Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36 : 534.1

А. С. Ковалева

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Излагается процедура построения последовательных приближений в стохастических системах, приводимых к стандартной форме, с возмущениями, отличными от «белого шума». Показано, что в первом приближении решение возмущенной системы слабо сходится к решению некоторой усредненной детерминированной системы, во втором приближении — к решению некоторого усредненного диффузионного уравнения; высшие приближения позволяют оценить отклонения процесса от диффузионного. Интервал сходимости зависит от свойств детерминированного решения уравнения первого приближения.

1. Рассматриваются системы, уравнения движения которых приводятся к стандартной форме вида

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x),\ x(0) = a \in R_n \tag{1.1}$$

Здесь ε — малый параметр. При фиксированных x функции $F(t, \cdot)$, $G(t, \cdot)$ — случайные процессы с математическими ожиданиями $\mathrm{M}F(t, \cdot) = f(t, \cdot)$, $\mathrm{M}G(t, \cdot) = g(t, \cdot)$.

В дальнейшем предполагается, что функции f, g периодичны или условно-периодичны по t и равномерно относительно $x \in S \subset R_n$ существуют средние

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x)\, dt \tag{1.2}$$

функция $\bar{G}(x)$ определяется аналогично. Прочие ограничения на коэффициенты системы (1.1) формулируются ниже.

До настоящего времени выделялись два частных случая системы (1.1) [1, 2].

а) $\bar{F}(x) \not\equiv 0$. Тогда [1] при соответствующих ограничениях решение $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau_1)$ системы (1.1) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится [3] к детерминированному процессу $x_0(\tau_1)$ — решению уравнения

$$dx_0/d\tau_1 = \bar{F}(x_0),\ x_0(0) = a,\ \tau_1 = \varepsilon t \tag{1.3}$$

Если решение $x_0(\tau_1)$ уравнения (1.3) асимптотически устойчиво, то сходимость $x_\varepsilon \to x_0$ обеспечивается при $0 \leqslant \tau_1 < \infty$ [4], если требование устойчивости не налагается, то $x_\varepsilon \to x_0$ при $0 \leqslant \tau_1 \leqslant T_1$, где T_1 не зависит от ε [1, 4].

б) $\bar{F}(x) \equiv 0$. Тогда [2] при соответствующих ограничениях решение $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau_2)$ системы (1.1) при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к диффузионному процессу — решению стохастического дифференциального уравнения

$$dx_0 = b(x_0)d\tau_2 + \sigma(x_0)dw,\ x_0(0) = a,\ \tau_2 = \varepsilon^2 t \tag{1.4}$$

где $w(\tau_2)$ — стандартный мерный винеровский процесс, коэффициенты b и σ вычисляются усреднением некоторых моментных характеристик процессов F, G [2, 4]. Если решение x_0 экспоненциально устойчиво [5], то сходимость обеспечивается при $0 \leqslant \tau_2 < \infty$ [4, 6], если требование устойчивости не налагается, то $x_\varepsilon \to x_0$ при $0 \leqslant \tau_2 \leqslant T_2$, где T_2 не зависит от ε [2, 4, 6].

Обоснованию предельного перехода от (1.1) к (1.3), (1.4) посвящены многочисленные работы (подробная библиография имеется, например, в [4]).

Очевидно, что в случае, когда система (1.3) асимптотически устойчива (или неустойчива), дальнейшее уточнение решения нецелесообразно, так как учет малых добавок не меняет качественных представлений о характере решения. Построение высших приближений необходимо в тех случаях, когда $\bar{F}(x) \not\equiv 0$, но система (1.3) устойчива неасимптотически, т. е. полученное детерминированное решение не позволяет судить об эволюции решения возмущенной системы на больших интервалах времени.

В дальнейшем обозначаем $x_\varepsilon(\tau)$ — решение некоторой возмущенной системы, $x_0(\tau)$ — решение аппроксимирующей (при $\varepsilon \to 0$) системы, причем траектории процессов $x_\varepsilon(\tau)$, $x_0(\tau)$ лежат в пространстве $D_n[0, \infty)$ [3] функций без разрывов второго рода. Для доказательства слабой сходимости x_ε к x_0 при $\varepsilon \to 0$ достаточно показать, что для любой непрерывной ограниченной функции φ, определенной на $D_n[0, \infty)$, выполняется условие [3]

$$\Phi_\varepsilon = \mathrm{M}\varphi(x_\varepsilon(\tau)) \to \mathrm{M}\varphi(x_0(\tau)) = \Phi_0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{1.5}$$

Задача состоит в построении уравнения, определяющего с заданной точностью процесс $x_0(\tau)$ или функционал Φ_0, и в оценке сходимости Φ к Φ_0.

