Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

Л. К. Кузьмина

К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматривается сингулярно возмущенная задача об устойчивости [1] решений системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами, входящими в разных степенях при производных. Изучается влияние малых параметров на динамику системы, определяются условия сведения задачи об устойчивости для исходной системы к исследованию укороченной системы в особенных случаях. При этом общий подход, основанный на разделении движений, в сочетании с методами теории устойчивости позволяет подойти к решению проблемы правомерности идеализаций [2] в задачах механики (с построением строгим математическим путем [3] упрощенных моделей в качестве систем сравнения в решении сингулярно возмущенных задач), получить оценки допустимых значений параметров. Применяемый регулярный метод дает возможность обойти ряд затруднений, встречающихся в прикладных задачах механики, с обобщением известных и получением новых результатов. В данной работе все рассмотрение ведется применительно к задачам динамики электромеханических систем, относящихся к особенным критическим случаям.

1. Исходя из приложений к вопросам динамики электромеханических систем (ЭМС), поясним постановку задачи на примере ЭМС, моделирующей систему гиростабилизации [4], в критическом [1] случае. Известно [5, 6], что при соответствующих предположениях состояние такой ЭМС, характеризуемое совокупностью n лагранжевых и u максвелловых обобщенных координат, может быть описано уравнениями в общей динамической форме Лагранжа — Максвелла (или А. В. Гапонова) [7]. Для рассматриваемых здесь систем дифференциальные уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде [8] (сохраняем обозначения [8], но без предположения о быстрых гироскопах)

$$\frac{d}{dt}a\mathbf{q}_M{}^{\boldsymbol\cdot} + (b+g)\,\mathbf{q}_M{}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{Q}_M{}' + \mathbf{Q}_{ME} + \mathbf{Q}_M{}''$$

$$\frac{d}{dt}L\mathbf{q}_E{}^{\boldsymbol\cdot} + R\mathbf{q}_E{}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{Q}_E{}' + \mathbf{Q}_{EM} + \mathbf{Q}_E{}'', \qquad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M{}^{\boldsymbol\cdot} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{q}_M = \|\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\|^T, \quad \mathbf{Q}_M{}' = -e\mathbf{q}_M, \quad \mathbf{Q}_{ME} = A_M\mathbf{q}_E{}^{\boldsymbol\cdot}, \quad A_M = \|0, A\|^T$$

$$\mathbf{Q}_{EM} = B_E\mathbf{q}_M{}^{\boldsymbol\cdot}, \; B_E = \|0, \; B\|, \; \mathbf{Q}_E{}' = -(\omega\mathbf{q}_1 + \Omega\mathbf{q}_E{}^{\boldsymbol\cdot})$$

Здесь $\mathbf{q}_M$ — n-мерный вектор механических обобщенных (лагранжевых) координат, $\mathbf{q}_1$ — l-мерный вектор управляющих механических координат, $\mathbf{q}_E$ — u-мерный вектор электрических обобщенных (максвелловых) координат, $a = a(\mathbf{q}_M)$ и $b = b(\mathbf{q}_M)$ — симметричные $(n \times n)$-матрицы определенно-положительной квадратичной формы кинетической энергии механической части системы и постоянно-положительной квадратичной формы в разложении диссипативной функции сил вязкого трения соответственно; $g = g(\mathbf{q}_M)$ — кососимметрическая матрица гироскопических коэффициентов; $L = \|L_{rs}\|$ и $R = R(\mathbf{q}_E{}^{\boldsymbol\cdot})$ — симметричные $(u \times u)$-матрицы определенно-положительных квадратичных форм электромагнитной энергии системы и диссипативной функции токов соответственно; L_{rs} — коэффициенты само и взаимоиндукции обмоток в электрических цепях; $e = e(\mathbf{q}_M)$ — $(n \times n)$-матрица потенциальных и непотенциальных сил, зависящих от обобщенных координат, $\mathbf{Q}_{ME}$ и $\mathbf{Q}_{EM}$ — механические обобщенные силы электромагнитного происхождения (пондеромоторные силы) и электрические обобщенные силы механического происхождения (противо-э. д. с.); $A = \| A_{kj}(L_{rs}) \|$ — $(l \times u)$ — матрица; $B = \| B_{kj}(L_{rs}) \|$ — — $(u \times l)$-матрица; $\mathbf{Q}_E'$ — вектор электрических обобщенных сил, отвечающих электрическим обобщенным координатам; $\mathbf{Q}_M''$, $\mathbf{Q}_E''$ — совокупности нелинейных членов, зависящие от $\mathbf{q}_M$, $\mathbf{q}_M^{\bullet}$, $\mathbf{q}_E^{\bullet}$.

