Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

В. Н. Тхай

ОБРАТИМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Механические системы под действием позиционных сил или комбинации позиционных сил и сил в виде форм четного порядка по скоростям (неголономные системы Чаплыгина), а также неголономные системы при отсутствии диссипативных сил относятся к системам с линейным автоморфизмом специального вида. Для таких систем устойчивость положений равновесия возможна только в критическом случае одних нулевых и чисто мнимых корней; при наличии нулевых корней асимптотическая устойчивость невозможна. В нерезонансном случае имеет место формальная устойчивость, причем существует семейство периодических движений, аналогичное семейству Ляпунова для гамильтоновых систем и семейство условно периодических движений с набором частот, пропорциональных частотам линейной системы. Решается задача устойчивости для резонансов низших порядков — третьего и четвертого. Рассматриваются примеры.

1. Обратимые системы с линейным автоморфизмом. Рассматривается система

$$\mathbf{x}_*^{\cdot} = \mathbf{A}_*\mathbf{x}_* + \mathbf{X}_*(\mathbf{x}_*), \quad \mathbf{X}_*(0) = 0; \quad \mathbf{x}_*, \mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^s \tag{1.1}$$

($\mathbf{A}_*$ — постоянная ($s \times s$)-матрица) с линейным автоморфизмом $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\mathbf{A}_* = -\mathbf{A}_*\mathbf{M}, \quad \mathbf{M}\mathbf{X}_*(\mathbf{x}_*) = -\mathbf{X}_*(\mathbf{M}\mathbf{x}_*), \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$$

($\mathbf{E}$ — единичная матрица). Эта система является частным случаем обратимой в смысле Биркгофа [1] системы и исследовалась Мозером [2].

Характеристическое уравнение линейного приближения $\det\|\mathbf{A}_* - \lambda\mathbf{E}\| = 0$ наряду с корнем λ содержит корень $-\lambda$.

В самом деле

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}_* - \lambda\mathbf{E}) = -(\mathbf{A}_* + \lambda\mathbf{E})\mathbf{M}, \quad \det\|\mathbf{A}_* + \lambda\mathbf{E}\| = \det\|\mathbf{A}_* - \lambda\mathbf{E}\|$$

Поэтому устойчивость такой системы возможна только в критическом случае нулевых и чисто мнимых корней. Пусть имеется m нулевых и n пар чисто мнимых корней, причем все элементарные делители простые. Тогда невырожденным преобразованием $x_* = \mathbf{P}y_*$ приведем систему (1.1) к виду

$$\xi^{\cdot} = \Xi(\xi, \eta, \bar\eta), \quad \eta^{\cdot} = \Lambda\eta + \Phi(\xi, \eta, \bar\eta), \quad \bar\eta^{\cdot} = -\Lambda\bar\eta + \bar\Phi(\xi, \eta, \bar\eta) \tag{1.2}$$
$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

где ξ — действительный m-вектор, η, $\bar\eta$ — комплексно-сопряженные n-векторы. Система (1.2) имеет линейный автоморфизм $\mathbf{M}_* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$, $\mathbf{M}_*^2 = \mathbf{E}$ [3]. Линейная часть системы (1.2) не меняется при заменах: 1) $t \to -t$, $\xi \to \xi$, $\eta \to \bar\eta$, $\bar\eta \to \eta$ и 2) $t \to -t$, $\xi_1 \to \xi_1, \ldots, \xi_k \to \xi_k$, $\xi_{k+1} \to -\xi_{k+1}, \ldots, \xi_m \to -\xi_m$, $\eta \to \bar\eta$, $\bar\eta \to \eta$. Поэтому автоморфизм $\mathbf{M}_*$ может быть вида

$$N = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_n \\ 0 & \mathbf{E}_n & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad L = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{E}_{m-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{E}_n \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_n & 0 \end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{E}_j$ — единичная j-матрица.

Пример 1 [2]. Система

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}); \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{l}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n}$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{y}, -\mathbf{z}) = -\mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{Z}(\mathbf{y}, -\mathbf{z}) = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}); \quad M = \begin{Vmatrix} -\mathbf{E}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_n \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

с линейным автоморфизмом **M** встречается в ряде механических задач [4—6]. Линейное приближение необходимо имеет вид

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{Bz}, \quad \mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{Cy}$$

Пусть $\operatorname{rank} \mathbf{B} = l_1$, $\operatorname{rank} \mathbf{C} = n_1$. Тогда эта система приводится к виду

$$\mathbf{y}_1^{\cdot} = 0, \quad \mathbf{y}_2^{\cdot} = \mathbf{B}_2\mathbf{z}_2^*, \quad \mathbf{z}_1^{\cdot} = 0, \quad \mathbf{z}_2^{\cdot} = \mathbf{C}_2\mathbf{y}_2^*; \quad \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2^* \in \mathbf{R}^{l_1}, \quad \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_2^* \in \mathbf{R}^{n_1}$$

$$\operatorname{rank} \mathbf{B}_2 = l_1, \ \operatorname{rank} \mathbf{C}_2 = n_1$$

