

УДК 531.3

© 1991

Д. Ю. Погорелов

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются итерационные методы определения как изолированных значений, так и полного набора характеристических показателей (ХП) системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, матрица которой близка к постоянной. В основу алгоритма приведения к линейной системе с постоянной матрицей положен метод Ньютона — Канторовича решения нелинейных матричных уравнений. Приводится обобщение итерационного алгоритма на случай наличия близких ХП.

Метод применяется для численного исследования динамики экипажа на магнитной подвеске, движущегося с постоянной скоростью вдоль путевой структуры, представленной упругими динамически не связанными однородными балками [1, 2]. Проводится ковариационный анализ случайного процесса возмущенных колебаний системы с учетом неровностей путевой структуры. Вычисляются ХП и мультипликаторы системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему с параметрическим возбуждением, описываемую линейным уравнением

$$\dot{x} = (A_0 + A_1(t))x + f(t) \quad (1.1)$$

с постоянной $(m \times m)$ -матрицей A_0 , 2π -периодической матрицей параметрического возбуждения A_1 , векторами переменных состояния x и возмущений $f(t)$. Норма матрицы A_1 мала, кроме того, вначале предполагается, что A_0 имеет простую структуру. Введем матрицу R_0 правых собственных векторов матрицы A_0 и выполним преобразование $y = R_0 x$. В новых переменных уравнение (1.1) примет вид

$$\dot{y} = (\Lambda_0 + B(t))y + g(t), \quad \Lambda_0 = \text{diag} \{\lambda_{0j}\} \quad (1.2)$$

причем λ_{0j} — собственные значения матрицы A_0 . Не нарушая общности, считаем, что в разложении $B(t)$ в ряд Фурье

$$B(t) = \sum_k B_k e^{ikt}$$

отсутствует B_0 .

При достаточно малой матрице $B(t)$ каждое изолированное собственное значение λ_{0j} порождает счетное количество характеристических показателей (ХП) уравнения с периодическими коэффициентами (1.2), $\lambda_j + ik$ ($\lambda_j \approx \lambda_{0j}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а также мультипликатор $\rho_j = \exp(2\pi\lambda_j)$ с соответствующим ему решением уравнения (1.2) $y_j(t)$, $y_j(t + 2\pi) = \rho_j y_j(t)$. Решение $y_j(t)$ может быть выражено через ХП и постоянные векторы — столбцы, являющиеся аналогами собственных векторов системы с постоянными коэффициентами.

$$y_j(t) = \sum r_{jk} \exp((\lambda_j + ik)t)$$

Полное исследование системы с периодическими коэффициентами предполагает вычисление не только ХП, но и соответствующих векторов r_{jk} .

2. Итерационное вычисление изолированного ХП. Рассмотрим ХП λ , порожденный изолированным собственным значением λ_0 , и соответствующий набор векторов r_k . При $B(t) = 0$ имеем $\lambda = \lambda_0$, $r_k = 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; $r_0 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Не нарушая общности, считаем, что $r_0 = (1, \Delta r^T)^T$. Подставляя выражение $y(t) = \sum r_k e^{(\lambda+ik)t}$ в (1.2), получим систему матричных уравнений для определения λ и r_k

$$((\lambda + ik)E - \Lambda_0)r_k = \sum_l B_l r_{k-l}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$B_k = (b_{1k}, B_{1k}^T)^T = (b_{2k}, B_{2k}), \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0, \quad \Lambda_0 = \text{diag} \{\lambda_0, \Lambda_{01}\},$$

Здесь b_{1k}^T и b_{2k} — первая строка и первый столбец матрицы B_k соответственно. Рассмотрим уравнение системы (2.1) при $k = 0$ с учетом введенных обозначений распадающееся на два уравнения

$$\Delta\lambda = \sum b_{1l}^T r_{-l}, \quad \Delta r = U_0 (-\Delta\lambda \Delta r + \sum B_{1l} r_{-l}); \quad U_0 = (\lambda_0 E - \Lambda_{01})^{-1}$$

(E — единичная матрица). Для остальных уравнений (2.1) необходимо потребовать изолированность ХП, порождаемых λ_0 . При малой матрице $B(t)$ для этого достаточно условия $\lambda_0 - \lambda_{0j} \neq ik$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда существуют матрицы $U_k = ((\lambda_0 + ik)E - \Lambda_0)^{-1}$ и справедливы соотношения

$$r_k = U_k (-\Delta\lambda r_k + b_{2k} + B_{2k} \Delta r + \sum B_{1l} r_{k-l})$$

Рассмотрим теперь итерационный процесс

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{(n)} &= \sum b_{1l}^T r_{-l}^{(n-1)}, \quad \Delta r^{(n)} = U_0 (-\Delta\lambda^{(n)} \Delta r^{(n-1)} + \sum B_{1l} r_{-l}^{(n-1)}) \\ r_k^{(n)} &= U_k (-\Delta\lambda^{(n)} r_k^{(n-1)} + b_{2k} + B_{2k} \Delta r^{(n-1)} + \sum B_{1l} r_{k-l}^{(n-1)}) \\ n &= 1, 2, \dots, \quad r_k^{(0)} = 0, \quad \Delta r^{(0)} = 0, \quad \Delta\lambda^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и исследуем его сходимость. Обозначим

$$\delta r_0^{(n)} = \Delta r_0^{(n)} - \Delta r_0^{(n-1)}, \quad \delta r_k^{(n)} = r_k^{(n)} - r_k^{(n-1)}, \quad \delta\lambda^{(n)} = \Delta\lambda^{(n)} - \Delta\lambda^{(n-1)}$$

Для введенных величин из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \delta r_0^{(n)} &= U_0 (-\delta\lambda^{(n)} \Delta r^{(n-1)} - \Delta\lambda^{(n-1)} \delta r_0^{(n-1)} + \sum B_{1l} \delta r_{-l}^{(n-1)}) \\ \delta r_k^{(n)} &= U_k (-\delta\lambda^{(n)} r_k^{(n-1)} - \Delta\lambda^{(n-1)} \delta r_k^{(n-1)} + B_{2k} \delta r_0^{(n-1)} + \sum B_{1l} \delta r_{k-l}^{(n-1)}) \\ \delta\lambda^{(n)} &= \sum b_{1l}^T \delta r_{-l}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \delta r_k^{(1)} = U_k b_{2k}, \quad \delta r_0^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

Вводя согласованные нормы и используя обозначения

$$B = \sum \|B_j\|, \quad b_1 = \sum \|b_{1j}\|, \quad b_2 = \max \|b_{2k}\|, \quad \Delta = \min |\lambda_0 + ik - \lambda_{0j}|$$

$$c^{(n)} = \max \{\|r_k^{(n)}\|, \|\Delta r^{(n)}\|\}, \quad \delta c^{(n)} = \max \|\delta r_k^{(n)}\|, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