Система (1.1) имеет порядок $(2n + u)$. В приложениях для таких систем при исследовании динамических свойств (в том числе устойчивости) зачастую принимают упрощенную модель. В частности, считая электрические цепи следящих систем малоинерционными и полагая соответствующие члены в дифференциальных уравнениях малыми, пренебрегают ими и переходят к укороченной (идеализированной) модели с безынерционными электрическими цепями [4, 9] вида

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} a\mathbf{q}_M^{\bullet} + (b + g)\,\mathbf{q}_M^{\bullet} = \mathbf{Q}_M' + \mathbf{Q}_{ME} + \mathbf{Q}_M'' \\ R\mathbf{q}_E^{\bullet} = \mathbf{Q}_E' + \overline{\mathbf{Q}}_E'', \qquad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M^{\bullet}\end{gathered} \tag{1.2}$$

Порядок этой системы $2n$ ниже, чем у исходной системы (1.1), поэтому необходимо строгое обоснование законности перехода к укороченной модели на бесконечном интервале времени (особенно в задачах устойчивости). Заметим, что решению аналогичных задач различными методами посвящено много работ, в том числе для ЭМС различных типов (например, [10, 11]), причем построение модели (1.2) в качестве системы сравнения для (1.1) строгим путем в литературе отсутствует; также нет условий приемлемости системы такого типа.

Подробный анализ показывает, что для рассматриваемых систем имеют место особенности такого же рода, как и для гироскопических систем [8, 12]. Это затрудняет непосредственное применение результатов теории сингулярных возмущений. Рассматриваемые ЭМС относятся к такому классу сингулярно возмущенных систем [13], дифференциальные уравнения которых могут быть представлены в виде уравнений с малыми параметрами в разных степенях при производных; движения в системе (1.1) при указанных выше предположениях разделяются на разномасштабные (по времени) составляющие трех типов; укороченная система (1.2) не является предельной моделью для (1.1). При этом для решения поставленных задач весьма эффективно можно использовать [2, 14] методы теории устойчивости Ляпунова.

2. С учетом вышеизложенного будем рассматривать задачу об устойчивости как сингулярно возмущенную задачу для систем указанного типа. Пусть дифференциальные уравнения приведены к виду

$$\mu^{\alpha_i} d\varkappa_i/dt = \mathbf{K}(t, \mu, \varkappa) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 0 \tag{2.1}$$

где μ — малый положительный параметр.

Предполагая в общем случае рассмотрение систем, допускающих многообразие стационарных положений, обозначим далее

$$\begin{gathered}\varkappa_i = \mathbf{x}_i, \quad \varkappa_3 = \|\mathbf{x}_3, \mathbf{z}\|^T, \quad \mathbf{K}_i = P_i(\mu)\,\mathbf{x} + \mathbf{X}_i(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) \\ \mathbf{K}_3 = \|P_3(\mu)\,\mathbf{x} + \mathbf{X}_3(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{Z}(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x})\|^T, \quad \mathbf{x} = \|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\|^T\end{gathered}$$