Поэтому характеристическое уравнение обязательно обладает $m = l + n - 2n^*$, $n^* = \min(l_1, n_1)$, нулевыми корнями с $l + n - (l_1 + n_1)$ группами решений. Если $l_1 = n_1 = n^*$, то все элементарные делители простые, и система может быть устойчива только в критическом случае m нулевых и n^* пар чисто мнимых корней. При $n^* < n$ имеет место автоморфизм **L**, а при $n^* = n$ — автоморфизм **N**. В случае $l < n$ имеем $l_1 < n$ и возможен только автоморфизм **L**.

Рассмотрим подробнее систему (1.2) с линейным автоморфизмом N (систему N). Для нее должны выполняться соотношения

$$\Xi(\xi, \eta, \bar{\eta}) = -\Xi(\xi, \bar{\eta}, \eta), \quad \Phi(\xi, \eta, \bar{\eta}) = -\bar{\Phi}(\xi, \bar{\eta}, \eta),$$

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta, \bar{\eta}) = -\Phi(\xi, \bar{\eta}, \eta) \tag{1.4}$$

означающие, что функция Ξ не содержит членов, свободных от η, $\bar{\eta}$ и зависящих только от ξ. Имеет место существенно особенный критический случай m нулевых корней. С другой стороны, условия (1.4) гарантируют, что коэффициенты в разложении функций Ξ, Φ, $\bar{\Phi}$ чисто мнимые. Эти выводы приводят к ряду замечательных свойств систем N.

1°. Для обратимой системы N асимптотическая устойчивость невозможна.

В самом деле, у такой системы существует семейство установившихся движений $\xi = \mathbf{c}$, $\eta = \bar{\eta} = 0$ ($\mathbf{c}$ — постоянный m-вектор).

2°. В нерезонансном случае m нулевых и n пар чисто мнимых корней система N формально устойчива.

Это, а также последующие два свойства выводятся из результатов [3, 7] [1] исследования нормальных форм при применении этих результатов к системам N. Автоморфизм N сохраняется в нормальной форме [3]. При этом нормализующее преобразование необходимо взять с действительными коэффициентами. Тогда нормальная форма имеет вид (для записи воспользуемся теми же переменными, что и в (1.2)):

$$\xi^{\cdot} = 0, \quad \eta_s^{\cdot} = i\eta_s\Psi_s(\rho, \xi), \quad \bar{\eta}_s^{\cdot} = -i\bar{\eta}_s\Psi_s(\rho, \xi) \tag{1.5}$$

$$\Psi_s(\rho, \xi) = \omega_s + \sum_{j=1}^{n} A_{sj}\rho_j + \sum_{j=1}^{m} C_{sj}\xi_j + \sum_{j,k=1}^{m} D_{sjk}\xi_j\xi_k + \ldots$$

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n); \quad \rho_s = \eta_s\bar{\eta}_s, \quad \omega_s = |\lambda_s| \quad (s = 1, \ldots, n)$$

где $\Psi_s(\rho, \xi)$ — формальные ряды от ρ и ξ с действительными коэффициентами. Поэтому свойство 2° следует из знакоопределенного интеграла $\xi^2 + \eta\bar{\eta} = \mathrm{const}$ системы (1.5).

---

[1] См. также *Брюно А. Д.* Множества аналитичности нормализующего преобразования.— Препринты: М.: Инт- прикл. матем. АН СССР, 1974, № 97 и 98.

Согласно [7] (см. также сноску) данный вид (1.5) нормальной формы гарантирует аналитичность множества $\mathbf{A}^* = A_1^* \cup A_2^* \cup \ldots \cup A_n^*$:

$$A_s^* = \{\rho, \xi : \rho_j = 0;\ j \neq s;\ \xi = 0\}\ (s = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Множество A^* состоит из n однопараметрических семейств периодических движений, аналогичных семействам Ляпунова [8] для гамильтоновых систем.

3°. В нерезонансном случае m нулевых и n пар чисто мнимых корней система N имеет n однопараметрических семейств периодических движений (1.6).