2. Для построения решения используется асимптотическая процедура аппроксимации производящего дифференциального оператора системы (1.1) [4, 7, 8] в сочетании с методом многомасштабных разложений [9]. Введем необходимые определения [4, 7].

Пусть $V(\tau)$ — случайный процесс с траекториями в R_1, определенный на стандартном вероятностном пространстве [7] (для краткости указываем только зависимость процесса от аргумента τ, опуская зависимость от вероятностного аргумента). Пусть далее $\mathrm{M}_s V(\tau)$ — условное математическое ожидание процесса $V(\tau)$ при $s \leqslant \tau$. Предполагается, что с вероятностью единица функция $V(\tau)$ непрерывна справа, отлична от нуля только на некотором конечном интервале времени $\tau \in [0, T]$ и $\sup \mathrm{M}\,|V(\tau)| < \infty$.
Если процесс $V(\tau)$ обладает указанными свойствами, то $V(\tau) \in A$.

Введем в рассмотрение оператор L^ε и его область определения $D(L^\varepsilon)$ [4, 7]. Говорят, что $V \in D(L^\varepsilon)$ и $L^\varepsilon V = Y$ если V, $Y \in A$ и

$$\lim_{\delta \to 0+} \mathrm{M}\,|\,\delta^{-1}[\mathrm{M}_\tau V(\tau + \delta) - V(\tau)] - Y(\tau)| = 0 \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует [4, 7]

$$M_\tau V(\tau + \delta) - V(\tau) = \int_\tau^{\tau+\delta} M_\tau L^\varepsilon V(u)\,du \tag{2.2}$$

и из (2.2) имеем [4, 7]

$$\mathrm{M}_{\tau,x} V(x_\varepsilon(\theta)) - V(x) = \int_\tau^\theta \mathrm{M}_{\tau,x} L^\varepsilon V(x_\varepsilon(u))\,du \tag{2.3}$$

Для системы (1.3) оператор L^ε совпадает с оператором

$$L^\varepsilon = L_1 = \bar{F}'(x)\partial/\partial x \tag{2.4}$$

для системы (1.4) — с производящим дифференциальным оператором марковского процесса

$$L^\varepsilon = L_2 = b'(x)\partial/\partial x + {}^1/_2 \operatorname{Tr} A(x)\partial^2/\partial x^2 \tag{2.5}$$

Соотношения (2.3)—(2.5) указывают способ вычисления и сравнения функционалов на траекториях возмущенной и аппроксимирующей систем.

Пусть $x_0(\tau)$ — некоторый марковский процесс с производящим оператором L (отметим, что решение детерминированной системы также может рассматриваться как марковский процесс [5]). Как доказано в [7], если для любой достаточно гладкой финитной функции $V(\tau, x) \in D(L)$ и любого $T < \infty$, где T не зависит от ε, найдется функция $V^\varepsilon(\tau)$, такая, что при $\tau \in [0, T]$, $\varepsilon \to 0$.

$$\lim \mathrm{M}\,|V^\varepsilon(\tau) - V(\tau, x_\varepsilon(\tau))| = 0 \tag{2.6}$$

$$\lim \mathrm{M}\,|L^\varepsilon V^\varepsilon(\tau) - (\partial/\partial\tau + L)V(\tau, x_\varepsilon(\tau))| = 0$$

и при $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$, $\tau \in [0, T]$ последовательность $x_\varepsilon(\tau)$ слабо компактна [3], то процесс $x_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к марковскому процессу $x_0(\tau)$ с производящим оператором L.