где $\mathbf{x}_i$ — n_i-мерные векторы основных переменных $(n = n_1 + n_2 + n_3)$; $\mathbf{z}$ — m-мерный вектор критических [1] переменных. Предполагаем голоморфность всех функций в (2.1) по совокупности всех переменных $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$ (в некоторой рассматриваемой области); $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{Z}$ — нелинейные векторные функции от t, μ, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$, разложение которых не содержит членов ниже второй степени с коэффициентами, зависящими от t, μ, обращающиеся в нуль при $\mathbf{x} = 0$ и любых t, μ, $\mathbf{z}$, причем $\mathbf{K}_3$ $(t, \mu = 0, \mathbf{z}, \mathbf{x})$ не содержит членов с быстрыми переменными $\mathbf{x}_2$.

Система (2.1) имеет порядок $(n + m)$. Поставим следующие задачи: найти условия, при которых справедливо сведение решения задачи об устойчивости для системы (2.1) к исследованию устойчивости для укороченной модели; установить, имеет ли место близость решений полной и укороченной систем на бесконечном интервале времени; найти способ построения приемлемой укороченной модели, для которой справедливо сведение в динамике. Для решения этих задач распространим метод, применяемый в [8, 15] в особенных случаях систем типа (2.1). При этом, следуя [2], построим упрощенные модели разных уровней, вводя в соответствии с используемой методикой различные приближенные системы.

Примем для (2.1) в качестве приближенной систему, линеаризованную по μ (в соответствии с принятым в теории устойчивости):

$$\mu \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = P_1{}^*\mathbf{x} + \mathbf{X}_1{}^*, \quad 0 = P_2{}^*\mathbf{x} + \mathbf{X}_2{}^*$$
$$\frac{d\mathbf{x}_3}{dt} = P_3{}^*\mathbf{x} + \mathbf{X}_3{}^*, \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}^* \tag{2.2}$$

Это система порядка $(n + m - n_2)$, где звездочкой обозначены удержанные члены, содержащие μ в степени, не выше первой.

Теперь примем для (2.1) в качестве приближенной систему нулевого порядка по μ:

$$0 = P_i\mathbf{x} + \mathbf{X}_i \, (i = 1, 2), \quad \frac{d\mathbf{x}_3}{dt} = P_3\mathbf{x} + \mathbf{X}_3, \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}$$
$$P_i = P_i\,(\mu = 0), \; \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i\;(t, \mu = 0, \mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\,(t, \mu = 0, \mathbf{z}, \mathbf{x})$$

Это вырожденная система порядка $(n_3 + m)$, традиционно используемая в теории возмущений.

3. Будем решать сингулярно возмущенную задачу об устойчивости (2.1), (2.2). Здесь имеет место критический случай [1]: характеристическое уравнение системы первого приближения для (2.1) имеет m нулевых корней. Остальные корни определяются из уравнения вида

$$D\,(\lambda, \mu) = |\,M\,(\mu)\lambda - P\,(\mu)| = 0 \tag{3.1}$$

причем $D\,(\lambda, \mu) = f_1\,(\lambda, \mu) + \mu^2 f_2\,(\mu, \mu) = 0$, где $f_1\,(\lambda, \mu)$-полином по λ, получающийся из $D\,(\lambda, \mu)$ при учете в каждом элементе определителя лишь членов, линеаризованных по μ.

Для системы (2.2) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^m D_*\,(\lambda, \mu) = 0$, причем $D_*\,(\lambda, \mu) = f_1\,(\lambda, \mu)$. Будем называть укороченным уравнение

$$D_*\,(\lambda, \mu) = 0 \tag{3.2}$$

и вспомогательными уравнения

$$D_1(\beta) = \begin{vmatrix} \beta E - P_{11} & -P_{12} \\ -P_{21} & -P_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

$$D_2(\alpha) = |\alpha E - P_{22}| = 0 \tag{3.4}$$

Методы теории устойчивости [1, 2] позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 1. Если при $|P(0)| \neq 0$, $|P_{22}(0)| \neq 0$ уравнения (3.2) и (3.4) удовлетворяют условиям Гурвица, то при достаточно малых значениях μ свойство устойчивости (асимптотической или неасимптотической) нулевого решения системы (2.2) влечет за собой и соответствующее свойство устойчивости нулевого решения системы (2.1).