4°. В нерезонансном случае m нулевых и n пар чисто мнимых корней система N имеет однопараметрическое (a — параметр) семейство условно-периодических движений

$$\mathbf{A}^0 = \{\rho, \xi : \xi = 0;\ \Psi_j = \omega_j a\ (j = 1, \ldots, n)\},$$

с набором частот $(\omega_1 a, \ldots, \omega_n a)$, если $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет условию

$$|\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}\rangle| > \mu\, |\mathbf{q}|^{-\nu} \tag{1.7}$$

по всем целочисленным векторам $\mathbf{q}$ с $\langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}\rangle \neq 0$ (μ и ν — некоторые положительные постоянные), а $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A} = \| A_{sj} |$.

Это следует из совпадения множества $\mathbf{A}^0$ с некоторым аналитическим множеством $\mathbf{B}$ [7]. Доказательство нильпотентности соответствующей матрицы $\mathbf{B}$ можно получить дословным повторением рассуждений, проведенных для гамильтоновой системы, что и отмечено А. Д. Брюно (см. также сноску на с. 579).

2. Устойчивость при резонансах. Из свойства 2° следует, что на основе анализа членов конечного порядка задача об устойчивости по Ляпунову может быть решена только в резонансном случае. Наиболее важными в этом отношении являются резонансы низших порядков — третьего и четвертого. Резонансная задача для частного случая $m = 0$ решена в [9].

Отметим сначала важное обстоятельство. Пусть система (1.2) приведена к нормальной форме до членов K-го порядка и в системе имеют место резонансы, наинизший порядок которых равен K^+. Тогда функция Ξ начинается с членов не ниже K-го порядка относительно ξ, η, $\bar{\eta}$. Поэтому если в системе имеет место резонанс третьего порядка, то модельная система, полученная из нормальной формы отбрасыванием членов выше второго порядка, допускает решение, в котором $\xi = 0$, а переменные η, $\bar{\eta}$ описываются подсистемой, совпадающей со случаем $m = 0$. Значит, выводы [9] о неустойчивости остаются в силе. Выводы об устойчивости модельной системы также не меняются, ибо при $\xi = \mathrm{const}$ уравнения для полярных радиусов $r_s = \eta_s\bar{\eta}_s$ не меняются. Таким образом, резонанс третьего порядка решается теоремой 1 из [9].

Рассмотрим резонансы четвертого порядка

$$\sum_{j=1}^{\mu} p_j\lambda_j = 0, \quad p_j > 0, \sum_{j=1}^{\mu} p_j = 4, \quad \mu \leqslant 4, \quad \mu \leqslant n$$

Модельная система, содержащая члены третьего порядка включительно, имеет вид

$$\xi_\gamma^{\cdot} = 0 \ (\gamma = 1, \ldots, m)$$

$$\eta_\alpha^{\cdot} = \lambda_\alpha\eta_\alpha + i\eta_\alpha\left(\sum_{\gamma=1}^{m} C_{\alpha\gamma}\xi_\gamma + \sum_{j=1}^{n} A_{\alpha j}r_j + \sum_{s,j=1}^{m} D_{\alpha sj}\xi_s\xi_j\right) + iB_\alpha \prod_{j=1}^{\mu} \bar{\eta}_j^{p_j - \delta_{\alpha j}} \tag{2.1}$$

$$\eta_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_\beta\eta_\beta + i\eta_\beta\Big(\sum_{\gamma=1}^{m} C_{\beta\gamma}\xi_\gamma + \sum_{j=1}^{n} A_{\beta j}r_j + \sum_{s,j=1}^{m} D_{\beta sj}\xi_s\xi_j\Big)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, \mu;\ \beta = \mu+1, \ldots, n)$$

Здесь $A_{\alpha j}$, $A_{\beta j}$, B_α, $C_{\alpha\gamma}$, $C_{\beta\gamma}$, $D_{\alpha sj}$, $D_{\beta sj}$ — действительные постоянные, а комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

Исследуем невырожденный случай, когда ни один из коэффициентов B_α не обращается в нуль. В полярных координатах

$$\eta_s = \sqrt{r_s}\exp(i\theta_s),\quad \bar\eta_s = \sqrt{r_s}\exp(-i\theta_s)\quad (s = 1, \ldots, n)$$

система (2.1) запишется в виде

$$\xi_\gamma^{\boldsymbol{\cdot}} = 0\quad (\gamma = 1, \ldots, m)$$

$$r_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = 2B_\alpha\sin\theta\prod_{j=1}^{\mu} r_j^{p_j/2};\quad r_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = 0\quad (\alpha = 1,\ldots,\mu;\ \beta = \mu+1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

$$\theta^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon(\xi) + \prod_{j=1}^{n} A_j r_j + \sum_{j=1}^{\mu} p_j B_j \prod_{k=1}^{\mu} r_k^{p_k/2-\delta_{jk}}\cos\theta$$

$$\theta_\beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_\beta + \sum_{j=1}^{m} C_{\beta j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n} A_{\beta j}r_j + \sum_{j,k=1}^{m} D_{\beta jk}\xi_j\xi_k$$

