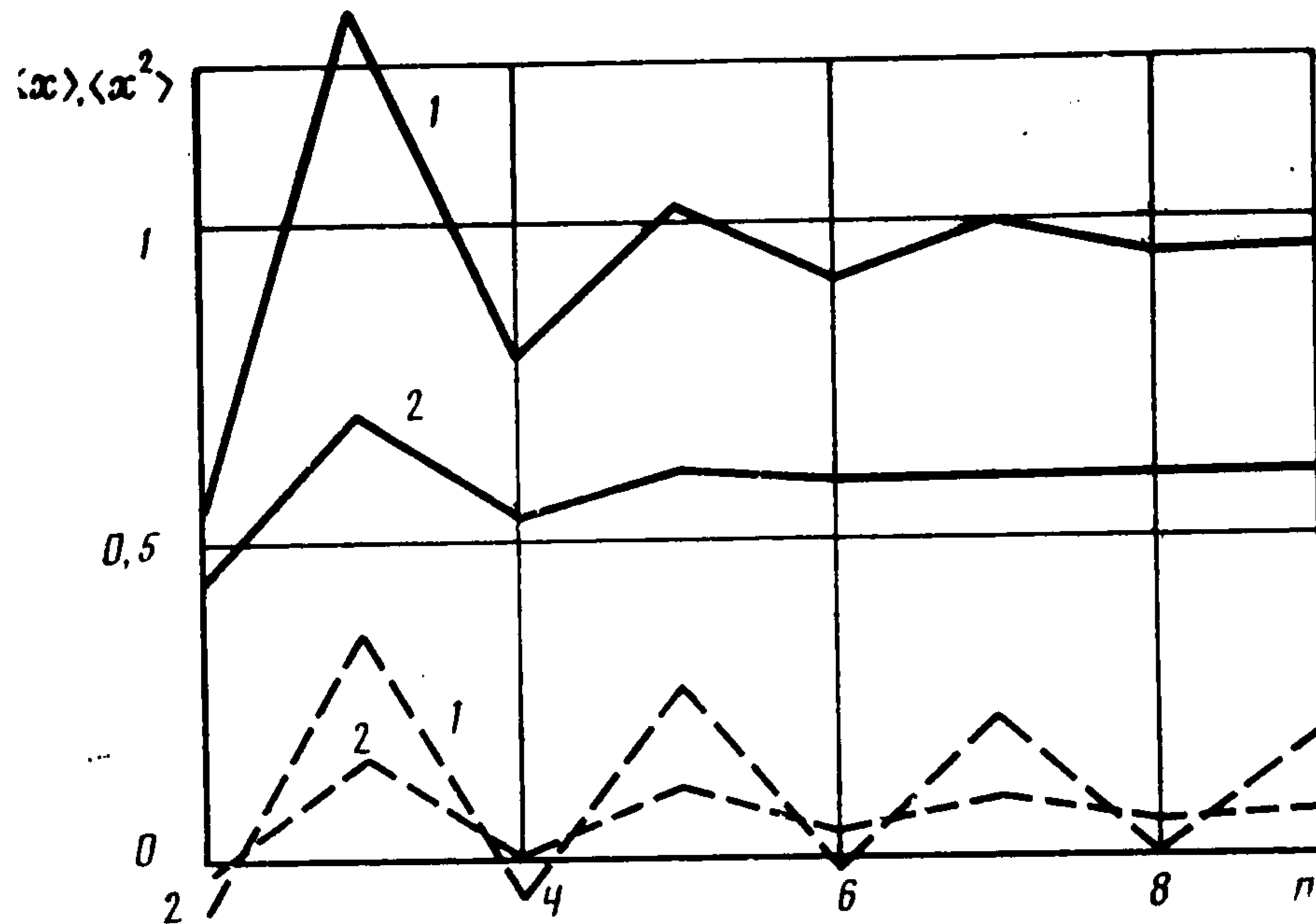
D	Нелинейность $G_1$			Нелинейность $G_2$		
	1	2	4	0,25	0,5	1
$\langle I \rangle$	0,731	1,223	1,936	0,197	0,322	0,467
	0,732	1,230	1,960	0,202	0,341	0,505
	0,732	1,229	1,961	0,202	0,346	0,559
$\langle I^2 \rangle$	1,396	3,723	8,894	0,102	0,250	0,479
	1,404	3,778	9,189	0,109	0,290	0,569
	1,403	3,780	9,181	0,109	0,304	0,749
n	4	5	7	4	6	9