3. Используя технику, развитую в [8], построим аппроксимирующий оператор L для системы (1.1). Вводя новую независимую переменную $\tau_2 = \varepsilon^2 t$, определим на траектории $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau_2)$ системы (1.1) некоторую достаточно гладкую функцию $V(\tau_1, \tau_2, x_\varepsilon)$, обращающуюся в нуль вне некоторой ограниченной области S_T: $\{x_\varepsilon \in S, \tau_2 \in [0, T]\}$ и равномерно ограниченную по своим переменным внутри области S_T. Построим функцию $V^\varepsilon(\tau_2)$, связанную с $V(\tau_1, \tau_2, x_\varepsilon(\tau_2))$ соотношением

$$V^\varepsilon(\tau_2) = V(\tau_1, \tau_2, x_\varepsilon) + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 \tag{3.1}$$

$$(V_k = V_k(t, \tau_1, \tau_2, x_\varepsilon),\ x_\varepsilon = x_\varepsilon(\tau_2))$$

и выберем коэффициенты V_1, V_2 таким образом, чтобы выполнялись условия (2.6).

Если функция V не зависит от τ_1 и подчиняется уравнению

$$\partial V/\partial\tau_2 + LV = 0,\ V(T_2, x) = \varphi(x) \tag{3.2}$$

где L — искомый производящий оператор, а φ — достаточно гладкая функция, то оценка

$$|\mathrm{M}_{0,a}\varphi(x_\varepsilon(T_2)) - V(0, a)| \to 0,\ \varepsilon \to 0 \tag{3.3}$$

справедлива, если при $0 \leqslant \tau_2 \leqslant T_2 \leqslant T$ выполняются условия (2.6) [8]. Построим уравнение, аналогичное (3.2) в случае, когда V зависит от $\tau_1 = \tau_2/\varepsilon$, т. е. $\partial V/\partial\tau_2 = \varepsilon^{-1}V_{\tau_1} + V_{\tau_2}$

Запишем равенство [8]

$$\begin{aligned} L^\varepsilon V^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(V_{\tau_1} + V_x'F + L_tV_1) + (V_{\tau_2} + V_{1\tau_1} + V_{1x}F + V_x'G + L_tV_2) +{} \\ + \varepsilon(V_{1\tau_2} + V_{2\tau_1} + V_{2x}'F + V_{1x}'G) + \varepsilon^2 V_{2\tau_2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь и ниже штрих — знак транспонирования, аргументы функций опущены. Оператор L_t определяется аналогично L^ε [8]:

$$L_tV = \lim_{\Delta\to 0+} \Delta^{-1}[\mathrm{M}_tV(t + \Delta, \tau, x) - V(t, \tau, x)]$$

аргументы x и $\tau = \tau_1, \tau_2$ рассматриваются как фиксированные параметры. Равенство понимается в слабом смысле (2.1).

Для определения производящего оператора L построим функцию V таким образом, чтобы коэффициенты при ε^0, ε^{-1} в правой части (3.4) обращались в нуль. Будем иметь

$$V_{\tau_1} = -(V_x'F + L_tV_1) \tag{3.5}$$

Функцию V_1 выберем таким образом, чтобы исключить из правой части (3.5) быстро осциллирующие члены; при этом функция V_1 не должна содержать секулярных (по t) слагаемых. Тогда [8]

$$V_1 = V_x'EF \tag{3.6}$$

$$EF = \int\limits_t^\infty [\mathrm{M}_tF(s,x) - \mathrm{M}F(s,x)]\,ds - \int\limits_0^t [\mathrm{M}F(s,x) - \bar{F}(x)]\,ds$$

где под $\bar{F}$ понимается операция усреднения (1.2). Уравнение (3.6) перепишем в виде

$$V_1 = V_x'\,[\Phi_F(t,x) - S_F(t,x)] \tag{3.7}$$

где Φ_F — стохастическая, S_F — детерминированная составляющие оператора EF.

