Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36
© 1991 г.

Б. С. Бардин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача о решениях, асимптотических к положению равновесия гамильтоновой системы при резонансе первого порядка. Функция Гамильтона предполагается аналитической в окрестности положения равновесия, 2π-периодической или не зависящей от времени. Исследование выполняется методами изложенными в [1—3]. Полностью изучен случай гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Для многомерных гамильтоновых систем получены достаточные условия существования асимптотических решений и их приближенное аналитическое представление.

1. Рассмотрим гамильтонову систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1.1}$$

Пусть начало координат $q = p = 0$ является положением равновесия этой системы, а функция Гамильтона H представима в достаточно малой окрестности начала координат в виде сходящегося ряда

$$H = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(q, p, t) \tag{1.2}$$

где H_k — однородная форма степени k относительно q, p с непрерывными 2π-периодическими по t коэффициентами.

Будем считать, что оба корня характеристического уравнения линеаризованной системы (1.1) равны единице, т. е. имеет место резонанс первого порядка [4].

Рассматривается вопрос о существовании и аналитическом построении решений системы (1.1) асимптотически стремящихся при $t \to \pm\infty$ к началу координат. В разд. 4 результаты, полученные для системы (1.1), будут частично распространены на многомерные гамильтоновы системы, в которых реализуется однократный резонанс первого порядка.

Классическая теория асимптотических решений [5, 6] применима лишь при наличии у линеаризованной системы хотя бы одного отличного от нуля характеристичного числа.

Рассматривалась [1—3] задача о решениях, асимптотических к положению равновесия гамильтоновой системы при всех нулевых характеристичных числах. Соответствующие методы используются ниже.

2. Исследование задачи об асимптотических решениях системы (1.1) распадается на два случая. Рассмотрим случай, когда элементарные делители характеристической матрицы линеаризованной системы (1.1) простые. В этом случае функция Гамильтона (1.2) при подходящем выборе переменных (осуществляемом, например, при помощи преобразования Биркгофа [7]) может быть приведена к нормальной форме [4]

$$H = \Phi(\varphi) r^{M/2} + H^{(M+1)}(r, \varphi, t) \quad (M \geqslant 3) \tag{2.1}$$

$$q = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad p = \sqrt{2r}\cos\varphi, \qquad \Phi(\varphi) = \sum_{j=0}^{M} a_j \sin^j\varphi \cos^{M-j}\varphi \tag{2.2}$$

Здесь a_j — постоянные коэффициенты. $H^{(M+1)}$ — члены, порядок которых относительно $\sqrt{r}$ выше M и 2π-периодические по t, φ.

Выполнив еще неканоническую замену переменных по формулам $r = \rho^2$, $\varphi = 0$, получим уравнения движения в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{2}\rho^{M-2}\Phi(\theta) + P(\rho, \theta, t), \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\rho^{M-1}F(\theta) + R(\rho, \theta, t) \quad (2.3)$$

где $F(\theta) = -d\Phi(\theta)/\partial\theta$. Функции P и R аналитичны в окрестности начала координат и их разложения в ряды по степеням ρ начинаются с членов не ниже степени $(M-1)$ и M соответственно; P и R периодичны по θ, t и при $\rho \to 0$ стремятся к нулю равномерно относительно этих переменных.

К системе (2.3) применима теория исследования окрестности особой точки, развитая в [8]. На основании этой теории, так же как это делалось в [1, 2], можно заключить, что в плоскости $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, траектории системы могут входить в начало координат только по направлениям, задаваемым углами θ_*, где θ_* — вещественный корень уравнения $\Phi(\theta) = 0$. Каждому простому корню θ_* соответствует единственная интегральная кривая, входящая в начало координат при $t \to +\infty$ (если $F(\theta_*) < 0$) или при $t \to -\infty$ (если $F(\theta_*) > 0$), так как в этом случае выполняется условие $F(\theta_*)\, d\Phi(\theta_*)\, /\, d\theta < 0$. Если же θ_* — кратный корень, то вопрос о существовании асимптотических траекторий, соответствующих этому корню, решается членами порядка выше M по $\sqrt{r}$ в разложении гамильтониана (2.1).