окончательно получим неравенство

$$\delta c^{(n)} \leq \delta c^{(n-1)} (B + b_1 (c^{(n-1)} + c^{(n-2)})) / \Delta, \quad c^{(1)} \leq b_2$$

Отсюда следует мажорирующее скалярное уравнение [3]

$$p = (b_2 + b_1 p + B p^2) / \Delta$$

и достаточное условие сходимости процесса (2.2)

$$\Delta \geq B + 2\sqrt{b_1 b_2} \quad (2.3)$$

Приведем также первое нетривиальное значение поправки к величине ХП

$$\Delta\lambda^{(2)} = \sum b_{1l}^T U_{-l} b_{2-l}$$

3. Итерационное решение проблемы приводимости. Решение задачи приводимости [4, 5] уравнения (1.2) эквивалентно определению постоянной матрицы C , кинематически подобной $\Lambda_0 + B(t)$. Рассмотрим сначала случай, когда матрица C диагонализируема. Определению подлежит периодическая матрица преобразования $R(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$(\Lambda_0 + B(t))R(t) - R'(t) = R(t)\Lambda, \quad \Lambda = \text{diag} \{\lambda_j\} \quad (3.1)$$

При решении уравнения (3.1) параллельно определяются ХП уравнения (1.2). Как и выше, матрица $B(t)$ предполагается малой, поэтому $R(t)$ близка к единичной матрице: $R(t) = E + X(t)$.

Для решения уравнения (3.1) возможно применение итерационного алгоритма ньютоновского типа. С этой целью рассмотрим соотношение

$$(\Lambda^{(k-1)} + B^{(k-1)})(E + X^{(k)}) - X^{(k)'} = (E + X^{(k)})(\Lambda^{(k)} + B^{(k)}) \quad (3.2)$$

$$k = 1, 2, \dots, \Lambda^{(0)} = \Lambda_0, B^{(0)} = B(t)$$

Предполагается, что

$$B^{(k)} = \sum B_l^{(k)} e^{ilt}, \quad X^{(k)} = \sum X_l^{(k)} e^{ilt}, \quad \Lambda^{(k)} = \text{diag} \{\lambda_j^{(k)}\} = \text{const}$$

Матрицу $B^{(k)}$ в (3.2) выберем из условия квадратичной скорости сходимости итераций. В результате получим уравнения для определения $X^{(k)}$, $B^{(k)}$, $\Lambda^{(k)}$

$$X^{(k)'} + X^{(k)}\Lambda^{(k-1)} - \Lambda^{(k-1)}X^{(k)} = B^{(k-1)} - \Delta\Lambda^{(k)}$$

$$B^{(k)} = (E + X^{(k)})^{-1}(B^{(k-1)}X^{(k)} - X^{(k)}\Delta\Lambda^{(k)}), \quad \Lambda^{(k)} = \Lambda^{(k-1)} + \Delta\Lambda^{(k)} \quad (3.3)$$

Матрица $\Delta\Lambda^{(k)}$ выбирается из условий существования периодического решения первого уравнения системы (3.3). Для этого необходимо, чтобы разложение в ряд Фурье диагональных элементов матрицы $B^{(k-1)} - \Delta\Lambda^{(k)}$ не содержало нулевых членов, а если все диагональные элементы матрицы $\Lambda^{(k-1)}$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_n^{(k-1)} - \lambda_j^{(k-1)} \neq il, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n \neq j$$

то указанное выше условие является и достаточным. В этом случае $\Delta\Lambda^{(k)} = \text{diag} \{b_{0jj}^{(k-1)}\}$, где $b_{0jj}^{(k-1)}$ — диагональные элементы матрицы $B_0^{(k-1)}$.

Элементы $x_{nj}^{(k)}$ матрицы $X^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_{nj}^{(k)'} + \Delta\lambda_{nj}^{(k-1)}x_{nj}^{(k)} = \sum b_{lnj}^{(k-1)} e^{ilt}, \quad n \neq j$$

$$x_{jj}^{(k)'} = \sum b_{ljj}^{(k-1)} e^{ilt}, \quad \Delta\lambda_{nj}^{(k-1)} = \lambda_j^{(k-1)} - \lambda_n^{(k-1)}$$

решение которых при указанных выше условиях имеет вид

$$x_{nj}^{(k)} = \sum_l \frac{b_{lnj}^{(k-1)}}{\Delta\lambda_{nj}^{(k-1)} + il} e^{ilt}, \quad x_{jj}^{(k)} = \sum_l \frac{b_{ljj}^{(k-1)}}{il} e^{ilt}$$

Если итерации (3.3) сходятся, то почти всегда с квадратичной скоростью. При этом $B^{(k)}$ и $X^{(k)}$ стремятся к нулю, диагональные элементы $\Lambda^{(k)}$ — к ХП, а произведение

$$R_0 (E + X^{(1)})(E + X^{(2)})(E + X^{(3)}) \dots$$

стремится к матрице $R(t)$. Как и в разд. 2, сходимость итераций (3.3) накладывает ограничение снизу на минимальное расстояние между ХП типа (2.3). Достаточное условие сходимости итераций имеет вид

$$|\lambda_{0n} - \lambda_{0j} - il| \geq 4,56B, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n \neq j \quad (3.4)$$

Здесь B — введенная в разд. 2 норма матрицы $B(t)$.

Заметим, что в (3.3) приходится обращать матрицу $E + X^{(k)}$, которая зависит от времени и задана в виде ряда Фурье (при практической реализации ряд содержит конечное число членов). Вычисление обратной матрицы следует проводить либо в виде ряда

$$(E + X^{(k)})^{-1} = E - X^{(k)} + X^{(k)2} - X^{(k)3} + \dots$$

сходящегося при $\|X^{(k)}\| < 1$ со скоростью геометрической прогрессии, либо в виде произведения

$$(E + X^{(k)})^{-1} = (E - X^{(k)}) (E + X^{(k)2}) (E + X^{(k)4}) \dots$$

сходящегося при том же условии с квадратичной скоростью.

4. Наличие близких мультипликаторов. Случай вырождения матрицы преобразования $E + X$ в процессе итераций. Модифицируем алгоритм (3.3) таким образом, чтобы учесть наличие близких порождающих собственных значений. В этом случае в процессе итераций может вырождаться матрица $E + X^{(k)}$. Задачу приведения к диагональному виду следует заменить в этом случае приведением к блочно-диагональной постоянной матрице в канонической форме, при которой диагональные блоки имеют либо квазижорданову, либо треугольную форму. Порождающая матрица Λ_0 также предварительно приводится к канонической форме.