Таблица 2

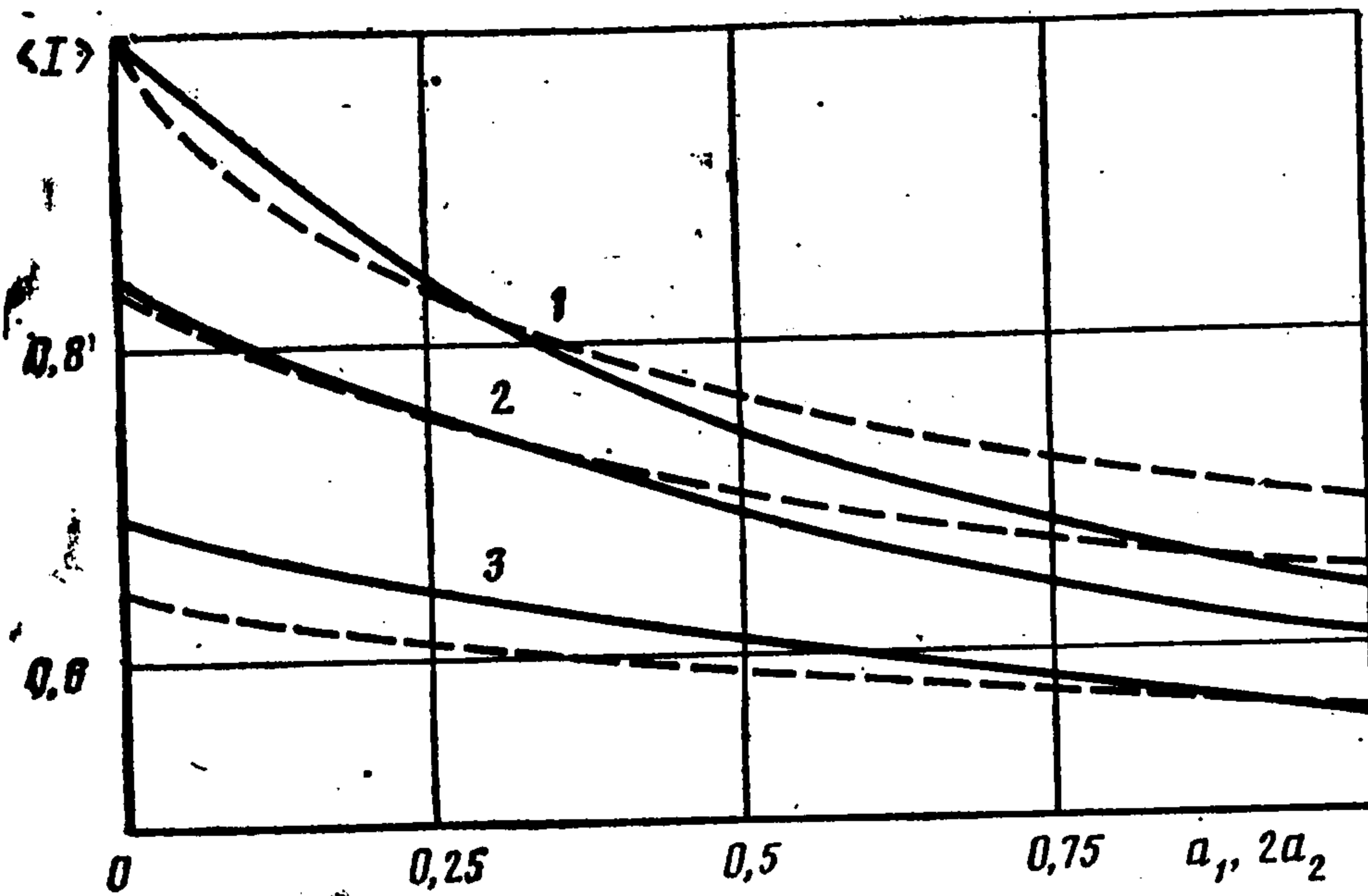
$a_2$	D = 0,5				D = 2			
	$a_1 = 0$	0,125	0,5	2	0	0,125	0,5	2
0	1	2	4	6	1	4	8	14
0,125	4	2	4	5	20	15	9	8
0,5	6	9	5	5	*	*	19	6
1	10	12	9	5	*	*	*	11