Из соотношений (3.5)—(3.7) при учете свойств условного математического ожидания [3] следует [8]

$$V_{\tau_1} + \bar{F}'V_x = V_{\tau_1} + L_1V = 0 \tag{3.8}$$

Приравнивая нулю второе слагаемое в (3.4), получим равенство

$$V_{\tau_2} = -(V_{1\tau_1} + V_{1x}'F + V_x'G + L_tV_2) \tag{3.9}$$

преобразуя которое при учете (3.7), (3.8), будем иметь

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_i}F_i = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(\Phi_{iF} - S_{iF})(F_j - \bar{F}_j) + \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi_{iF}}{\partial x_j} - \frac{\partial S_{iF}}{\partial x_j}\right)F_j \tag{3.10}$$

Здесь индексы определяют соответствующие компоненты векторов; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исключая из правой части равенства (3.9) быстро осциллирующие слагаемые, получим

$$V_2(t,x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(EA_{ij} + EP_{ij} + EB_{ij}) + \frac{\partial V}{\partial x_i}(EK_i + EP_i + EB_i + EG_i) \tag{3.11}$$

Оператор E определен так же, как в (3.6), все коэффициенты вычисляются в точке (t, x) и

$$A_{ij} = \Phi_{iF}F_j^0,\ P_{ij} = \Phi_{iF}f_j^0 - S_{iF}F_j^0,\ \mathrm{M}P_{ij} = 0 \tag{3.12}$$

$$B_{ij} = -S_{iF}f_j^0,\quad F^0 = F - f,\ f^0 = f - \bar{F}$$

$$K_i = \frac{\partial \Phi_{iF}}{\partial x_j}F_j^0, \qquad B_i = -\frac{\partial S_{iF}}{\partial x_j}f_j$$

$$P_i = \frac{\partial \Phi_{iF}}{\partial x_j}f_j - \frac{\partial S_{iF}}{\partial x_j}F_j^0, \qquad \mathrm{M}P_i = 0$$

В результате очевидных преобразований будем иметь

$$V_{\tau_2} + L_2V = 0 \tag{3.13}$$

причем оператор L_2 определен формулой (2.5), где

$$b(x) = \bar{K}(x) + \bar{B}(x) + \bar{G}(x)$$

и, в силу (3.12)

$$A(x) = \{a_{ij}(x)\},\ i, j = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

$$a_{ij}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\infty \mathrm{M}\, [F_i{}^0(s, x) F_j{}^0(t, x)]\, ds$$

$$\bar{K}_i(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_t^\infty \mathrm{M} \left[\frac{\partial F_i{}^0(s, x)}{\partial x_j} F_j{}^0(t, x)\right] ds$$

$$B_i(x) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t \frac{\partial f_i{}^0(s, x)}{\partial x_j} f_j(t, x)\, ds$$

что совпадает с результатами, полученными [2] при $\bar{F} = 0$.

Из (3.4), (3.5), (3.9) имеем

$$L^\varepsilon V^\varepsilon = \varepsilon\,(R_1 + \varepsilon R_2) V \qquad (3.15)$$

где выражения R_1, R_2 могут рассматриваться как операторы, действующие на V.

Наконец, из (3.8), (3.13) следует уравнение для определения функции V. В соответствии с идеей многомасштабных разложений [9] представим $V = V(\tau_1, \tau_2, x) = V(\tau_2/\varepsilon, \tau_2, x) = V_0(\tau_2, x, \varepsilon)$, $\partial V_0/\partial\tau_2 = \varepsilon^{-1} V_{0\tau_1} + V_{,0\tau_2}$, т. е.

$$\partial V_0/\partial\tau_2 + LV_0 = 0, \quad V_0(T_2, x, \varepsilon) = \varphi(x) \;\; L = \varepsilon^{-1} L_1 + L_2 \qquad (3.16)$$

Покажем, что при соответствующих предположениях о коэффициентах системы (1.1) и характере решения уравнения (3.16) оценка (3.3) справедлива для $V = V_0$ при $0 \leqslant T_2 \leqslant T$ где T не зависит от ε.

4. Предварительно установим условия, при которых выполняются требования (2.6). Предполагается, что коэффициенты системы (1.1) представимы в виде

$$F(t, x) = F_0(t, x)\xi(t) + f(t, x) \qquad (4.1)$$
$$G(t, x) = G_0(t, x)\xi(t) + g(t, x)$$