В случае $m > 0$ будет устойчивым и любое решение системы (2.1) вида $\mathbf{z} = \mathbf{C}$, $\mathbf{x} = 0$ ($\|\mathbf{C}\|$ — достаточно малая величина). При этом для полной системы (2.1) имеет место голоморфный интеграл $\mathbf{z} + \mathbf{\Phi}(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathbf{A}$; для укороченной системы (2.2) — интеграл вида $\mathbf{z} + \boldsymbol{\varphi}(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = \mathbf{B}$, где $\mathbf{\Phi}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — голоморфные нелинейные векторные функции, уничтожающиеся при $\mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{x}_1 = 0$, $\mathbf{x}_3 = 0$ соответственно, разложения которых не содержат членов ниже второй степени по переменным $\mathbf{z}, \mathbf{x}$; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные постоянные векторы, причем

$$\mathbf{\Phi}(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}_0(t, \mathbf{z}, \mathbf{x}_3) + \mu\mathbf{\Phi}_1(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x})$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mu, z, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = \boldsymbol{\varphi}_0(t, \mathbf{z}, \mathbf{x}_3) + \mu\boldsymbol{\varphi}_1(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$$

где $\mathbf{\Phi}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ совпадают на решении вырожденной системы.

Доказательство. Не приводя подробных выкладок, выделим основные моменты (рассуждения аналогичны приведенным в [8]). При достаточно малых значениях μ при условиях теоремы 1 укороченная система (2.2) может быть представлена в виде

$$\mu \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \bar{P}_1^* \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{Vmatrix} + \bar{\mathbf{X}}_1^* \tag{3.5}$$

$$\frac{d\mathbf{x}_3}{dt} = \bar{P}_3^* \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{Vmatrix} + \bar{\mathbf{X}}_3^*, \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \bar{\mathbf{Z}}^*$$

Эта система относится к типу систем Ляпунова [1].

Обозначим $\lambda = \lambda(\mu)$ корни уравнения (3.1), $\lambda_* = \lambda_*(\mu)$ — корни уравнения (3.2). Можно показать, что при $|P(0)| \neq 0$, $|P_{22}(0)| \neq 0$ n_3 корней λ и λ_* стремятся при $\mu \to 0$ к значениям λ_0 корней вырожденного уравнения

$$D_0(\lambda) = D(\lambda, 0) = 0 \tag{3.6}$$

и в пределе равным им; n_1 корней λ и λ_* могут быть представлены в виде $\lambda(\mu) = \beta(\mu)/\mu$ и $\lambda_*(\mu) = \beta_*(\mu)/\mu$ соответственно, где $\beta(\mu)$ и $\beta_*(\mu)$ стремятся при $\mu \to 0$ к значениям β_0 корней уравнения (3.3) и в пределе равны им. Оценивая погрешности $\Delta\lambda = \lambda(\mu) - \lambda_0$, $\Delta\lambda_* = \lambda_*(\mu) - \lambda_0$ для корней первой группы и $\Delta\beta = \beta(\mu) - \beta_0$, $\Delta\beta_* = \beta_*(\mu) - \beta_0$ для корней второй группы, можно показать: при достаточно малых μ $(n_1 + n_3)$ корней уравнения (3.1) будут иметь отрицательные вещественные части, если укороченное уравнение (3.2) удовлетворяет условиям Гурвица. При этом остальные n_2 корней уравнения (3.1) будут при достаточно малых значениях μ иметь отрицательные вещественные части, если уравнение (3.4) удовлетворяет условиям Гурвица.