Модифицированный алгоритм имеет вид

$$X^{(k)} + X^{(k)} \Lambda^{(k-1)} - \Lambda^{(k-1)} X^{(k)} = B^{(k-1)} - \Delta \Lambda_1^{(k)} \quad (4.1)$$

$$B_1^{(k)} = (E + X^{(k)})^{-1} (B^{(k-1)} X^{(k)} - X^{(k)} \Delta \Lambda_1^{(k)})$$

$$\Lambda_1^{(k)} = \Lambda^{(k-1)} + \Delta \Lambda_1^{(k)}, \quad B^{(k)} = R^{(k-1)} B_1^{(k)} R^{(k)}$$

$$\Lambda^{(k)} = R^{(k-1)} (\Lambda_1^{(k)} R^{(k)} - R^{(k)})^{-1}; \quad k = 1, 2, \dots, \quad \Lambda^{(0)} = \Lambda_0, \quad B^{(0)} = B(t)$$

Матрица $\Delta \Lambda_1^{(k)}$ выбирается не только из условий существования ограниченного решения первого уравнения, но и с целью ликвидации малых знаменателей в решении. Как показано ниже, она может быть выбрана блочно-диагональной постоянной. На следующем шаге итерации $\Lambda^{(k-1)} + \Delta \Lambda_1^{(k)}$ приводится к необходимому каноническому виду.

Поясним алгоритм (4.1) на примере. Предположим, что условие сходимости (3.4) нарушается для трех порождающих собственных значений $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}$, т. е. существуют целые числа p и q , такие, что справедливы неравенства

$$|\lambda_{20} - \lambda_{10} + ip| < 4,56 B, \quad |\lambda_{30} - \lambda_{20} + iq| < 4,56 B, \\ |\lambda_{30} - \lambda_{10} + i(p+q)| < 4,56 B$$

причем в остальных случаях (3.4) выполняется.

Для того чтобы избежать возникновения малых знаменателей, в матрицу $\Delta \Lambda_1^{(k)}$ следует включить блок вида

$$\begin{vmatrix} b_{011}^{(k-1)} & b_{p12}^{(k-1)} e^{ipt} & b_{p+q13}^{(k-1)} e^{i(p+q)t} \\ b_{-p21}^{(k-1)} e^{-ipt} & b_{022}^{(k-1)} & b_{q23}^{(k-1)} e^{iqt} \\ b_{-p-q31}^{(k-1)} e^{-i(p+q)t} & b_{-q32}^{(k-1)} e^{-iqt} & b_{033}^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

Далее определяется матрица $R^{(k)}$, осуществляющая преобразование $\Lambda_1^{(k)}$ к кинематически подобной постоянной блочно-диагональной матрице $\Lambda^{(k)}$ указанного выше вида. Преобразование осуществляется в два этапа, т. е. $R^{(k)}$ записывается как произведение двух матриц: $R^{(k)} = R_1^{(k)} R_2^{(k)}$. На первом этапе при помощи матрицы

$$R_1^{(k)} = \text{diag} \{1, e^{-ipt}, e^{-i(p+q)t}, 1, \dots, 1\} \quad (4.2)$$

выполняется преобразование подобия $\Lambda_1^{(k)}$ к постоянной матрице $\Lambda_2^{(k)}$, содержащей на диагонали блок

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{(k-1)} + b_{011}^{(k-1)} & b_{p12}^{(k-1)} & b_{p+q13}^{(k-1)} \\ b_{-p21}^{(k-1)} & \lambda_2^{(k-1)} + ip + b_{022}^{(k-1)} & b_{q23}^{(k-1)} \\ b_{-p-q31}^{(k-1)} & b_{-q32}^{(k-1)} & \lambda_3^{(k-1)} + i(p+q) + b_{033}^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

а $R_2^{(k)}$ выполняет преобразование $\Lambda_2^{(k)}$ к виду $\Lambda^{(k)}$, т. е. фактически задача свелась к рассмотрению постоянной (3×3) -матрицы.

В общем случае применение такого метода возможно, если справедливо ограничение, которое можно назвать условием отделимости ХП $\lambda_{0j} + il$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), соответствующих порождающим собственным значениям.

Рассмотрим группы близких (в смысле нарушения условия сходимости) ХП. Группа строится таким образом, что для каждого элемента, ей принадлежащего, существует по меньшей мере один элемент, близкий к данному, и для любых двух ХП, принадлежащих разным группам, условие (3.4) выполнено. Будем считать, что условие отделимости выполнено, если построенные таким образом группы близких ХП накрываются на комплексной плоскости непересекающимися открытыми односвязными ограниченными множествами. В этом случае одной группе не могут принадлежать два ХП, соответствующих одному порождающему собственному значению и имеющих разные мнимые части. Условие отделимости накладывает на норму B возмущающей матрицы $B(t)$ сравнительно слабое ограничение сверху, которое во всех случаях слабее неравенства $4,56B < 1/m$, где m — размер матрицы задачи.

Пусть условие отделимости выполнено. При проведении итераций (4.1) в этом случае сливаться могут лишь ХП, принадлежащие одной группе, проблема малых знаменателей также локализуется в пределах групп. Разобьем группы близких ХП на непересекающиеся классы, в каждом из которых все группы можно получить из одной сдвигом вдоль комплексной оси на целое число единиц. Построенные классы характеризуются непересекающимися друг с другом множествами порождающих собственных значений. При этом в пределах каждого множества близкими являются, вообще говоря, не собственные значения, а соответствующие им мультипликаторы $\exp(2\pi\lambda_{0j})$. Среди всех групп, образующих класс, выделим одну, которую назовем основной. Например, это может быть группа, наибольшее количество элементов которой совпадает с собственными значениями λ_{0j} .