$$A_j = \sum_{\alpha=1}^{\mu} p_\alpha A_{\alpha j},\quad \theta = \sum_{\alpha=1}^{\mu} p_\alpha\theta_\alpha,\quad \varepsilon(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{\mu} p_\alpha\Big(\sum_{j=1}^{m} C_{\alpha j}\xi_j + \sum_{j,k=1}^{m} D_{\alpha jk}\xi_j\xi_k\Big)$$

$$\omega_\beta = -i\lambda_\beta$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что система (2.2) имеет следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} W_{s0} &\equiv \xi_s = h_s^0\quad (s = 1, \ldots, m)\\ W_\alpha &\equiv B_\alpha r_1 - B_1 r_\alpha = h_\alpha\quad (\alpha = 2, \ldots, \mu)\\ W_\beta &\equiv r_\beta = h_\beta\quad (\beta = \mu+1, \ldots, n)\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$W \equiv \Big(\sum_{\alpha=1}^{\mu} A_\alpha \prod_{j=1}^{\mu} B_j^{1-\delta_{\alpha j}}\Big) r_\alpha^2 + 4\prod_{j=1}^{\mu} B_j r_j^{p_j/2}\cos\theta +$$

$$+\frac{2}{\mu}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\mu} r_\alpha \prod_{j=1}^{\mu} \beta_j^{1-\delta_{\alpha j}}\Big)\Big(\varepsilon(\xi) + \sum_{\beta=\mu+1}^{n} A_\beta r_\beta\Big) = h$$

где h_s^0, h_ν $(s = 1, \ldots, m;\ \nu = 2, \ldots, n)$, h — произвольные постоянные. Следовательно, если в последовательности коэффициентов $B_1, \ldots, B_\mu$ есть смена знака, то из первых трех групп интегралов (2.3) можно составить линейный относительно $\xi_1^2, \ldots, \xi_m^2$ и $r_1, \ldots, r_n$ знакоопределенный интеграл, что доказывает устойчивость модельной системы (2.1).

Пусть все B_α одного знака. Из интегралов (2.3) составим функцию

$$V(\mathbf{r}, \xi, \theta) = W^2 + \sum_{\nu=2}^{n} W_\nu^2 + \sum_{s=1}^{m} W_{s0}^2$$

Очевидно, функция V будет определенно-положительной относительно $\xi_1, \ldots, \xi_m, r_1, \ldots, r_n$, если на многообразии

$$W_\nu = 0\ (\nu = 2, \ldots, n),\ W_{s0} = 0\ (s = 1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

имеем $W \neq 0$. На (2.4) функция W имеет вид

$$W_* = B_1^{-2}\prod_{j=1}^{\mu} B_j(\Sigma + 4\Pi\cos\theta)\, r_1^2;\quad \Sigma = \sum_{\alpha=1}^{\mu} A_\alpha B_\alpha,\quad \Pi = \prod_{j=1}^{\mu} |B_j|^{p_j/2}$$

и не обращается в нуль, если

$$|\Sigma| > 4\Pi \tag{2.5}$$

Таким образом, если все B_α одного знака, то при выполнении условия (2.5) V — функция Ляпунова для (2.3), удовлетворяющая теореме об устойчивости.

Пусть теперь в (2.5) знак неравенства меняется на противоположный и все B_α одного знака. Тогда модельная система имеет растущее решение в виде луча

$$r_\alpha = \gamma_\alpha r,\ r_\beta = 0,\ \xi_s = 0,\ r^{\cdot} = \gamma r^2,\ \theta = \theta_0;\ \gamma,\ \gamma_\alpha > 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, \mu;\ \beta = \mu + 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, m)$$

Действительно, подставляя это решение в (2.2), получим

$$\mathbf{r}^{\cdot} = 2r^2 \left(\frac{B_\alpha}{\gamma_\alpha} \prod_{j=1}^{\mu} \gamma_j^{p_j/2}\right) \sin\theta, \quad \theta^{\cdot} = \left[\sum_{\alpha=1}^{\mu} A_\alpha \gamma_\alpha + 4B_1 \prod_{j=1}^{\mu} \gamma_j^{p_j/2} \cos\theta\right] r$$

откуда

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = B_2/B_1, \ldots, \gamma_\mu = B_\mu/B_1;\ 4\,|\cos\theta_0|\,\Pi = |\Sigma|,\ B_1 \sin\theta_0 > 0$$

Следовательно, в этом случае модельная система неустойчива. Неустойчивость полной системы доказывается так же, как и в [9].