где $\xi(t) \in R_l$ — случайный процесс с нулевым средним, $F_0(t, x)$, $G_0(t, x)$ — детерминированные матрицы соответствующей размерности. Процесс $\xi(t)$ удовлетворяет следующим условиям перемешивания (*условиям А*):

$$\mathrm{M} \mid \mathrm{M}_t [[[\xi(t_1)]^0 \xi(t_2)]^0 \ldots \xi(t_n)]^0 \leqslant c\alpha_1(t_1 - t)\alpha_2(t_2 - t_1)\ldots$$
$$\ldots \alpha_n(t_n - t_{n-1})$$
$$t \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n, \; n = 1, 2, 3$$
$$[\varphi]^0 = \varphi - \mathrm{M}\varphi, \; \mathrm{M}\xi(t) = 0$$

c — постоянная.

$$\alpha_j(t) > 0, \quad \int_0^\infty \alpha_j(u)\, du < \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Условия А выполняются, в частности, если компоненты вектора $\xi(t)$ — нормальные марковские стационарные процессы или процессы, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания (эти случаи подробно рассматривались в [4, 8]).

Коэффициенты $U_1 = F_0$, f и $U_2 = G_0$, g удовлетворяют условиям Б:

1). Функции U_1, U_2 вместе с производными U_{1x}, U_{1xx}, U_{2x} ограничены и периодичны или условно-периодичны по t при $t \in (-\infty, \infty)$ равномерно относительно $x \in S \subset R_n$ и непрерывны при $x \in R_n$ и ограничены при $x \in S$ равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$.

2). Пределы (1.2), (3.14) существуют равномерно относительно $x \in S$, Если функция $V_2(\tau, x, \cdot) \in C_{2,4}$ равномерно относительно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, то при выполнении условий A и $Б$ из (3.6), (3.11), (3.15) следует [8], что при достаточно малых ε и τ_2, $x \in S_T$

$$M \mid V_j \mid \leqslant C_j \mid V_0 \mid, \quad M \mid R_j V_0 \mid \leqslant K_j \mid V_0 \mid \qquad (4.2)$$
$$j = 1, 2$$

где C_j, K_j — постоянные, не зависящие от ε, $\mid V_0 \mid$ — норма функции $V_0(\tau_2, x, \cdot)$ в пространстве $H^{l/2, l}$, $l = 4 + \alpha$.

Таким образом, условия (2.6) выполняются, если при достаточно малых ε выполняется условие В

$$\mid V_0(\tau_2, x, \varepsilon) \mid \leqslant C, \quad \tau_2, x \in S_T \qquad (4.3)$$

где C — постоянная, не зависящая от ε.

При $\bar{F} \not\equiv 0$ условие (4.3) может быть выполнено только в некоторых частных случаях. Проверка этого условия связана, как правило, с возможностью перехода к пределам при $\varepsilon \to 0$. Наиболее легко проверяется ситуация

$$f(t, x) = P(t)x, \quad \bar{F}(x) = \bar{P}x \qquad (4.4)$$

причем все собственные числа матрицы $\bar{P}$ — чисто мнимые. Тогда заменой переменных $x = \exp(\bar{P}\tau_2/\varepsilon)z$ уравнение (3.16) приводится к виду (3.2) относительно z с условно периодическими по $\tau_1 = \tau_2/\varepsilon$ коэффициентами, допускающими усреднение по τ_1 [9]. Из легко проверяемой ограниченности решения усредненного уравнения следует оценка (4.3) для решения уравнения (3.16) с оператором $L_1 = (\bar{P}x, \partial/\partial x)$. Переход к пределу возможен и в других системах с периодической структурой, допускающих усреднение [9].

Предположим, что выполняется более общее условие В′, не связанное с конкретной структурой системы (3.16). Пусть оценки (4.2) справедливы и существует функция $v_0(\tau_2, x) \in C_{2,4}$, удовлетворяющая уравнению (3.2) с равномерно параболическим оператором

$$L = \beta'(x)\partial/\partial x + {}^1/_2 \operatorname{Tr} \alpha(x)\partial^2/\partial x^2 \qquad (4.5)$$

такая, что

$$\mid v_0(\tau_2, x) \mid \leqslant C_0, \quad \tau_2, x \in S_T$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mid V_0(\tau_2, x, \varepsilon) - v_0(\tau_2, x) \mid = 0$$

Пусть далее диффузионный процесс $x_0(\tau_2)$, которому соответствует производящий оператор (4.5), регулярен [5]. Тогда, повторяя рассуждения работы [8], легко показать, что при выполнении условий А, Б, В или В′ справедлива оценка (3.3) для функции $V = V_0$ или оценка

$$\mid M_{0,a}\varphi(x_\varepsilon(T_2)) - v_0(0, a) \mid \leqslant C\varepsilon \qquad (4.6)$$

при $0 \leqslant T_2 \leqslant T$. Здесь постоянные C_0, C, T не зависят от ε.