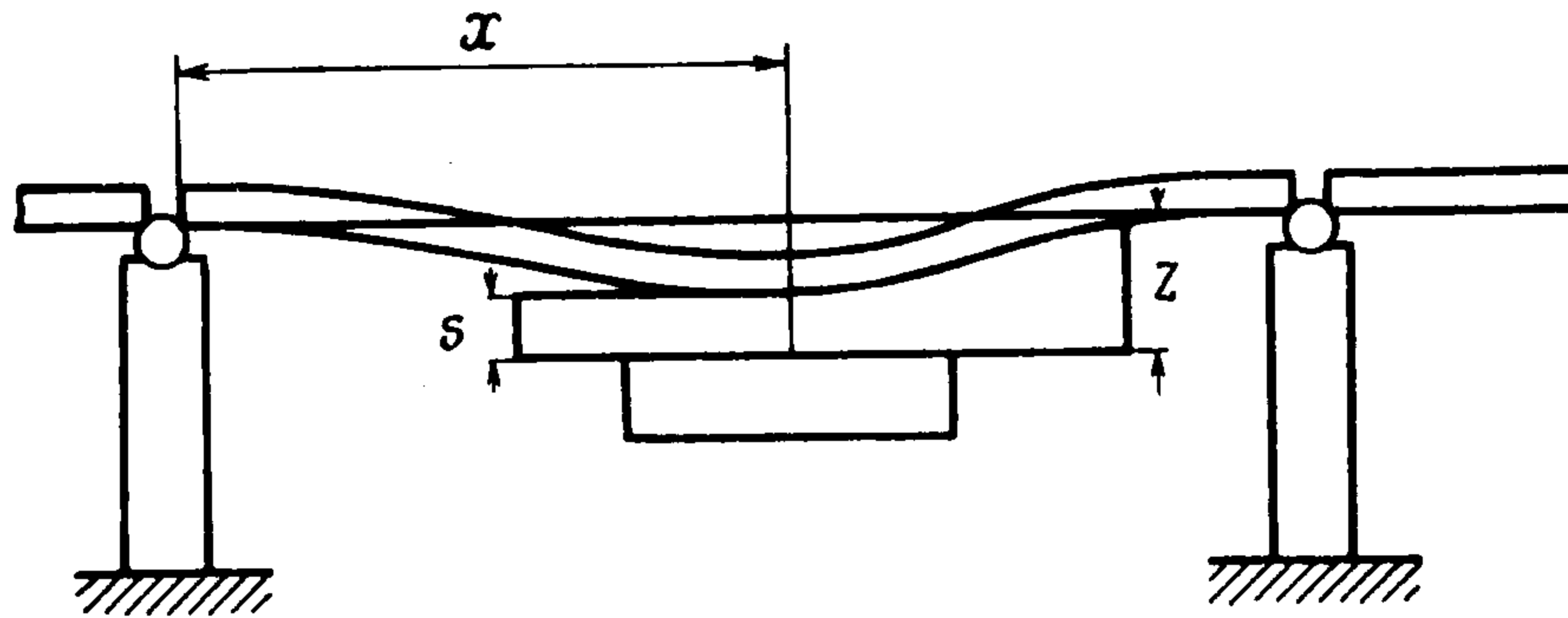
Для каждого класса образуем блок в матрице Λ_0 , на диагонали которого располагаются порождающие собственные значения из соответствующего данному классу множества. При наличии близких собственных значений блоки должны иметь, вообще говоря, не диагональную, а треугольную форму. Далее удобно выполнить преобразование кинематического подобия матрицы $\Lambda_0 + B(t)$, чтобы заменить в блоках порождающие собственные значения на ХП из основных групп. При этом матрица преобразования диагональна и имеет вид, аналогичный (4.2). Тем самым заканчиваются предварительные анализ и преобразования, и можно приступить к итерациям (4.1).

Поясним, каким образом следует формировать блочно-диагональную матрицу $\Delta\Lambda_1^{(k)}$. Изолированному ХП $\lambda_i^{(k-1)}$, не входящему ни в одну группу, соответствует единственный диагональный элемент $\Delta\Lambda_1^{(k)}$, равный диагональному элементу матрицы $B_0^{(k-1)}$, являющейся нулевым членом разложения $B^{(k-1)}(t)$ в ряд Фурье. Для каждой основной группы ХП в $\Delta\Lambda_1^{(k)}$ образуется диагональный блок, равный соответствующему диагональному блоку $B_0^{(k-1)}$. Тем самым матрица является постоянной, и указанное в (4.1) преобразование кинематического подобия может быть заменено на $R^{(k)-1}\Lambda_1^{(k)}R^{(k)}$ с постоянной матрицей преобразования $R^{(k)}$. При этом матрица $\Lambda_1^{(k)}$ будет блочно-диагональной, и к канонической форме необходимо приводить отдельные

ее блоки, имеющие во многих практически важных случаях небольшой размер. Использовать для этой цели можно, например QR, — алгоритм со сдвигами, либо, при малом размере блоков, теорию возмущений.

В случае, когда матрица параметрического возбуждения $B(t)$ не мала и не выполнено условие отделимости, рассматривается матрица $\Lambda_0 + \gamma B(t)$, зависящая от параметра $\gamma \in [0, 1]$. Применяя итерации (4.1) к этой матрице с пошаговым увеличением значения γ , при $\gamma = 1$ получим окончательный результат. Шаг параметра выбирается достаточно малым, чтобы удовлетворялось условие отделимости.

5. Пример. Рассмотрим электромагнит, движущийся вдоль путевой структуры, образованной динамически не связанными упругими однородными балками массы m_1 и длины l каждая (фиг. 1), с постоянной скоростью v_0 . Данная задача соответствует простейшей модели экипажа на магнитной подвеске [1, 2, 6]¹.



Фиг. 1

Устойчивость подвески обеспечивается регулированием зазора s между полюсными наконечниками магнита и балкой. Регулирование осуществляется по показаниям датчика зазора $s - s_0$ и акселерометра z'' (s_0 — номинальное значение зазора). Зазор и вертикальная координата z связаны соотношением $s = z + w(x, t) + \xi(x)$, где w — прогиб балки, $\xi(x)$ — функция неровностей путевой структуры.

Пренебрегая вихревыми токами и насыщением, получим на основании уравнений Лагранжа — Максвелла уравнения электромагнита

$$mz'' = \frac{1}{2} (dL/ds)j^2 + Mg, \quad Lj' + (dL/ds)js' = -rj + u$$

$$u = U_0 + a_0(s - s_0) + a_1s' + a_2z'', \quad L = L_p s_0/s + L_s$$

Здесь j , u , r , L — ток, напряжение на выводах, омическое сопротивление и индуктивность обмотки электромагнита, M — масса экипажа, a_0 , a_1 , a_2 — параметры регулятора. Уравнения рассматриваемой модели замыкаются уравнением изгибных колебаний балки. Полагая, что длина балки велика по сравнению с характерным размером поперечного сечения, ограничимся уравнением технической теории изгибных колебаний стержней.

Линеаризуем уравнения относительно стационарных значений переменных z_0 , s_0 , J_0 , U_0 , $w_0(x)$ и перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Кроме того, разложим безразмерную вариацию прогиба $\Delta w = (w - w_0)/s_0$ по ортонормированным собственным формам $\varphi_k(x')$ изгибных колебаний балки (без учета взаимодействия с магнитом)

$$\Delta w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \varphi_k(x'), \quad x' = \frac{x}{l}$$

¹ См. также Погорелов Д. Ю. Спектральный анализ слабо возмущенных линейных динамических систем. Брянск, 1988. 111 с. — Деп. в ВИНТИ 03.10.88, № 7261—1388.