Можно показать, что если θ_* — вещественный корень уравнения $\Phi(\theta) = 0$, то и величина $[\theta_* + \pi] \pmod{2\pi}$ также будет вещественным корнем этого уравнения. Число корней, очевидно, всегда четно либо равно нулю. Максимальное число корней равно $2M$.

Если уравнение $\Phi(\theta) = 0$ не имеет вещественных корней, то [9] точка $q = p = 0$ окружена инвариантными кривыми, расположенными сколь угодно близко к этой точке [10, 11]. Следовательно, асимптотических к началу координат траекторий не существует, так как иначе нарушилась бы единственность задачи Коши.

При исследовании аналитической структуры асимптотических решений будем пользоваться результатами В. И. Зубова [12]. Кратко приведем их здесь. Рассмотрим систему

$$\tau\frac{dy_s}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}(\tau)\, y_j + a_s(\tau)\,\tau + Y_s(\tau, y_1, \ldots, y_n) \quad (2.4)$$

Функции Y_s разлагаются в ряды.

$$Y_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_n \geqslant 2} A_s^{(m, m_1, \ldots, m_n)}(\tau)\,\tau^m y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}, \quad s = 1, \ldots, n \quad (2.5)$$

сходящиеся при $|\tau| < \tau_1$, $\tau_1 > 0$ — постоянная $|y_j| < y_0$, $(j = 1, \ldots, n)$. Функции $a_{sj}(\tau)$, $a_s(\tau)$, $A_s^{(m, m_1, \ldots, m_n)}(\tau)$ вещественны, непрерывны, ограничены при $0 < \tau \leqslant 1$.

Обозначим через 1, μ_1, $\ldots$, μ_n характеристичные числа системы

$$\frac{dz}{d\eta} = -z, \qquad \frac{dy_s}{d\eta} = -\sum_{j=1}^{n} a_{sj}(e^{-\eta})\, y_j - a_j(e^{-\eta})\, z \quad (2.6)$$

Теорема [12]. Если $\mu_k > 0$ при $k \leqslant l$ и система (2.6) правильная, то система уравнений (2.1) имеет семейство решений, зависящее от l произвольных постоянных, представимое в форме рядов

$$y_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_l\geq 1} K^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(\tau)\,\tau^{(m+\mu_1 m_1+\ldots+\mu_l m_l)} c_1^{m_1}\ldots c_l^{m_l},\quad s=1,2,\ldots,n \tag{2.7}$$

которые сходятся при $|\tau| < \tau_0$, $|c_i| < c_0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, где τ_0 — достаточно малая величина $c_0 = \mathrm{const}$, причем $K_i^{(m, m_1, \ldots, m_l)}(\tau)\,\tau^\alpha \to 0$ при $\tau \to 0$, где $\alpha > 0$ — постоянная.

Рассмотрим вопрос об аналитическом построении асимптотических решений. Перейдем к декартовым координатам по формулам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Уравнения движения в новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M} a_k k y^{k-1} x^{M-k} + X(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M-1} a_k (M-k) y^k x^{M-k-1} + Y(x, y, t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

где X и Y — 2π-периодические по t и аналитические по x, y функции, причем их разложения начинаются с членов не ниже степени M.

Предварительно рассмотрим асимптотические решения укороченной системы, которая получается из системы (2.8), если в правых частях ее уравнений отбросить члены $X(x, y, t)$, $Y(x, y, t)$. Каждому простому корню уравнения $\Phi(\theta) = 0$ будет соответствовать семейство асимптотических решений укороченной системы