Замечание. В разложении (3.1) удерживались только слагаемые порядка ε, ε^2. Удерживая в разложении слагаемые высших порядков $\varepsilon^m V_m(t, \ldots, \tau_m, x_\varepsilon)$, $\tau_m = \varepsilon^m t$, $m \geqslant 3$, получим уравнение в частных производных для функции V_0, содержащее производные порядка $\partial^m V_0/\partial x_m$. Появление старших производных позволяет оценить отклонение процесса от диффузионного. При соответствующих предположениях оценки (2.6), (3.3) справедливы на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon^m$.

5. *Примеры*. 1. Динамическая устойчивость верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса (фиг. 1). Уравнение свободных колебаний маятника в окрестности верхнего положения равновесия приводится к виду

$$\theta^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon^2\alpha\theta^{\cdot} - [\varepsilon^2 k^2 + \varepsilon w(t)]\theta = 0 \qquad (5.1)$$

Здесь θ — угол отклонения маятника, $w(t) = \xi^{\cdot\cdot}(t)$ — ускорение точки подвеса, k^2, α — физические параметры маятника, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Как известно, детерминированное периодическое [10] или условно-периодическое [11], возмущение может стабилизировать верхнее положение равновесия. Рассмотрим ситуацию, когда

$w(t)$ — случайный процесс. Следуя [11], приведем (5.1) к стандартной форме при помощи замены

$$\theta = x_1 [1 + \varepsilon\xi(t)], \quad \theta_1^{\cdot} = \varepsilon [x_2 + v(t) x_1], \quad v = \xi^{\cdot} \tag{5.2}$$

Тогда уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot} = \varepsilon x_2 (1 - \varepsilon\xi) \\ x_2^{\cdot} = \varepsilon (k^2 - \xi w) x_1 - \varepsilon v x_2 + \varepsilon^2 (-2\alpha v + k^2\xi) x_1 + \varepsilon^2 (-2\alpha + \xi v) x_2 \end{gathered} \tag{5.3}$$

Пусть $\xi(t)$ — стационарный нормальный марковский процесс с нулевым средним и ограниченной дисперсией σ_ξ^2; тогда $v(t)$ и $w(t)$ — также стационарные нормальные марковские процессы, причем дисперсия скорости σ_v^2 предполагается ограниченной. Следовательно, правые части системы (5.3) удовлетворяют условию A и все выводы разд. 2 справедливы. В результате очевидных преобразований получим

$$\begin{gathered} f_1(t, x) = x_2, \quad f_2(t, x) = -\rho x_1. \\ \rho = \sigma_v^2 - k^2 \end{gathered} \tag{5.4}$$

т. е. коэффициент $F(x)$ имеет вид (4.4), где собственные числа $p_{1,2}$ матрицы P определяются условием $p^2 + \rho^2 = 0$.

Следовательно, при $\sigma_v^2 > k^2$, $\rho > 0$ имеем $p_{1,2} = \pm i\rho^{1/2}$, т. е. собственные числа матрицы P лежат на мнимой оси, и на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$ система стабилизируется. Для оценки устойчивости рассмотрим следующее приближение. Из (5.3), (5.4), (3.14) имеем

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -2\alpha x_2, \quad \bar{K}(x) = \bar{B}(x) = 0$$

Компоненты a_{ij} матрицы диффузии (3.14) имеют вид

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = d^2 x_1^2$$

$$d^2 = 2\int_0^\infty K_v^2(u)\, du$$

где $K_v(u)$ — корреляционная функция процесса $v(t)$.