При этом уравнение изгибных колебаний балки можно заменить бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [7]. В результате получим следующую систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \Delta z'' &= c\Delta s - \Delta j & (5.1) \\ \Delta j' - (1-d)\Delta s' + \Delta j/T_1 &= c_0\Delta s + c_1\Delta s' + c_2\Delta z'' \\ w_k'' + \omega_k^2 w_k &= -\mu\varphi_k(x'(\tau))\Delta z'', \quad k = 1, 2, \dots \\ \Delta z &= \Delta s + \xi(x'(\tau)) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\tau)\varphi_k(x'(\tau)), \quad x'(\tau) = \frac{v_0 T_0 \tau}{l} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{z - z_0 - w_0(x'(\tau))}{s_0}, \quad \Delta s = \frac{s - s_0}{s_0}, \quad \Delta j = \frac{j - J_0}{J_0}, \quad T_0^2 = \frac{ms_0}{2Mg} \\ T_1 &= \frac{L_s + L_p}{rT_0}, \quad d = \frac{L_s}{L_p}, \quad \mu = \frac{m}{m_1}, \quad c_0 = \frac{a_0 s_0}{U_0 T_1}, \quad c_1 = \frac{a_1 s_0}{U_0 T_1 T_0}, \\ c_2 &= \frac{a_2 s_0}{U_0 T_1 T_0^2} \end{aligned}$$

Введено безразмерное время $\tau = t/T_0$. В (5.1) и далее точкой обозначено дифференцирование по τ , ω_k — собственные частоты колебаний балки, соответствующие формам $\varphi_k(x')$.

В моменты времени $\tau = nT/(v_0 T_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) переменные w_k претерпевают разрыв из-за наезда на неподвижную балку путевой структуры:

$$w_k(nT + 0) = 0, \quad T = l/(v_0 T_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Неровности путевой структуры моделируются случайной функцией, получаемой методом формирующего фильтра

$$T\xi' + \alpha\xi = \kappa V(\tau). \quad (5.3)$$

Здесь α и κ — параметры фильтра, $V(\tau)$ — белый шум единичной интенсивности.

Если ограничиться конечным числом форм колебаний балки, то уравнениям (5.1)–(5.3) можно придать вид

$$\dot{x} = A(\tau)x + bV(\tau), \quad A(\tau + T) = A(\tau) \quad (5.4)$$

$$x(nT + 0) = Gx(nT - 0), \quad G = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A(\tau) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}(\tau) \\ A_{21}(\tau) & A_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} A_{12}(\tau) &= ea_{12}^T(\tau) \\ A_{21}(\tau) &= a_{21}(\tau)e^T, \quad e = (0, 0, 1, 0)^T \end{aligned}$$

$$x = (z, z', z'', \xi, w_1, w_1', w_2, w_2', \dots)^T$$

$$b = (0, 0, b_1\kappa/T, \kappa/T, 0, \dots, 0)^T$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & b_1\alpha/T + b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha/T \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} A_{22} &= \text{diag}\{C_j\} \\ C_j &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_j^2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{12}(\tau) = (b_0\varphi_1(x'(\tau)), b_1\varphi_1(x'(\tau)), b_0\varphi_2(x'(\tau)), b_1\varphi_2(x'(\tau)), \dots)^T$$

$$a_{21}(\tau) = -\mu(0, \varphi_1(x'(\tau)), 0, \varphi_2(x'(\tau)), \dots)^T$$

$$b_0 = c_0 - c/T_1, \quad b_1 = c_1 + 1 - c - d, \quad b_2 = c_2 + 1/T_1$$

В качестве невозмущенной рассмотрим блочно-диагональную матрицу $A_0 = \text{diag}\{A_{11}, A_{22}\}$. Порождающие собственные значения и собственные векторы определяются матрицами A_{11} и A_{22} .

Проведем ковариационный анализ задачи (5.4). Выполним преобразование $x = R(\tau)y$, приводящее уравнения (5.4) к виду

$$\begin{aligned} y' &= \Lambda y + c(\tau)V, \quad y(nT + 0) = Hy(nT - 0) \\ c(\tau) &= R^{-1}(\tau)b, \quad H = R^{-1}(0)GR(0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) имеет матрицант $u(\tau) = \exp(\Lambda\tau)$ и его общее решение, учитывающее разрывность переменных w_k , таково [6]:

$$\begin{aligned} y(nT + \tau) &= u(\tau)K^n y_0 + u(\tau) \left\{ \sum_{m=1}^n K^m \int_0^T u(-t)c(t)V(t + (n-m)T) dt \right\} + \\ &+ \int_0^\tau u(\tau-t)c(t)V(t + nT) dt, \quad K = Hu(T), \tau \in [0, T) \end{aligned}$$

Вычислим теперь ковариационную матрицу $P(\tau)$

$$\begin{aligned} P(nT + \tau) &= u(\tau) \left\{ K^n P_0 K^{*n} + \sum_{m=1}^n K^m D(T) K^{*m} + D(\tau) \right\} u^*(\tau) \\ D(\tau) &= \int_0^\tau u(-t)c(t)c^*(t)u^*(-t) dt \end{aligned}$$

(Звездочка означает сопряжение матриц.) Установившееся значение получим, переходя к пределу $n \rightarrow \infty$:

$$P_s(nT + \tau) = u(\tau) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} K^m D(T) K^{*m} + D(\tau) \right\} u^*(\tau) \quad (5.6)$$

Ограничимся случаем, когда матрицант $u(\tau)$ диагонален, тогда интеграл $D(\tau)$ вычисляется аналитически.