Отсюда получаем, что при сформулированных условиях для рассматриваемых систем при достаточно малых μ выполняются все условия соответствующих теорем Ляпунова [1], что и приводит к утверждениям теоремы 1.

Замечания. 3.1. Этот результат определяет условия, при которых сингулярно возмущенная задача об устойчивости (2.1), (2.2) имеет решение (в том числе и в критическом случае $m > 0$). Этим условиям можно, вообще говоря, придать и другой вид, учитывая, что при достаточно малых μ все корни укороченного уравнения (3.2) будут в левой полуплоскости, если уравнения $D_0(\lambda) = 0$ и $D_1(\beta) = 0$ удовлетворяют условиям Гурвица.

3.2. Аналогичный результат получен и для сингулярно возмущенной задачи (2.1), (2.3). Определены условия корректности укороченной модели, отвечающей предельной системе.

3.3. Используемый метод, сочетающий методы теории устойчивости и теории возмущений, позволяет решить и проблему оценки допустимых значений μ, при которых правомерно сведéние к укороченной модели. Для этого необходимо рассмотреть обе подсистемы, на которые распадается (в рассматриваемой постановке) исходная возмущенная система: подсистему, отвечающую медленным переменным, и подсистему, соответствующую быстрым переменным. Следуя Четаеву [2] и накладывая условия, обеспечивающие свойство устойчивости для решений полной системы (2.1) при условии свойства устойчивости для каждой из рассматриваемых подсистем, можно получить соотношения для допустимых значений μ. При этом можно использовать как первый, так и второй метод Ляпунова.

4. Непосредственно к задаче об устойчивости для рассматриваемых систем примыкает задача о близости решений полной и укороченной систем. Последняя, как известно [2, 14], тесно связана с теорией и методами Ляпунова. Определим, при каких условиях будет иметь место близость соответствующих решений систем (2.1) и (2.2) на бесконечном интервале времени. Обозначим $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mu)$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t, \mu)$ решение системы (2.1) с начальными условиями $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mu)$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0, \mu)$; $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t, \mu)$, $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}^*(t, \mu)$ — решение укороченной системы (2.2) определяемое начальными условиями $\mathbf{x}_{i0}^* = \mathbf{x}_i^*(t_0, \mu)$ $(i = 1, 3)$, $\mathbf{z}_0^* = \mathbf{z}^*(t_0, \mu)$, причем $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{f}_2(t, \mu, \mathbf{z}^*, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_3^*)$, где $\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(t, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$ — решение алгебраического уравнения из системы (2.2) — $0 = P_2^*\mathbf{x} + \mathbf{X}_2^*$ относительно переменной $\mathbf{x}_2$.

Методы теории устойчивости позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Если при $|P(0)| \neq 0$ уравнения (3.3), (3.4), (3.6) удовлетворяют условиям Гурвица, то при достаточно малых значениях μ для наперед заданных чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ (причем ε и γ могут быть сколь угодно малы) существует такое значение μ_*, что в возмущенном движении при $0 < \mu < \mu_*$ для всех $t \geqslant t_0 + \gamma$ будут выполняться неравенства $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\| < \varepsilon$, если $\mathbf{x}_{i0} = \mathbf{x}_{i0}^*$ $(i = 1, 3)$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0^*$, $\|\mathbf{x}_{20} - \mathbf{x}_{20}^*\| < \delta$.