Таким образом

$$\begin{gathered} L_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \rho x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ L_2 = -2\alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d^2}{2} x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{gathered} \tag{5.5}$$

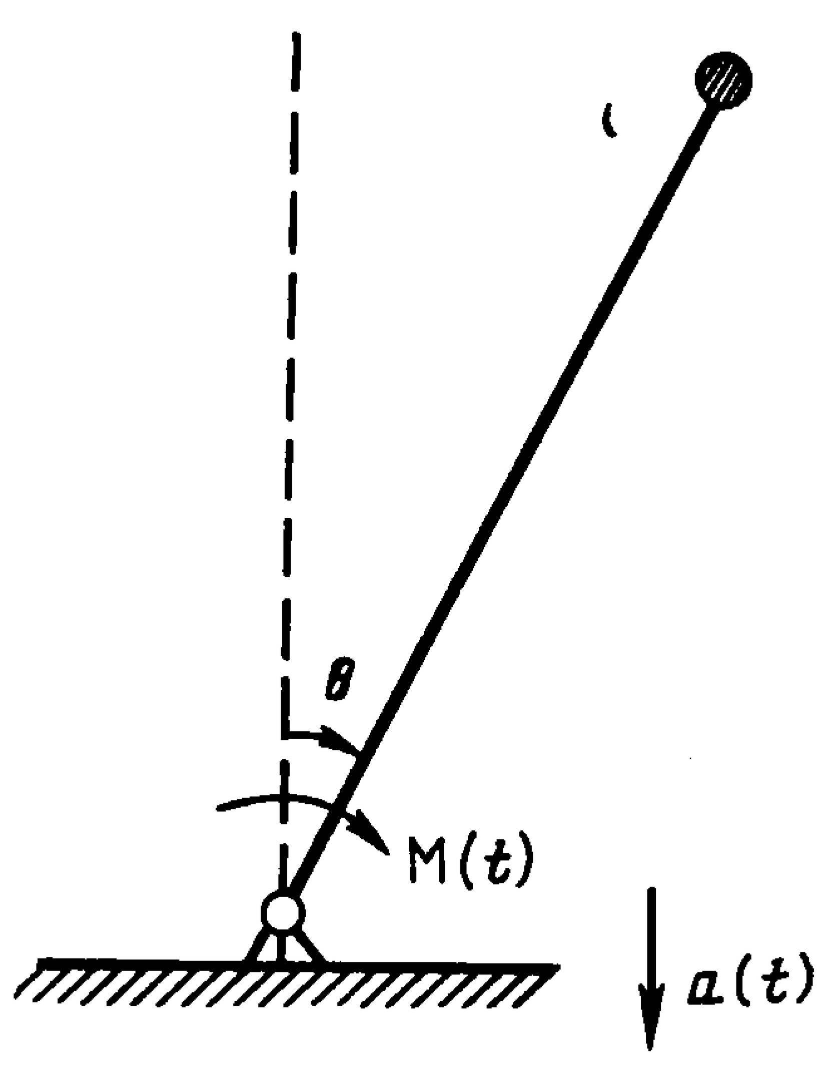
Вычисляя моментные характеристики процессов по уравнению (3.16) с оператором (5.5), получим, что при $\rho > 0$ и $\alpha > 0$ система устойчива в среднем, но устойчивость в среднеквадратичном определяется условием $2\alpha\rho > d^2$. При нарушении этого условия $Mx_{1,2}^2 \to \infty$ при $t \to \infty$ и, в силу (5.2), $M\theta_1^2 \to \infty$. Следовательно, возрастание интенсивности случайного возмущения, характеризуемого параметрами σ_v, d, приводя к стабилизации среднего значения амплитуды колебаний, вызывает неустойчивость.

2. Неустойчивость стационарного вращения маятника.

Уравнение вращения маятника (фигура) имеет вид

$$ml^2\theta^{\cdot\cdot} - ml(g + w(t)) \sin\theta + b\theta^{\cdot} = M(t)$$

Здесь m — масса, l — длина маятника, b — коэффициент диссипации, $M(t) = M_0 \sin \omega t$ — вращающий момент.