Теорема 1. Если $B_\alpha \neq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, \mu)$, то для устойчивости модельной системы (2.1) необходимо и достаточно выполнение одного из условий: а) существует пара коэффициентов B_j, B_k противоположного знака, б) все коэффициенты B_α одного знака и выполнено условие (2.5).

Если же все B_α одного знака и знак в неравенстве (2.5) меняется на противоположный, то нулевое решение исходной системы неустойчиво по Ляпунову.

3. Обратимость механических систем. Гамильтонова система является важным примером механической системы, обратимой в смысле Биркгофа [1]. Ниже рассмотрим примеры механических систем с автоморфизмом N.

1°. *Механическая система под действием позиционных сил.* Голономная механическая система с n степенями свободы, стесненная стационарными геометрическими связями и подверженная действию позиционных сил, описывается уравнениями:

$$\frac{\partial}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s\,(s = 1, \ldots, n), \quad 2T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \tag{3.1}$$

где T — кинетическая энергия, а обобщенные силы Q_s зависят только от координат $\mathbf{q}$. Система (3.1) переходит в себя при линейной постановке M^*: $t \to -t$, $\mathbf{q} \to \mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot} \to -\mathbf{q}^{\cdot}$. В окрестности положения равновесия при чисто мнимых корнях характеристического уравнения система уравнений возмущенного движения обладает линейным автоморфизмом N $(m = 0)$. Соответствующая матрица $\mathbf{P}$ линейного преобразования получена в [9].

2°. *Неголономная система Чаплыгина.* В этом случае уравнения движения также можно взять в виде (3.1) [10], только здесь обобщенные силы (при отсутствии диссипации) имеют вид

$$Q_s = Q_s^{\circ}(\mathbf{q}) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{sij}(\mathbf{q})\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

Система также имеет линейный автоморфизм M^*, а так как дополнительные силы квадратичны по скоростям, то матрица линейного преобразования $\mathbf{P}$ такая же, как и в [9].

3°. *Неголономная система при отсутствии диссипативных сил.* Уравнения движения неголономной системы можно взять [11] в форме Воронца

$$\frac{\partial}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_r^{\cdot}} = \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_r} + \sum_{\varkappa=l+1}^{n}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\varkappa}b_{\varkappa r}(\mathbf{q}) + \sum_{\varkappa=l+1}^{n}\theta_\varkappa\sum_{s=1}^{l}\nu_{\varkappa rs}q_s^{\cdot} \quad (r=1,\ldots,l)$$

$$2\Theta = \sum_{r,s=1}^{l}\tau_{rs}(\mathbf{q})\,q_r^{\cdot}q_s^{\cdot}, \quad \theta_\varkappa = \sum_{p=1}^{l}\theta_{\varkappa p}(\mathbf{q})\,q_p^{\cdot} \tag{3.2}$$

$$\nu_{\varkappa rs} = \frac{\partial b_{\varkappa r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\varkappa s}}{\partial q_r} - \sum_{\varkappa'=l+1}^{n}\left(b_{\varkappa' s}\frac{\partial b_{\varkappa r}}{\partial q_{\varkappa'}} - b_{\varkappa' r}\frac{\partial b_{\varkappa s}}{\partial q_{\varkappa'}}\right)$$

(U — силовая функция), а уравнения связей представить в виде

$$q_\varkappa^{\cdot} = \sum_{r=1}^{l} b_{\varkappa r}(\mathbf{q})\,q_r^{\cdot} \quad (\varkappa = l+1,\ldots,n) \tag{3.3}$$

Можно видеть, что система (3.2), (3.3) также допускает линейный автоморфизм M^*. В окрестности исследуемого положения равновесия

$$q_r = q_{r0},\ q_r^{\cdot} = 0\ (r=1,\ \ldots,\ l),\ q_\varkappa = q_{\varkappa 0}\ (\varkappa = l+1,\ \ldots,\ n)$$

уравнения возмущенного движения имеют вид [11]

$$\sum_{s=1}^{l} a_{rs}x_s^{\cdot\cdot} + \sum_{s=1}^{l}(c_{rs}-e_{rs})\,x_s + \sum_{\varkappa=l+1}^{n} p_{r\varkappa}x_\varkappa = X_r \tag{3.4}$$

$$x_\varkappa^{\cdot} = X_\varkappa \quad (r=1,\ \ldots,\ l;\ \varkappa = l+1,\ \ldots,\ n)$$

(a_{rs}, c_{rs}, e_{rs}, $p_{r\varkappa}$ — постоянные, разложения функций X содержат члены не ниже второго порядка от $x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_l^{\cdot}$), если в возмущенном движении положить

$$q_r = q_{r0} + x_r\,(r=1,\ldots,l); \quad q_\varkappa = q_{\varkappa 0} + x_\varkappa + \sum_{r=1}^{l} b_{\varkappa r}(\mathbf{q}_0)\,x_r \quad (\varkappa = l+1,\ldots,n) \tag{3.5}$$