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\cos\theta_*\,[\cos^{M-2}\theta_* - {}^1/_2 (M-2) F(\theta_*)\, x^{M-2}(0)\, t]^{-1/(M-2)} \\ y(t) &= y(0)\sin\theta_*\,[\sin^{M-2}\theta_* - {}^1/_2 (M-2) F(\theta_*)\, y^{M-2}(0)\, t]^{-1/(M-2)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Покажем, что и в полной системе (2.8) каждому простому корню θ_* соответствует однопараметрическое семейство асимптотических решений. Учитывая структуру решения (2.8) и имея в виду свести задачу к применению теоремы В. И. Зубова [12], выполним замену переменных x, y, $t \to$ $\to y_1$, y_2, τ по формулам

$$\begin{aligned} x &= \tau(y_1 + a),\quad y = \tau(y_2 + b),\quad \tau = t^{-1/(M-2)} \\ a &= A\cos\theta_*,\quad b = A\sin\theta_*,\quad A = [{}^1/_2(M-2)\,|F(\theta_*)|]^{-1/(M-2)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

В новых переменных система (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \tau\frac{dy_1}{d\tau} &= \left[\frac{M-2}{2}\sum_{k=1}^{M} a_k k (M-k)\, a^{M-k-1} b^{k-1} - 1\right] y_1 + \\ &+ \left[\frac{M-2}{2}\sum_{k=1}^{M} a_k k (k-1)\, a^{M-k} b^{k-2}\right] y_2 + \zeta_1 \\ \tau\frac{dy_2}{d\tau} &= \left[\frac{M-2}{2}\sum_{k=0}^{M-1} a_k (M-k)(M-k-1)\, b^k a^{M-k-2}\right] y_1 - \\ &- \left[\frac{M-2}{2}\sum_{k=0}^{M-1} a_k k (M-k)\, a^{M-k-1} b^{k-1} + 1\right] y_2 + \zeta_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$(\zeta_i = -\tau(M-2) f_i(a, b, \tau^{-1}) + Y_i(y_1, y_2, \tau),\quad i = 1, 2$$

где $f_i(x, y, t)$ — члены степени M в разложении в ряды по x, y функций X и Y соответственно, а функции Y_i представимы рядами вида (2.5).

Если в правых частях системы (2.11) отбросить Y_1, Y_2 и выполнить замену независимой переменной $\eta = -\ln\tau$, то полученная таким образом линейная система будет иметь вид (2.6). Эта система является правильной и ее характеристичные числа 1, $(M-2)$, $-M$. Таким образом, на основании теоремы В. И. Зубова можно утверждать, что система (2.11) имеет однопараметрическое семейство решений, представимых рядами вида (2.7).

В переменных x, y, t при достаточно больших $|t|$ получаем следующее представление асимптотических решений системы (2.8), соответствующих корню θ_*:

$$x = at^{-1/(M-2)} + \psi(t, c)\, t^{-2/(M-2)}, \quad y = bt^{-1/(M-2)} + \chi(t, c)\, t^{-2/(M-2)} \tag{2.12}$$

$\psi(t, c)$, $\chi(t, c)$ — равномерно ограниченные при достаточно больших $|t|$ функции времени и произвольной постоянной c.

Очевидно, что если все корни уравнения $\Phi(\theta) = 0$ простые, то других асимптотических решений не существует.

3. Перейдем к исследованию задачи об асимптотических решениях системы (1.1) в случае непростых элементарных делителей характеристической матрицы линеаризованной системы. В этом случае функция Гамильтона, нормализованная до членов порядка M по q, p, имеет вид [4, 13]

$$H = H_0 + \sum_{\alpha+\beta>M} h_{\alpha\beta} q^\alpha p^\beta, \quad H_0 = {}^1/_2 \delta q^2 + a_{M,0} p^M; \quad \delta = \pm 1 \tag{3.1}$$

где $a_{M,0}$ — постоянный вещественный коэффициент; $h_{\alpha\beta}(t)$ — непрерывные 2π — периодические функции времени.

Было выполнено [13] полное качественное исследование решений, асимптотических к положению равновесия системы (1.1) с гамильтонианом (3.1).