Рассмотрим матрицу $Q = \sum K^m D(T) K^{*m}$, элементы которой, вообще говоря, комплексные. Перейдем к вещественным матрицам при помощи преобразования

$$\begin{aligned} Q' &= R(0)QR^*(0) = \sum K'^m D'(T) K'^{*m} \\ K' &= R(0)KR^{-1}(0) = Gu'(T) = \begin{vmatrix} u_{11}' & u_{12}' \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ D'(T) &= R(0)D(T)R^*(0) \end{aligned}$$

Здесь $u'(\tau)$ — матрицант исходной системы (5.4). Вычисление Q' основано на приведении K' к диагональному виду $\Lambda' = S^{-1}K'S$, причем по диагонали Λ' расположены мультипликаторы задачи (5.4), часть из которых нулевые, а остальные предполагаются различными. Матрица Q' приобретает вид

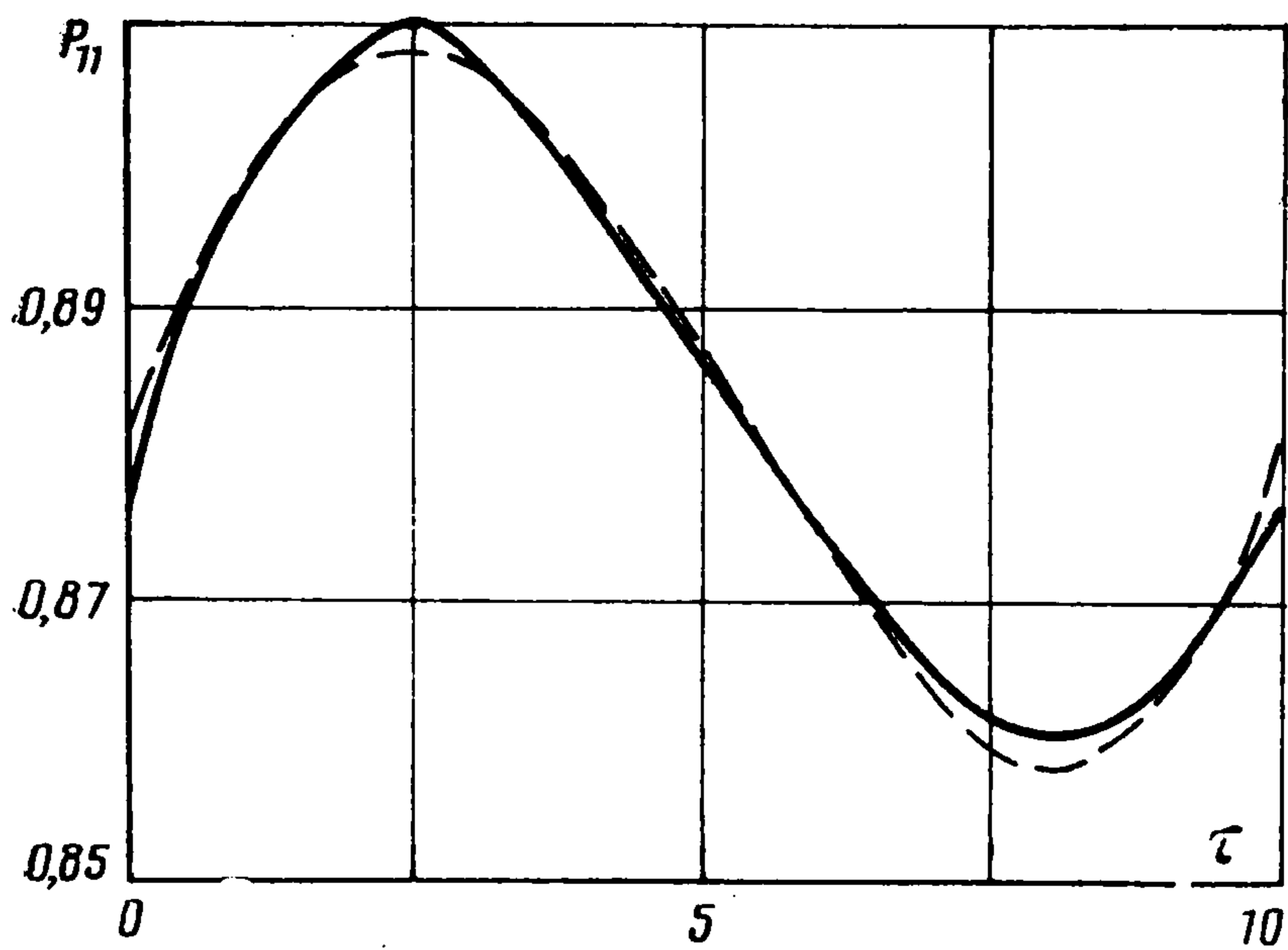
$$Q' = S \{ \sum \Lambda'^m S^{-1} D'(T) S^{*-1} \Lambda'^{*m} \} S^*$$

и сумма, стоящая в фигурных скобках, легко вычисляется. Определяя по Q' значение Q , из (5.6) получим $P_s(\tau)$.

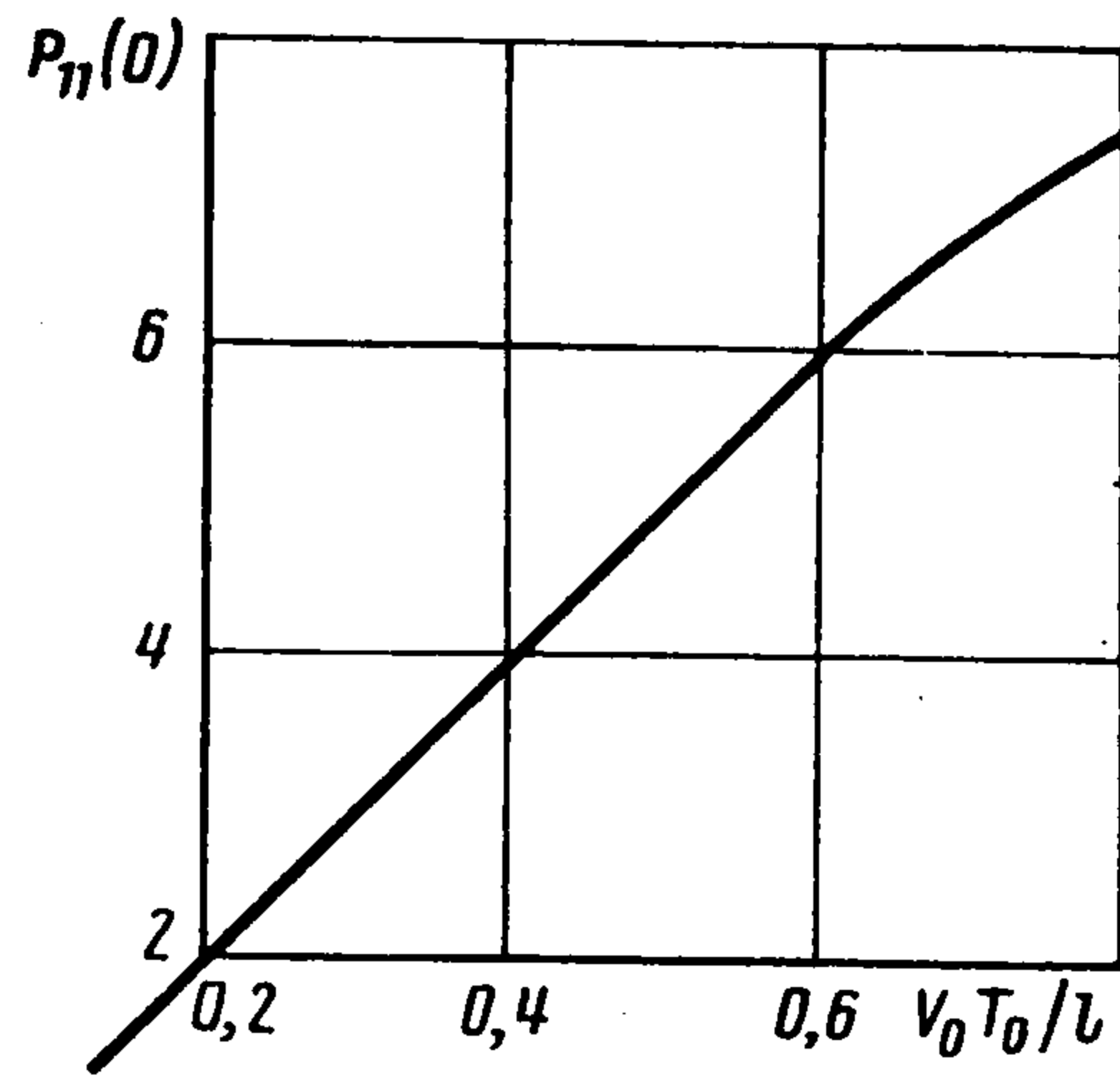
Установившееся значение $P_s'(\tau) = \langle xx^T \rangle$ ковариационной матрицы исходной задачи связано с $P(\tau)$ соотношением