Вводя малый параметр $\varepsilon > 0$, запишем уравнения быстрого вращения маятника в виде

$$\theta^{\cdot} = x, \quad \psi^{\cdot} = \omega, \quad x^{\cdot} = \varepsilon\lambda^2 [1 + \zeta(t)] \sin\theta - \varepsilon^{3/2}\beta x + \varepsilon\gamma\sin\psi$$

$$\left(\psi = \omega t, \quad \zeta = \frac{w}{g}, \quad \varepsilon\lambda^2 = \lambda_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \varepsilon^{3/2}\beta = \beta_1 = \frac{b}{ml^2}, \quad \varepsilon\gamma = \gamma_1 = \frac{M}{ml^2}\right).$$

Здесь учтены условия стационарности быстрого вращения с частотой ω: $\lambda_1^2/\omega^2 \sim \varepsilon$, $\beta_1/\lambda_1 \sim \varepsilon$, $\gamma_1/\omega^2 \sim \varepsilon$. Как и в детерминированном случае, исследуем отклонения от стационарного вращения, имеющие порядок $\varepsilon^{1/2}$ [12].

Вводя новые переменные δ, z по формулам

$$\theta - \psi = \delta, \quad x - \omega = \mu z, \quad \mu = \varepsilon^{1/2}$$

получим уравнения в стандартной форме с малым параметром μ

$$\delta^{\cdot} = \mu z, \quad \delta(0) = \Delta \tag{5.6}$$

$$z^{\cdot} = \mu\lambda^2 [1 + \zeta(t)] \sin(\omega t + \delta) - \mu^2\beta\omega + \mu\gamma\sin\omega t + \mu^3 \ldots, \quad z(0) = \Omega$$

Усредненное уравнение (1.3) для системы (5.6) примет вид $\delta^{\cdot} = \mu z$, $z^{\cdot} = 0$, т. е. случайные возмущения не влияют на скорость вращения. Вычисляя слагаемые второго приближения, получим

$$\bar{B}_1 = -\lambda^2\omega^{-1}z\sin\delta, \quad \bar{B}_2 = 0, \quad \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = 0$$

$$\bar{G}_1 = -\beta\omega, \quad \bar{G}_2 = 0, \quad a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$$

$$a_{11} = {}^1/_2\lambda^4 S_\xi(\omega) = \sigma^2$$

и уравнение (3.16) примет вид

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial V_0}{\partial \delta} z - \frac{\partial V_0}{\partial z}\left(\beta\omega + \frac{\lambda}{\omega} z\sin\delta\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = 0 \tag{5.7}$$

Граничные условия

$$V_0(T_2, z, \delta, \mu) = \varphi(z), \quad \tau_2 = \mu^2 t = \varepsilon t \tag{5.8}$$

характеризуют изменение скорости вращения.

Уравнение (5.7) допускает усреднение по быстрой переменной δ [9]. Усредненное уравнение примет вид

$$\partial v_0/\partial\tau_2 - \beta\omega\partial v_0/dz + {}^1/_2\sigma^2\partial^2 v_0/\partial z^2 = 0, \quad v_0(T_2, z) = \varphi(z) \tag{5.9}$$

Производящему оператору (5.9) соответствует диффузионный процесс

$$dz_0 = -\beta\omega d\tau_2 + \sigma dw, \quad z_0(0) = \Omega \tag{5.10}$$

Из (5.9) следует, что $Mz_0 = (\Omega - \beta\omega\tau_2)$, т. е. случайные возмущения не влияют на характер движения системы в среднем. В свою очередь дисперсия скорости $D_z = [Mz_0^2 - (Mz_0)^2] = \sigma^2\tau_2$. Таким образом, при отсутствии диссипации скорость вращения остается постоянной (в среднем), однако случайные возмущения вызывают нестационарность вращения, так как $D_z \to \infty$ при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применение. 1966. Т. 11. № 2. С. 240—159.
2. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решения дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применение. 1966. Т. 11. № 3. С. 444—462.
3. *Биллингслей П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 351 с.
4. *Kushner H. J.* Approximation and weal convergence methods for random processes with applications to stochastic systems theory. Cambridge: MIT Press, 1984. 269 p.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. *Blankenship G., Papanicolaou G. C.* Stability and control of stochastic systems with wideband noise disturbances // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. № 3. P. 437—476.
7. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes: Characterization and convergence. N.Y.: Wiley, 1986. 534 p.
8. *Ковалева А. С.* О разделении движений в нелинейных колебательных системах со случайным возмущением // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 530—536.
9. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. C.* Asymptotic analysis for periodic structures, Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика, М.: Наука, 1970. 351 с.
11. *Красносельский М. А., Бурд Б. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
12. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Москва

Поступила в редакцию 27.VI.1990