Асимптотические решения укороченной системы с гамильтонианом H_0 имеют вид

$$q = d\,(c \pm t)^{-M/(M-2)}, \; p = g\,(c \pm t)^{-2/(M-2)}, \quad g = \pm {}^1/_2\,(M-2)\,\delta d \tag{3.2}$$

где c — произвольная постоянная, d — вещественный корень уравнения

$$d^{M-2} + (\pm 1)^M\, 2^{M-1} [(M-2)^M a_{M,0} \delta^{M-1}]^{-1} = 0 \tag{3.3}$$

В формулах (3.2), (3.3) верхний знак берется при $t \to +\infty$ $(t > -c)$, а нижний — при $t \to -\infty$ $(t < c)$.

Для получения аналитического представления асимптотических решений системы (1.1), учитывая структуру решения (3.2), выполним замену переменных

$$q = \tau^M (x + d), \quad p = \tau^2 (y + g), \quad \tau = t^{-1/(M-2)}$$

В новых переменных x, y, τ нолная система (1.1) с гамильтонианом (3.1)

$$\begin{aligned} \tau dx/d\tau &= -Mx - Ma_{M,0}\,(M-1)\,(M-2)\, g^{M-2} y + X_1(x, y, \tau) \\ \tau dy/d\tau &= -2y + \delta\,(M-2)\,x + X_2(x, y, \tau) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где X_i $(i = 1, 2)$ — функции типа (2.5)

К системе (3.4) можно применить теорему В. И. Зубова. Действительно, соответствующая (3.4) линейная система (2.6) правильная и ее характеристичные числа 1, $(M-2)$, $-2M$. Таким образом, система (3.4) имеет однопараметрическое семейство асимптотических решений, представимое рядами вида (2.7).

В переменных q, p, t при достаточно больших значениях $|t|$ получаем следующее представление асимптотических решений (1.1) с гамильтонианом (3.1), входящих в начало координат при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$:

$$q = dt^{-M/(M-2)} + \varkappa(t, c)\, t^{-(M+2)/(M-2)}, \quad p = gt^{-2/(M-2)} + \eta(t, c)\, t^{-4/(M-2)} \tag{3.5}$$

где $\varkappa(t, c)$, $\eta(t, c)$ — равномерно ограниченные при достаточно бóльших $|t|$ функции времени и произвольной постоянной c.

4. Кратко рассмотрим вопрос о существовании и аналитическом построении решений, асимптотических к положению равновесия гамильтоновой системы с n ($n \geqslant 2$) степенями свободы при резонансе первого порядка.

Пусть задана гамильтонова система дифференциальных уравнений

$$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i, \quad dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4.1)$$

и начало координат $q_i = p_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — положение равновесия этой системы. В окрестности $q_i = p_i = 0$ функция Гамильтона H аналитическая, 2π — периодическая по t или не зависящая от t. Рассмотрим задачу о решениях системы (4.1), асимптотических к ее положению равновесия $q_i = p_i = 0$. Предполагается, что все характеристические показатели $\pm\lambda_k$ линеаризованной системы имеют нулевые вещественные части. Кроме того, считаем, что в системе (4.1) реализуется однократный резонанс первого порядка, т. е.

$$\sigma_k = N \quad (\lambda_k = i\sigma_k) \qquad (4.2)$$

где N — целое число (если H не зависит от времени, то $N = 0$). Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать $k = 1$.

При соответствующем выборе переменных q_i, p_i, выполняемом, например, при помощи преобразования Биркгофа [8] или методом Деприи — Хори [14], функция Гамильтона H может быть приведена к виду [9, 15]

а) в случае простых элементарных делителей характеристической матрицы линеаризованной системы (4.1)

$$H = \sum_{i=2}^{n} \sigma_i r_i + \Phi_{M_1}(\varphi_1) r_1^{M_1/2} + \sum_{m=3}^{M_1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{|\alpha|=k} \Phi_{m-2k,\alpha}(\varphi_1) r_1^{m/2-k} r_2^{\alpha_2} \ldots r_n^{\alpha_n} + O_{M_1} \qquad (4.3)$$