$$P_s'(\tau) = R(\tau)P_s(\tau)R^*(\tau)$$

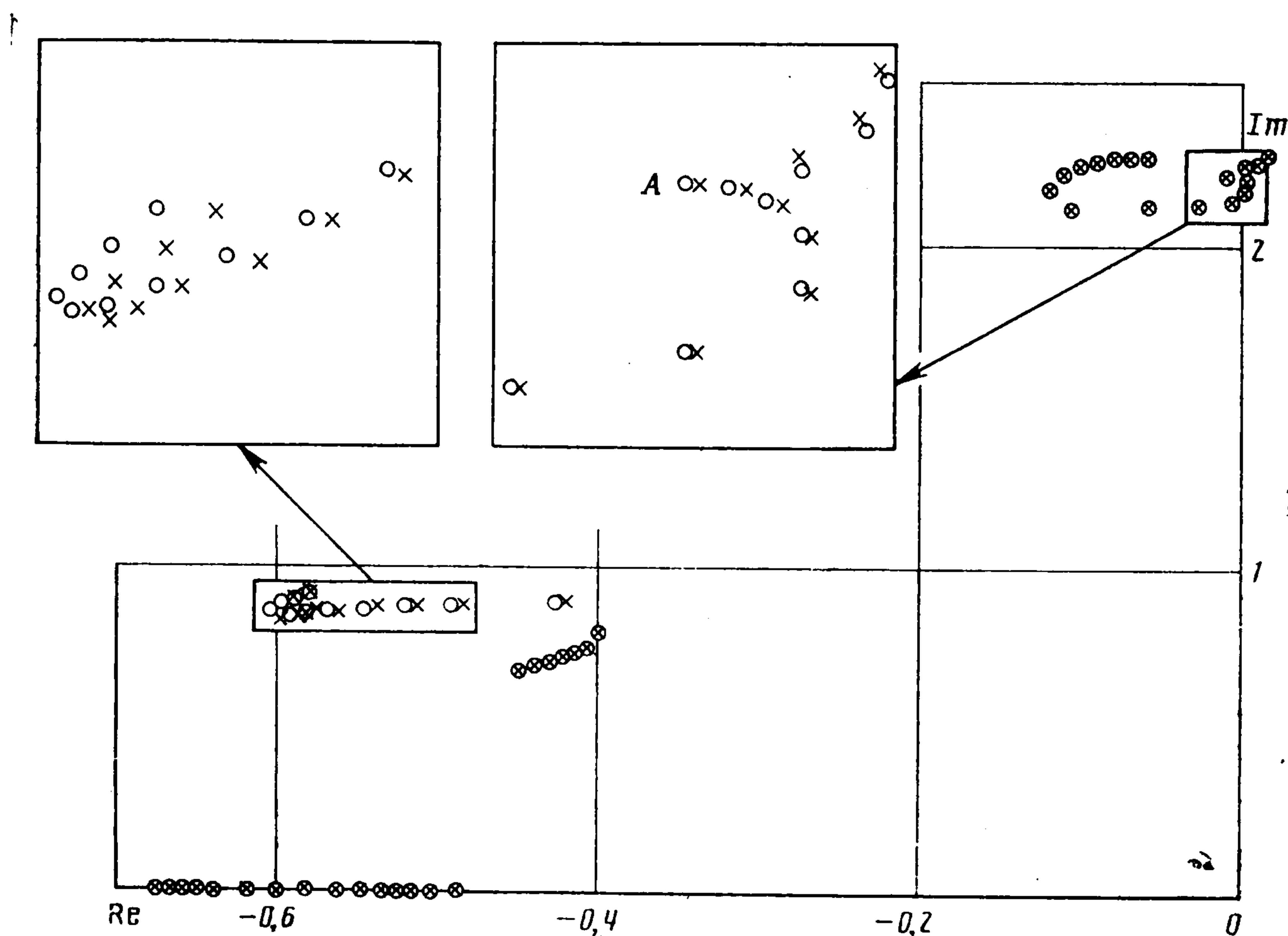
Результаты численных расчетов приведены на фиг. 2—5. При расчетах использованы следующие значения параметров, которые (а также все встречающиеся ниже на фигурах и в тексте) даны в безразмерном виде: $d = 0,5$; $c = 0,7$; $\alpha = 2$; $\kappa = 1$; $\omega_1 = 2,2$; $c_0 = 0,7$; $c_1 = 2$; $c_2 = 1,5$; $\mu = 1$; $T_1 = 7$. Путевая структура моделировалась балками,