При этом функции $X_\varkappa$ вычисляются по формулам

$$X_\varkappa(x_1,\ldots,x_n,x_1^{\cdot},\ldots,x_l^{\cdot}) = \sum_{r=1}^{l}[b_{\varkappa r}(\mathbf{q}) - b_{\varkappa r}(\mathbf{q}_0)]\,|_{(3.5)}\,x_r^{\cdot} \tag{3.6}$$

Характеристическое уравнение системы (3.4) имеет по крайней мере, $n-l$ нулевых корней, причем, $n-l$ нулевым корням отвечает группа уравнений по $x_\varkappa$. В линейном приближении эта группа уравнений приведена к виду (1.2), а линейная часть системы (3.4) не меняется при замене $t \to -t$, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{\cdot} \to -\mathbf{x}^{\cdot}$. Следовательно, когда число нулевых корней равно числу неголономных связей, а остальные корни чисто мнимые имеет место автоморфизм N.

Теорема 2. При отсутствии диссипативных сил положение равновесия неголономной системы формально устойчиво, если число нулевых корней характеристического уравнения при прочих чисто мнимых корнях $\pm i\omega_s$ равно числу неголономных связей, а числа ω_s линейно независимы над рациональными числами.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 существует l однопараметрических семейств периодических движений, примыкающих к рассматриваемому положению равновесия.

Этот вывод следует из свойства 3° разд. 1.

Система (3.2), (3.3) допускает интеграл энергии $\Theta - U = h$ — const. Если теперь уравнения (3.4) приведены к виду (1.5), то функция $\Theta - U$ приводится к виду

$$\Theta - U = \sum_{j=1}^{n-l} \alpha_j \xi_j + \sum_{k=1}^{l} \beta_k \rho_k + \ldots$$

где α_j, β_k — некоторые постоянные. Поэтому система уравнений

$$\xi_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-l)$$

$$\sum_{j=1}^{n-l} C_{sj}\xi_j + \sum_{j=1}^{l} A_{sj}\rho_j + \sum_{j,k=1}^{n-l} D_{sjk}\xi_i\xi_k + \ldots = \omega_s(a-1) \quad (s = 1, \ldots, l)$$

$$\sum_{j=1}^{n-l} \alpha_j\xi_j + \sum_{k=1}^{l} \beta_k\rho_k + \ldots = h$$

имеет единственное, зависящее от h решение, если

$$\det \begin{Vmatrix} \mathrm{A} & \Omega \\ \beta & 0 \end{Vmatrix} \neq 0; \quad \Omega = \mathrm{col}(\omega_1, \ldots, \omega_l), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l) \tag{3.7}$$

Поэтому из свойства 4° разд. 1 следует

Теорема 4. В условиях теоремы 2 в окрестности рассматриваемого положения равновесия существует однопараметрическое (h — параметр) семейство условно-периодических движений с набором частот ($\omega_1 a(h), \ldots$ $\ldots, \omega_l a(h)$), примыкающее к этому равновесию, если дополнительно выполнены условия (1.7) и (3.7).

Замечание. Если в уравнениях (3.4) все постоянные $e_{rs} = 0$, то числа β_s совпадают с ω_s.

Интересен вопрос об обратимости механической системы в зависимости от структуры действующих сил. Понятно, что диссипативные силы приводят к необратимости системы. В общем случае система под действием позиционных и гироскопических сил также необратима. Это видно уже на примере механической системы с двумя степенями свободы.

Пример 2. Система

$$q_1^{\cdot\cdot} = \alpha q_1 + \gamma q_2^{\cdot} + \varepsilon q_2, \quad q_2^{\cdot\cdot} = \beta q_2 - \gamma q_1^{\cdot} - \varepsilon q_1 \tag{3.8}$$

(α, β, γ, ε — постоянные) при $\gamma = 0$ гироскопически не связана и обратима: $t \to -t$, $q \to q$, $q^{\cdot} \to -q^{\cdot}$, а при $\varepsilon = 0$ она находится только под действием потенциальных и гироскопических сил и обратима: $t \to -t$, $q_1 \to q_1$, $q_1^{\cdot} \to -q_1^{\cdot}$, $q_2 \to -q_2$, $q_2^{\cdot} \to q_2^{\cdot}$. В общем случае, когда $\gamma\varepsilon \neq 0$, характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (\gamma^2 - \alpha - \beta)\lambda^2 + 2\gamma\varepsilon\lambda + \varepsilon^2 + \alpha\beta = 0$$

не имеет вместе с корнем λ корня $-\lambda$, и система необратима.