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

коэффициента кубичной нелинейности  $b_1$  и эффективной мощности входного шума  $D$ , хотя существует ограничение на коэффициент  $b_2$ , который должен быть меньше единицы и не превосходить  $b_1$ . Представление о сходимости метода дает фиг. 1, построенная для весьма больших значений нелинейностей ( $b_1 = 1, b_2 = 0,5$ ). Здесь  $n$  — номер приближения, сплошной линией показаны значения средней интенсивности, штрихами — с среднего квадрата. Нижние кривые построены для  $D = 1$ , верхние — для  $D = 2$ .

4. Рассмотрим теперь несимметричную потенциальную яму, считая, что разложение функции  $g(x)$  содержит все степени от единицы до  $2m$ . Несимметрия приводит к отличным от нуля нечетным моментам координаты, поэтому моментные векторы вводим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (\langle x \rangle, \dots, \langle x^{2m-1} \rangle, \langle x^{2m} \rangle), \dots \\ \mathbf{X}_n &= (\langle x^{2(n-1)m+1} \rangle, \langle x^{2(n-1)m+2} \rangle, \dots, \langle x^{2n-m} \rangle) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Цепочка для стационарных моментов аналогична (2.2):

$$\langle x^s \rangle + \sum_{k=1}^{2m} b_k \langle x^{s+k} \rangle = (s-1) D \langle x^{s-2} \rangle, \quad s = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Представление вектора  $\mathbf{X}_1$  имеет вид (2.6), где матрицы находятся на основании формул (4.1), (4.2). В частности, при учете только двух членов разложения нелинейности ( $m = 1$ ), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &= (\langle x^{2n-1} \rangle, \langle x^{2n} \rangle), \quad n = 1, 2, \dots \\ A_n &= \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} b_2 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad C_n = D \begin{vmatrix} 2n-2 & 0 \\ 0 & 2n-1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ясно, что интерес представляют четные моменты, а нечетные играют роль поправок, связанных с несимметрией потенциала. Численный анализ показывает, что сходимость метода имеет место при любых разумных значениях коэффициента кубической нелинейности  $b_2$ , а коэффициент  $b_1$  должен быть меньше единицы и не превосходить  $b_2$  (его знак влияет на знак нечетных моментов и не влияет на четные).

Представление о сходимости цепной дроби дает фиг. 2, подобная фиг. 1. Сплошные линии — средний квадрат координаты, штриховые — среднее значение. Заметим, что средние значения сходятся к точному результату значительно медленнее, чем  $\langle x^2 \rangle$ .

5. Рассмотрим влияние нелинейного демпфирования, считая теперь жесткость линейной ( $g(x) = 0$ ). Функцию  $f(x)$  аппроксимируем разложением

$$f(x) \simeq a_1 x^2 + a_2 x^4 \quad (5.1)$$

Полагая систему добротной, перейдем стандартным образом к амплитуде и фазе колебания и выполним при статистическом усреднении усреднение по быстрому времени (см., например, [2, 6]). При этом статистические характеристики амплитуды развязываются с фазовыми и можно получить следующую цепочку уравнений для моментов интенсивности ( $I = 1/2 A^2$ ,  $A$  — амплитуда):

$$\langle I^s \rangle + 1/2 a_1 \langle I^{s+1} \rangle + 1/2 a_2 \langle I^{s+2} \rangle = s D \langle I^{s-1} \rangle \quad (5.2)$$