Не останавливаясь на доказательстве, заметим лишь, что исследуются решения систем (2.1), (2.2) при достаточно малых μ, для которых $\mathbf{x}_{i0} = \mathbf{x}_{i0}^*$ $(i = 1, 3)$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0^*$. Следуя Четаеву, вводим переменные $\mathbf{a} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*$, $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ и рассматриваем дифференциальные уравнения для величин b_i, отвечающих некритическим переменным. Последние получаем при помощи уравнений (2.1), (2.2) и их интегралов

$$\mu^i d\mathbf{b}_i/dt = \mathbf{B}_i(t, \mu, \mathbf{b}) \ (i = 1, 2), \ d\mathbf{b}_3/dt = \mathbf{B}_3(t, \mu, \mathbf{b}) \qquad (4.1)$$

При этом исследуем поведение переменных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ на бесконечном интервале времени, учитывая, что $\mathbf{a}(t_0) = 0$, $\mathbf{b}_i(t_0) = 0$ $(i = 1, 3)$, $\|\mathbf{b}_2(t_0)\| < \delta$, $\delta > 0$ — наперед заданное число.

Анализируя систему (4.1) и структуру интегралов, можно показать, что при сформулированных условиях рассматриваемые решения обладают свойством: для наперед заданных чисел ε, δ, γ (ε и γ могут быть как угодно малы) существует такое значение $\mu_* > 0$, что при $0 < \mu < \mu_*$ для всех $t \geqslant t_0 + \gamma$ будет выполняться $\|\mathbf{a}\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{b}\| < \varepsilon$ при указанных начальных данных. Отсюда и следует справедливость утверждения.

Замечания. 4.1. Аналогичная задача рассмотрена и для случая систем (2.1), (2.3).

4.2. Проведенные исследования дают условия, при которых укороченная модель приемлема (в задаче об устойчивости, о динамических характеристиках переходных процессов). Эти исследования представляют интерес не только с теоретической точки зрения (позволяя получить обобщение результатов теории сингулярных возмущений на рассматриваемый критический случай и рассматриваемую упрощенную систему), но и с точки зрения приложений к задачам механики (в частности, к задачам динамики ЭМС).

5. Как приложение полученных результатов рассмотрим задачу об устойчивости для ЭМС, описанной в разд. 1 (в критическом случае m нулевых корней), как сингулярно возмущенную задачу. Построим укороченную модель (в качестве системы сравнения) и определим условия сведения к ней.

Исходные уравнения движения, представленные в виде (1.1), обозначим (5.1), не выписывая здесь. Примем $a = \| a_1, a_2 \|^T$, $b = \| b_1, b_2 \|^T$, $g = \| g_1, g_2 \|^T$, $e = 0$, где a_i, b_i, g_i $(i = 1, 2)$ — субматрицы соответствующих размеров (a_1, b_1, g_1 — $(m \times n)$-матрицы; $m = n - l$; $m \geqslant l$). В соответствии с используемым подходом, рассматривая ЭМС как систему класса сингулярно возмущенных, приведем уравнения (5.1) к виду (2.1). При этом полагая переходные процессы в электрических цепях следящих систем быстропротекающими и обозначая

$$L_{rs} = L_{rs}{}^*\mu, \quad A_{kj} = A_{kj}{}^*\mu, \quad B_{kj} = B_{kj}{}^*\mu, \quad \tau = \mu t \tag{5.1}$$

$$\mathbf{x}_1 = a\frac{d\mathbf{q}_M}{d\tau}, \quad \mathbf{x}_2 = L^*\mathbf{q}_E{}^\bullet, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{z} = \mu a_1 \frac{d\mathbf{q}_M}{d\tau} + (b_1{}^0 + g_1{}^0)\,\mathbf{q}_M$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, представим уравнения в новых переменных в виде

$$\begin{aligned}
\mu\frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} &= -(\bar{b} + \bar{g})\,\mathbf{x}_1 + \bar{A}^*\mathbf{x}_2 + \mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{z}, \mathbf{x})\\
\mu^2\frac{d\mathbf{x}_2}{d\tau} &= -\bar{R}\mathbf{x}_2 - \omega\mathbf{x}_3 - \bar{\Omega}\mathbf{x}_2 + \mu^2\bar{B}^*\mathbf{x}_1 + \mathbf{X}_2(\mu, \mathbf{z}, \mathbf{x})\\
\frac{d\mathbf{x}_3}{d\tau} &= d_1\mathbf{x}_1, \qquad \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mathbf{Z}(\mu, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