б) в случае непростых элементарных делителей характеристической матрицы линеаризованной системы (4.1)

$$H = \frac{\delta}{2} q^2 + \sum_{i=2}^{n} \sigma_i r_i + a_{M_2} p_1^{M_2} + \sum_{m=3}^{M_2} \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{|\alpha|=k} a_{m-2k,\alpha} p_1^{m-2k} r_2^{\alpha_2} \ldots r_n^{\alpha_n} + O_{M_2} \qquad (4.4)$$

$$q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \delta = \pm 1$$

$$\alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j$$

$$\Phi_{m-2k}(\varphi_1) = \sum_{j=1}^{m-2k} b_{j,\alpha} \sin^j \varphi_1 \cos^{m-2k-j} \varphi_1$$

$$\Phi_{M_1}(\varphi_1) = \sum_{j=1}^{M_1} b_j \sin^j \varphi_1 \cos^{M_1-j} \varphi_1$$

где a_{M_2}, $a_{m-2k,\alpha}$, b_i, $b_{j,\alpha}$ — вещественные постоянные; квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа. Считаем, что нормализация выполнена до таких порядков M_1 и M_2, что соответственно $\Phi_{M_1}(\varphi_1) \not\equiv \not\equiv 0$ и $a_{M_2} \neq 0$. Через O_{M_1} и O_{M_2} обозначены соответственно члены порядка выше M_1 и M_2 по q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$).

Выполним еще каноническую замену переменных по формулам

$$\rho_i = r_i, \quad \theta_i = \sigma_i t + \varphi_i \quad (i = 2, \ldots, n)$$

В новых канонических переменных гамильтонианы (4.3) и (4.4) примут соответственно вид

$$\text{а) } H = \Phi_{M_1}(\varphi_1) r_1^{M_1/2} + \sum_{m=3}^{M_1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{|\alpha|=k} \Phi_{m-2k,\,\alpha}(\varphi_1) r_1^{m/2-k} \rho_2^{\alpha_2} \ldots \rho_n^{\alpha_n} + O_{M_1} \tag{4.5}$$

$$\text{б) } H = \frac{\delta}{2} q_1^2 + a_{M,0} p_1^{M_2} + \sum_{m=3}^{M_2} \sum_{k=1}^{[m/2]} \sum_{|\alpha|=k} a_{m-2k,\,\alpha} p^{m-2k} \rho_2^{\alpha_2} \ldots \rho_n^{\alpha_n} + O_{M_2} \tag{4.6}$$

Рассмотрим сначала укороченную систему, отбросив в функции Гамильтона (4.5) и (4.6) члены степени выше M_1 и M_2 по $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{\rho_i}$ и q_1, p_1, $\sqrt{\rho_i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ соответственно. Непосредственным интегрированием получаем:

а) *элементарные делители простые.* Каждому простому корню φ_* уравнения $\Phi_{M_1}(\varphi_1) = 0$ соответствует однопараметрическое семейство решений, асимптотических при $t \to +\infty$ (если $d\Phi_{M_1}(\varphi_*)/d\varphi_1 > 0$) или при $t \to -\infty$ (если $d\Phi_{M_1}(\varphi_*)/d\varphi_1 < 0$) к началу координат $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\varphi_1 = \varphi_*, \quad r_1 = r_1(0)\,\nu^{-2/(M-2)}$$

$$\nu = 1 + \frac{M_1 - 2}{2} \frac{d\Phi_{M_1}(\varphi_*)}{d\varphi_1} r_1^{(M_1-2)/2}(0)\, t \tag{4.7}$$

$$\theta_j = \left[\frac{d\Phi_{M_1}(\varphi_*)}{d\varphi_1}\right]^{-1} \left\{ \sum_{m=3}^{M_1-1} \frac{2}{M_1 - m} r_1^{(m-M_1)/2}(0)\, \Phi_{m-2,\,\alpha^j}(\varphi_*)\, \nu^{(M_1-m)/(M_1-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi_{M_1-2,\,\alpha^j}(\varphi_*) \ln \nu^2}{M_1 - 2} \right\}, \quad \rho_j = 0$$