Матричное описание этой системы мало отличается от формул (2.4): матрицы  $B_n$  совпадают с указанными в (2.4), где  $b_k = 1/2 a_k$ ,  $k = 1, 2$ , а остальные имеют вид

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 a_1 \\ -2nD & 1 \end{vmatrix}, \quad C_n = \begin{vmatrix} 0 & (2n-1)D \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Таблица 2 дает представление о зависимости сходимости результатов от величин  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $D$ . В ней указаны номера приближений, обеспечивающих абсолютную точность  $10^{-3}$  для средней интенсивности (как показано в [5], для чисто кубической нелинейности ( $a_2 = 0$ ) соответствующая одномерная цепная дробь всегда сходится). Символ \* означает, что заданная точность не достигается. Как видно из таблицы, с ростом эффективной

мощности шума  $D$  и коэффициента  $a_2$  сходимость замедляется. Сходимость ухудшается также при  $a_2 \gg a_1$ , но такая ситуация физически неестественна.

На фиг. 3 показана зависимость средней интенсивности колебаний от коэффициентов  $a_1$  (сплошные линии) и  $a_2$  (штриховые) при  $D = 1$ . Для приведенных значений параметров сходимость цепной дроби к точным результатам имела место. Точные значения моментов можно найти интегрированием вероятностного распределения интенсивности

$$W(I) = C \exp[-D^{-1}I(1 + a_1I + \frac{1}{3}a_2I^2)]$$

6. В заключение укажем на возможность использования данного метода непосредственно к стохастическому уравнению (1.1), если нелинейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  заданы разложением вида (2.1). Закрытое статистическое описание при этом возможно только для марковской совокупности  $\{x, y\}$ . Цепочка уравнений для стационарных значений совместных моментов  $\langle p; q \rangle \equiv \langle x^p y^q \rangle$  имеет вид

$$qQ \langle p+1; q-1 \rangle + pQ \langle p-1; q+1 \rangle + q \langle p; q \rangle + \\ + q \sum_{k=1}^m (a_k \langle p+2k; q \rangle + Qb_k \langle p+2k+1; q-1 \rangle) = q(q-1)D \langle p+1; q-2 \rangle \quad (6.1)$$

где индексы  $p$  и  $q$  принимают натуральные значения, сумма их должна быть четной в силу равенства нулю всех нечетных моментов. (Моменты вида  $\langle p; 1 \rangle$ , очевидно, также равны нулю.) Исходный моментный вектор  $X_1$  здесь имеет компоненты

$$X_1 = (\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle; \langle x^4 \rangle, \langle x^2 y^2 \rangle, \langle xy^3 \rangle, \langle y^4 \rangle; \dots \\ \langle x^{2m} \rangle, \langle x^{2m-2} y^2 \rangle, \langle x^{2m-3} y^3 \rangle, \dots, \langle y^{2m} \rangle) \quad (6.2)$$

и размерность равна

$$l_1 = 2 + 4 + \dots + 2m = m(m+1)$$

Как следует из (6.1), размерность векторов высших порядков, вводимых аналогично  $X_1$ , таковы:

$$l_2 = m(3m+1), \dots, l_n = m[(2n-1)m+1]$$

Решение для вектора  $X_1$  имеет вид (2.6), где матрицы  $A_n, B_n, C_n$  определяются на основании (6.1), их размерность теперь растет с ростом порядка. Ранее [4] подобная задача решалась для случая чисто кубической нелинейности ( $m = 1$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
4. Музычук О. В. Метод матричных цепных дробей для анализа нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 2. № 2. С. 169—175.
5. Музычук О. В. О некоторых применениях цепных дробей к анализу нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 2. С. 190—198.
6. Медведев С. Ю., Музычук О. В. Статистические характеристики нелинейной резонансной системы, параметрически возбуждаемой случайной силой / Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1. С. 49—58.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
5.VI.1990