В соответствии с приведенными выше результатами получаем, что для ЭМС с малоинерционными электрическими цепями можно построить два типа упрощенных моделей, отвечающих укороченной системе, линеаризованной по μ (вида (2.2)), и системе, предельной по μ (вида (2.3)) соответственно, а именно:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\,a\mathbf{q}_M{}^\bullet + (b + g)\,\mathbf{q}_M{}^\bullet = \mathbf{Q}_{ME} + \mathbf{Q}_M''\\
R\mathbf{q}_E{}^\bullet = \mathbf{Q}_E' + \bar{\mathbf{Q}}_E'', \quad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M{}^\bullet
\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}
(b + g)\,\mathbf{q}_M{}^\bullet = \mathbf{Q}_{ME} + \bar{\mathbf{Q}}_M''\\
R\mathbf{q}_E{}^\bullet = \mathbf{Q}_E' + \bar{\mathbf{Q}}_E'', \quad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M{}^\bullet
\end{gathered} \tag{5.4}$$

порядков $2n$ и n соответственно. Эти приближенные системы могут быть приняты в качестве систем сравнения (упрощенных моделей) для исходной системы (5.1) порядка $(2n + u)$ при соответствующих условиях. В частности, из полученных результатов следует, что переход к системе (5.3) в задаче об устойчивости допустим, если μ достаточно мало́ (достаточно малы постоянные времени электрических цепей) и уравнения

$$| L\lambda + R^0 + \Omega^0 | = 0, \ | a^0\lambda + b^0 + g^0 | = 0 \tag{5.5}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{b_1{}^0 + g_1{}^0} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(b_2{}^0 + g_2{}^0)\lambda} & -A^0 \\ \hline \omega^0 & 0 & R^0 + \Omega^0 \end{array} \right|$$

удовлетворяют условиям Гурвица.

При этом сохраняется свойство устойчивости, имеет место близость решений полной и приближенной систем на бесконечном интервале времени.

Замечание 5.1. Система (5.3) (линеаризованная модель) совпадает с известной приближенной моделью, применяемой [4, 9] для таких ЭМС. Система (5.4), построенная здесь как предельная (по μ) модель,— это новая приближенная модель, не традиционная для задач динамики ЭМС, принципиально отличная от известных [9] расчетных (здесь никаких предположений о свойствах гироскопов и матрицы g не делается).

Пример. Рассмотрим систему одноосной гиростабилизации [4, 8], моделируемую как ЭМС с абсолютно жесткими элементами, причем стабилизирующий двигатель — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, с управлением током якоря, при учете конечного времени переходных процессов в электрических цепях следящих систем.

Уравнения возмущенного движения могут быть представлены [8] в виде (1.1), где $n = 2$, $u = 3$:

$$\begin{gathered} \bar{A}\beta^{\cdot\cdot} + b_1\beta^{\cdot} - H\alpha^{\cdot} = \ldots, \quad J\alpha^{\cdot\cdot} + b_2\alpha^{\cdot} + H\beta^{\cdot} = -g_M i_2 + \ldots \\ \sum_{j=1}^{3} L_{kj} i_j^{\cdot} + R_k i_k = E_k + \ldots \quad (k = 1, 2, 3) \\ E_1 = -\omega\beta, \ E_2 = -\Omega i_1 + g_E \alpha^{\cdot}, \ E_3 = 0 \end{gathered} \tag{5.6}$$