Фиг. 2



Фиг. 3

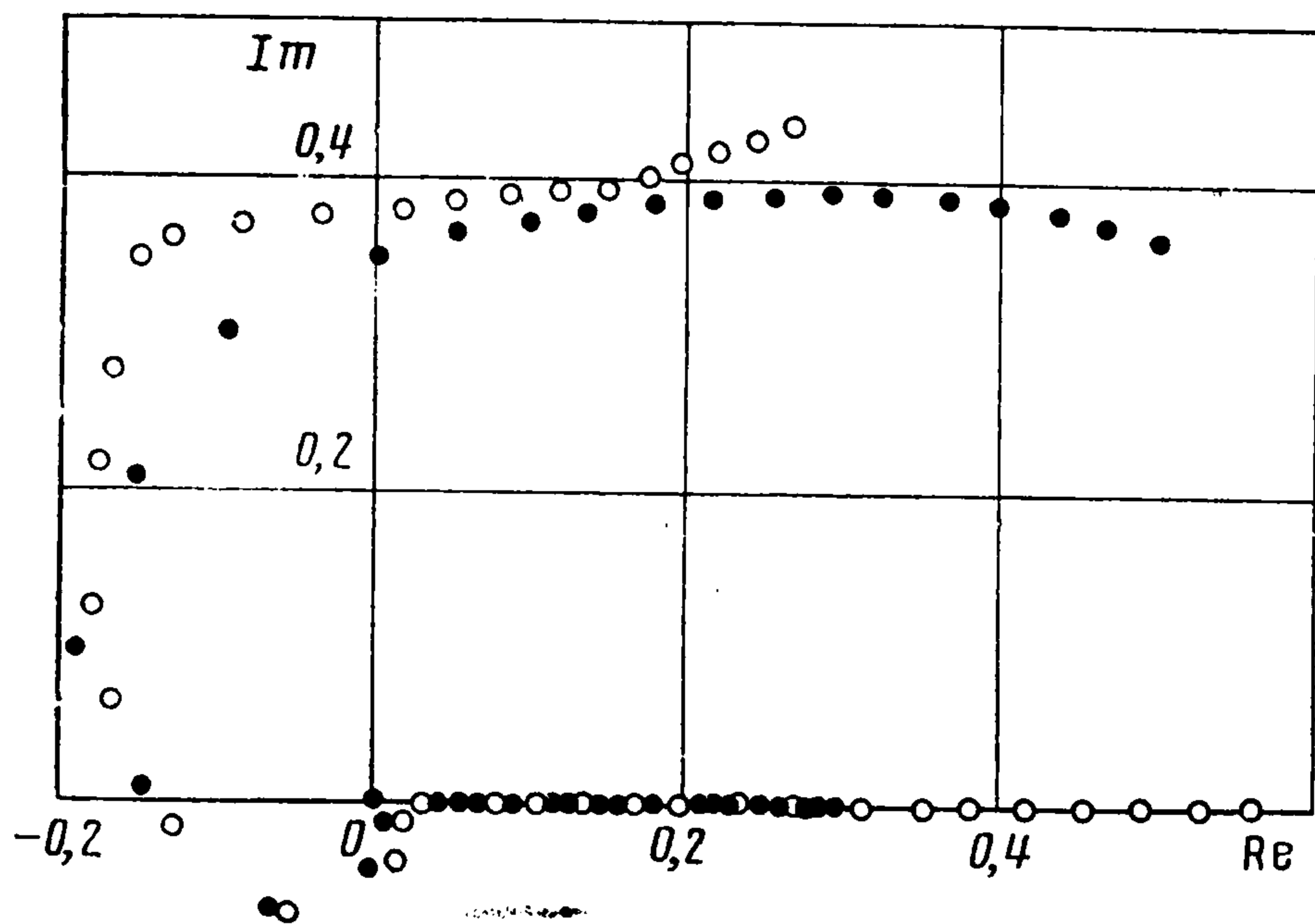


Фиг. 4

шарнирно опертыми по концам. Ряды Фурье матриц ограничивались девятнадцатью старшими членами.

На фиг. 2 представлена зависимость от времени установившегося значения дисперсии $P_{11}(\tau)$ вертикальной координаты Δz при безразмерном значении периода $T = 10$. Дисперсия изменяется с течением времени незначительно. Зависимость $P_{11}(0)$ от скорости v_0 изображена на фиг. 3. Область изменения скорости принималась следующей: $v_0 T_0 / l \in \in [0, 1; 0, 8]$. При меньших значениях скоростей влияние продольного движения становится слабым, поэтому достаточную точность имеет анализ динамики экипажа, неподвижного в продольном направлении.

Зависимость от скорости ХП системы (5.4) приведена на фиг. 4. Из полного ряда показателей $\lambda_j + 2\pi i k / T$ приведен лишь один с максимальной нормой $\|r_{jk}\|$ соответствующего вектора. При больших скоростях ХП могут иметь положительные вещественные части, что, однако, не влечет за собой неустойчивости системы. Здесь сказывается периодический наезд экипажа на неподвижные элементы путевой структуры и мульт-



Фиг. 5

типликаторы системы, зависимость которых от скорости изображена на фиг. 5 (они отмечены темными точками), удовлетворяют условиям устойчивости; светлыми точками отмечены приведенные для сравнения значения $\exp(\lambda_j T)$ где λ_j — ХП.

Заметим, что кривые зависимости ХП от скорости (фиг. 4) не являются гладкими. Точке А соответствует слияние ХП при котором происходит вырождение матрицы $E + X^{(k)}$ при итерациях (3.3), и необходимо пользоваться обобщенным алгоритмом (4.1). Проведено исследование влияния количества учтенных в (5.4) форм колебаний балки на точность результатов. На фиг. 2 сплошная линия соответствует учету двух форм, штриховая — одной. Аналогично на фиг. 4 крестик соответствует двум, светлая точка — одной собственной форме. Таким образом, учет всего лишь одной формы колебаний балки приводит к достоверным как с качественной, так и количественной точке зрения оценкам вычисленных характеристик. По этой причине, в частности, при сформулированном выше предположении о малости толщины балки использование уточненной теории Тимошенко изгибных колебаний стержней не приводит к существенным изменениям результатов.

Отметим, что алгоритм, приведенный в разд. 3 и 4, имеет по сравнению с другими численными методами [8] ряд преимуществ, например, в скорости сходимости. По сравнению с методом матриц монодромии не требуется численного интегрирования системы уравнений, кроме того, дополнительно решается проблема приводимости. Метод определителей Хилла рассматривает вспомогательные матрицы большой размерности, что влечет за собой, в частности, увеличение времени счета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meisinger R. Beiträge zur Regelung einer Magnetschwebbahn auf elastischem Fahrweg: Dissertation TU, München, 1977. 135 S.
2. Popp K., Kraus A., Heiss T. Dynamical analysis of a simple vehicle on a periodic guideway // Vehicle System Dynamics. 1982. V. 11. No. 2. P. 107—120.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
4. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
5. Морозов В. М., Каленова В. И. Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд-во МГУ, 1988. 143 с.
6. Popp K. Mathematical modeling and control system design of MAGLEV vehicles // Dynamics of high-speed vehicles. Wien: New York: Springer, 1982. P. 333—363.
7. Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 564 с.
8. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Т. 1. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.

Брянск

Поступила в редакцию
22.1.1990