4°. *Однородный эллипсоид на шероховатой плоскости.* Обратимая система N возникает не только при исследовании неголономной системы в окрестности положения равновесия. Например, в указанной задаче при изучении движений, близких к стационарным вращениям вокруг вертикали, уравнения удобно выбрать в форме Аппеля. Сохраняя обозначения [4], имеем

$$\begin{gathered}[A + m(y^2 + z^2)]\,p^{\cdot} - mxyq^{\cdot} - mxzr^{\cdot} = \\ = (B - C)\,qr + m(x^{\cdot} - yr + zq)\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_\mu\rangle - mp\langle \mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}_\mu^{\cdot}\rangle + \\ + mga^2(c^2 - b^2)\,\Delta^{-1}yz\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$x^{\cdot} = yr - zq + \frac{a^2 - c^2}{a^2c^2}(x^2 - a^2)\,zq + \frac{b^2 - a^2}{b^2a^2}(x^2 - a^2)\,yr + \frac{c^2 - b^2}{c^2b^2}\,xyzp$$

$$(pqr, \; xyz, \; ABC, \; abc)$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r), \quad \mathbf{r}_\mu = (x, y, z), \quad \mathbf{r}_\mu^{\cdot} = (x^{\cdot}, y^{\cdot}, z^{\cdot})$$

а координаты связаны соотношением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Эта система уравнений допускает частное решение

$$p = q = 0, \ r = \omega = \text{const}, \ x = y = 0, \ z = -c$$

которое отвечает вращению эллипсоида вокруг вертикали и представляет собой однопараметрическое (ω — параметр) семейство.

Анализ системы показывает наличие линейного автоморфизма M: $t \to -t$, $(x, p, z, r) \to (x, p, z, r)$, $(y, q) \to (-y, -q)$. Уравнения возмущенного движения выводятся из (3.9) заменой r на $r + \omega$, а z на $z - c$. Следовательно, эти уравнения имеют указанный автоморфизм M и являются системой вида (1.3). Здесь $n = 2$, $l = 2$, $n_1 = l_1 = 2$, а матрицы B_2 и C_2 имеют вид

$$B_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \frac{a^2}{b^2}\omega & \frac{a^2}{c} \end{Vmatrix}, \qquad C_2 = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ -\frac{b^2}{c}\omega & -\frac{b^2}{c} \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \omega \frac{6c^2 - 5a^2 - b^2}{b^2 + 6c^2}, \qquad \alpha_{12} = 5\frac{c\omega^2(b^2 - a^2) + g(b^2 - c)}{b^2(b^2 + 6c^2)}$$

$$\beta_{11} = \omega \frac{a^2 + 5b^2 - 6c^2}{a^2 + 6c^2}, \qquad \beta_{12} = 5\frac{c\omega^2(b^2 - a^2) + g(c^2 - a^2)}{a^2(a^2 + 6c^2)}$$

Поэтому в критическом случае двух нулевых и двух пар чисто мнимых корней справедливы все выводы разд. 1, в частности существует два семейства периодических движений, близких к стационарным вращениям. Отметим, что устойчивость при резонансах низших порядков в этой задаче исследовалась в [12, 13].

5°. *Тяжелое твердое тело с неподвижной точкой.* Уравнения Эйлера—Пуассона данной задачи ([14], с. 177]

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = P(\gamma_2 z_c - \gamma_3 y_c), \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3$$
$$(pqr, \ \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \ ABC, \ x_c y_c z_c)$$

представляет собой обратимую систему с линейным автоморфизмом:

$$t \to -t, \ (p, q, p) \to (-p, -q, -r), \ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \to (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

6°. *Неограниченная задача трех тел.* Уравнения Рауса — Ляпунова этой классической задачи небесной механики имеют вид [(15], с. 397)

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) + f(m_0 + m_1)F(r_1) + fm_2[F(r_2)\cos\psi + F(\Delta)\cos\varphi_1] = 0$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}(r_1^2\omega_3) + r_1\omega_2\omega_3 + fm_2[F(r_2)\sin\psi - F(\Delta)\sin\varphi_1] = 0$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}(r_1^2\omega_2) - r_1\omega_1\omega_3 = 0$$

$$\Delta^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\psi, \quad \sin\varphi_i = \frac{r_i}{\Delta}\sin\psi \quad (i = 1, 2)$$

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\psi + \omega_2\sin\psi, \quad \omega_2^* = -\omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi, \quad \omega_3^* = \omega_3 + \dot\psi$$

(вторая группа дифференциальных уравнений получается из приведенной при замене $(r_1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi_1, \psi)$ на $(r_2, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*, -\varphi_2, -\psi)$, а (m_1, m_2) на (m_2, m_1); $F(r)$ — некоторая функция взаимного расстояния r). Система обратима с линейным автоморфизмом $t \to -t$, $(r_1, r_2, \psi) \to (r_1, r_2, \psi)$, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \to (-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3)$.