В соответствии с приведенными выше результатами в случае систем с малоинерционными электрическими цепями ($L_{kj} = L_{kj}{}^*\mu$, k, $j = 1, 2, 3$; $g_M = g_M^*\mu$, $g_E = g_E{}^*\mu$) можно, представляя (5.6) в виде сингулярно возмущенной системы вида (5.2), построить два типа упрощенных моделей. Линеаризованная (по μ) модель, которой в старых переменных отвечает система уравнений четвертого порядка

$$\begin{gathered} \bar{A}\beta^{\cdot\cdot} + b_1\beta^{\cdot} - H\alpha^{\cdot} = \ \ldots; \ J\alpha^{\cdot\cdot} + b_2\alpha^{\cdot} + H\beta^{\cdot} = -g_M i_2 + \ \ldots \\ R_1 i_1 = -\omega\beta + \ \ldots, R_2 i_2 = -\Omega i_1 + \ \ldots, R_3 i_3 = \ \ldots \end{gathered} \tag{5.7}$$

соответствует известной [4] модели. Переход к (5.7) от исходной системы (5.6) седьмого порядка допусти́м при достаточно малых μ, если в соответствии с условиями разд. 5 $b_1 \neq 0$ (или $b_2 \neq 0$); $H\omega g_M\Omega > 0$ и уравнение вида $|L\lambda + R + \Omega| = 0$ удовлетворяет условиям Гурвица. При этом укороченная модель (5.7) приемлема в рассматриваемом здесь смысле, если $\mu \leqslant \mu_*$. Оценка μ_*, полученная здесь в соответствии с замечанием 3.3 по идеям [2] с использованием соотношений вида $\sup_j |\operatorname{Re} \Delta\lambda_j| \leqslant \inf_j |\operatorname{Re} \Delta\lambda_{j0}|$, позволяет выделить область допустимых значений параметров. В частном случае ($b_1 = 0$, $L_{23}{}^* \neq 0$, все остальные $L_{kj}{}^* = 0$ $(k \neq j)$) при этом получаем

$$g_M < \inf \left\{ \frac{R_1R_2b_2H}{J\Omega\omega}, \frac{R_1R_2H^3}{A\Omega\omega b_2}, \frac{| L_{33}R_2 - L_{22}R_3 | JR_2}{(L_{22}L_{33} - L_{23}{}^2) g_E} \right\}$$

Заметим, что правомерна и другая, более простая, укороченная модель, соответствующая предельной (по μ) системе

$$b_1\beta^{\cdot} - H\alpha^{\cdot} = \ldots, \ b_2\alpha^{\cdot} + H\beta^{\cdot} = -g_M i_2 + \ldots$$

$$R_1 i_1 = -\omega\beta + \ldots, \ R_2 i_2 = -\Omega i_1 + \ldots, \ R_3 i_3 = \ldots$$

Переход к этой модели второго порядка допустим при достаточно малой инерционности электрических цепей в ЭМС, если выполняются соответствующие условия, аналогичные вышеприведенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
2. *Четаев Н. Г.* К вопросу об оценках приближенных интегрирований // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 419—421.
3. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 351 с.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
5. *Максвелл Д. К.* Трактат об электричестве и магнетизме // Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: Гостехиздат, 1954. С. 345—632.
6. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
7. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
8. *Кузьмина Л. К.* О приемлемости упрощенных уравнений в динамике гироскопических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 915—921.
9. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
10. *Ходжаев К. Ш., Шаталов С. Д.* О качественном исследовании движений с помощью асимптотических методов нелинейной механики // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 802—810.
11. *Мартыненко Ю. Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 388 с.
12. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.
13. *Кузьмина Л. К.* Методы теории устойчивости и сингулярно возмущенные системы в механике // Аннот. докл. 6-го Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: ФАН, 1986. С. 398.
14. *Градштейн И. С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Мат. сб. 1953. Т. 32. № 3. С. 533—544.
15. *Кузьмина Л. К.* О некоторых свойствах решений сингулярно возмущенных систем в одном критическом случае // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 382—388.

Казань

Поступила в редакцию 3.X.1990