$$(j = 2 \ldots, n)$$

б) *элементарные делители непростые.* Если M_2 — нечетное число, то существуют два однопараметрических семейства решений, (одно семейство при $t \to +\infty$ и одно семейство при $t \to -\infty$), асимптотических к началу координат

$$q_1 = d\,(c \pm t)^{-M_2/(M-2)}, \quad p_1 = q\,(c \pm t)^{-2/M_2-2)}$$

$$\theta_j = \sum_{m=3}^{M_2} \frac{M_2 - 2}{M_2 - 2m - 2} a_{m-2,\,\alpha^j} g^{m-2} l_m(c \pm t) \tag{4.8}$$

$$l_m(t) = \begin{cases} t^{(M_2-2m-2)/(M_2-2)}, & M_2 \neq 2m - 2 \\ \ln t, & M_2 = 2m - 2 \end{cases}$$

$$\rho_j = 0, \quad \alpha^j = (0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0), \quad \alpha_j = 1 \quad (j = 2, \ldots, n)$$

где c — произвольная постоянная; d, g — задаются формулами (3.2) и (3.3).

Если M_2 — четное число и $a_{M_2}\delta < 0$, то существует четыре однопараметрических семейства асимптотических решений (два семейства при $t \to +\infty$ и два семейства при $t \to -\infty$) вида (4.8)

Пусть для простоты $M_1 = 3$, $M_2 = 4$. Опираясь на структуру решений укороченной системы, и используя теорему В. И. Зубова, можно доказать существование асимптотических решений полной системы (4.1), приближенное представление которых дается формулами (4.7) и (4.8). Для этого нужно выполнить замену вида

$$\text{а) } \rho_i = \tau^2 y_i, \quad \theta_i = 2\Phi_{1,\,\alpha^i}(\varphi_*)\left[(d\Phi_3(\varphi_*))/d\varphi_1\right]^{-1} \ln \tau^{-1} + x_i \quad (i = 2, \ldots, n),$$

$$r_1 = \tau^2 \{4\left[(d\Phi_3(\varphi_*))/d\varphi_1\right]^{-2} + y_1\}$$

$$\varphi_1 = \varphi_* + x_1, \quad \tau = t^{-1} \tag{4.9}$$

б) $$\rho_i = \tau^4 y_i, \quad \theta_i = g a_{1, \alpha^i} \ln \tau^{-1} + x_i$$

$$p_1 = \tau^2 (g + y_1), \quad q_1 = \tau^4 (d + x_1) \quad (i = 2, \ldots, n), \quad \tau = t^{-1/4} \qquad (4.10)$$

где φ_* — корень уравнения $\Phi_3(\varphi_1) = 0$, $\alpha^i = (0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)$, $\alpha_i = 1$.

К полученной в результате выполнения этой замены системе можно применить теорему В. И. Зубова аналогично тому, как это делалось в разд. 2 и 3.

При $M_1 > 3$ и $M_2 > 4$ доказательство существования у полной системы (4.1) асимптотических решений выполняется также на основании теории В. И. Зубова. Но в этом случае замена (4.9), (4.10) будет иметь более сложный вид.

Автор благодарит А. П. Маркеева за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П., Щербина Г. А.* О движениях спутника, асимптотических к его эксцентриситетным колебаниям // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 3—10.
2. *Маркеев А. П., Щербина Г. А.* О движениях, асимптотических к треугольным точкам либрации круговой ограниченной задачи трех тел // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 335—362.
3. *Маркеев А. П.* Резонансы и асимптотические траектории в системах Гамильтона // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 207—212.
4. *Иванов А. П., Сокольский А. Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963—970.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
6. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. тр. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
9. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. С. 24—33.
10. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1972. 167 с.
12. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
13. *Мерман Г. А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // Бюл. Ин-та теорет. астрон. 1964. Т. 9. № 6. С. 394—424.
14. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
15. *Сокольский А. Г.* Устойчивость гамильтоновых систем в случае нулевой частоты // Дифференц уравн. 1981. № 8. С. 1509—1510.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1990