4. Пример. В качестве еще одного примера сложной многопараметрической механической системы, приводящей к исследованию системы с линейным автоморфизмом N, можно привести задачу об относительном равновесии и регулярной прецессии геостационарного спутника [5, 6]. Однако эта задача — предмет отдельного рассмотрения. Здесь же ограничимся рассмотрением иллюстративного примера.

Для модели упругого стержня под действием следящей силы [9] имеем систему под действием позиционных сил. Проанализирована [9] линейная задача, получено преобразование к нормальной форме и исследованы резонансы низших порядков. Сохраняя обозначения [9], рассмотрим нерезонансный случай. В этом случае нелинейная нормализация выполняется в комплексно-сопряженных переменных z, $\bar{z}$, которые связаны с углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от положения равновесия и их скоростями соотношениями

$$\varphi_1 = \frac{b_{12}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1}{\omega_1} - \frac{z_2 + \bar{z}_2}{\omega_2}\right] + \ldots$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[\frac{b_{22} + \omega_2^2}{\omega_1}(z_1 + \bar{z}_1) - \frac{b_{22} + \omega_1^2}{\omega_2}(z_2 + \bar{z}_2)\right] + \ldots$$

$$\varphi_1^{\cdot} = \frac{b_{12} i}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[(z_1 - \bar{z}_1) - (z_2 - \bar{z}_2)\right] + \ldots$$

$$\varphi_2^{\cdot} = \frac{i}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[(b_{22} + \omega_2^2)(z_1 - \bar{z}_1) - (b_{22} + \omega_1^2)(z_2 - \bar{z}_2)\right] + \ldots$$

Уравнения для радиусов $r_1 = z_1\bar{z}_1$, $r_2 = z_2\bar{z}_2$ и полярных углов $\theta_1 = \arg z_1$, $\theta_2 = \arg z_2$ имеют вид

$$r_1^{\cdot} = 0, \quad r_2^{\cdot} = 0, \quad \theta_1^{\cdot} = \omega_1 + \varepsilon_1(r_1, r_2), \quad \theta_2^{\cdot} = \omega_2 + \varepsilon_2(r_1, r_2)$$

Поэтому существуют два однопараметрических семейства периодических движений, примыкающие к положению равновесия. Первое семейство определяется соотношениями

$$\varphi_1 = \frac{b_{12}\sqrt{r_{10}}}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cos\left[\omega_1 + \varepsilon_1(r_{10}, 0)\right] t + \ldots$$

$$\varphi_2 = \frac{(b_{22} + \omega_2^2)\sqrt{r_{10}}}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cos\left[\omega_1 + \varepsilon_1(r_{10}, 0)\right] t + \ldots$$

а второе соответствует замене ω_1 на ω_2, ω_2 на ω_1, $\varepsilon_1(r_{10}, 0)$ на $\varepsilon_2(0, r_{20})$, r_{10} на r_{20} (r_{10}, r_{20} — начальные значения для r_1, r_2). Эти колебания близки к колебаниям линейной системы, причем

$$\varphi_1 = k\varphi_2 + \ldots; \quad k = \frac{b_{12}}{b_{22} + \omega_2^2}, \quad \frac{b_{12}}{b_{22} + \omega_1^2} < 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. 320 с.
2. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Ann. Math. Styd. 1973. № 77. 199 p.
3. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
4. *Маркеев А. П.* К геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера: Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1982. С. 123—131.
5. *Куницын А. Л., Мырзабеков Т.* Регулярная прецессия стационарного орбитального корабля // Тр. 7-х чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. Секц. механика космич. полета. М.: ИИЕТ АН СССР, 1974. С. 90—96.
6. *Куницын А. Л., Мырзабеков Т.* Устойчивость относительного равновесия тела на возмущенной круговой орбите // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 727—730.
7. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 119—262; 1972. Т. 26. С. 199—239.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
9. *Тхай В. Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40—48.
10. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 112 с.
11. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
12. *Поликша В. В.* Об устойчивости вращения эллипсоида на шероховатой плоскости в нелинейной постановке // Устойчивость и колебания нелинейных механических систем. М.: МАИ, 1987. С. 18—21.
13. *Поликша. В. В.* Исследование устойчивости стационарного вращения эллипсоида на шероховатой плоскости в случае резонанса второго порядка // Аналитические и численные методы исследования механических систем. М.: МАИ, 1989.
14. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Часть 2. М.: Наука, 1972.
15. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.

Химки, Московская обл.

Поступила в редакцию
2.IV.1990