Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36 : 532.5

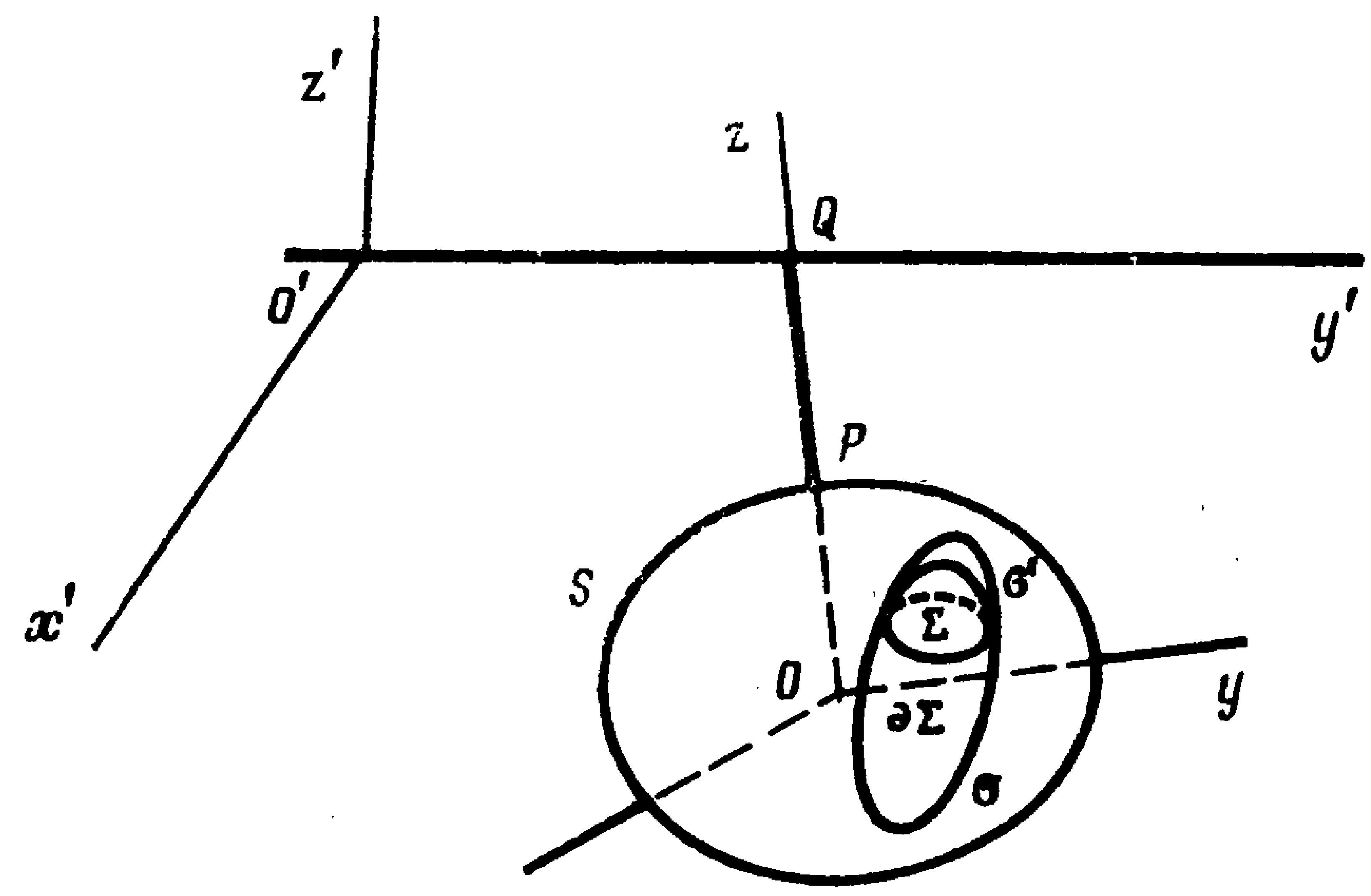
П. Каподанно

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ЖИДКОСТЬ

Рассматривается подвешенное на горизонтальном стержне твердое тело с тремя попарно ортогональными осями симметрии, помещенное в идеальную несжимаемую жидкость, совершающую безвихревое движение. Тело имеет полость, содержащую жидкость, накрытую упругой мембраной. Уравнения движения системы при определенных условиях допускают равномерные поступательные движения всей системы как одного тела. Даны условия устойчивости таких движений.

1. Постановка задачи. Пусть в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ, покоящейся на бесконечности, движется твердое тело S с тремя попарно ортогональными осями симметрии. Тело имеет полость с идеальной жидкостью плотности ρ', накрытой упругой мембраной Σ плотности ρ'', контур которой $\partial\Sigma$ закреплен на стенке полости. Система «внешняя жидкость — тело — внутренняя жидкость — мембрана» находится в однородном поле силы тяжести с ускорением g.

Введем три ортогональные системы координат: инерциальную $O'x'y'z'$ с единичными векторами $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ и осью z', направленной по восходящей



вертикали, подвижную $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, оси которой совпадают с осями симметрии тела S, и систему ΩXYZ, оси которой параллельны осям x, y, z, а плоскость ΩXY содержит площадку Σ, занимаемую мембраной в недеформированном состоянии. Будем считать, что тело подвешено к горизонтальной рейке, направленной по оси y', при помощи твердой штанги PQ пренебрежимо малой массы, расположенной вдоль оси z, при этом $OP = a$, $PQ = L$. При движении конца Q штанги по оси подвеса трением и действием на штангу внешней жидкости будем пренебрегать (фигура).

Пусть τ — часть полости, занимаемая жидкостью, а σ — часть ее стенки, смоченная жидкостью. Будем полагать, что мембрана постоянно находится в контакте с жидкостью, а часть полости, заключенная между мембраной Σ и остальной частью σ' стенки, заполнена воздухом с постоянным давлением p_0. Поперечные перемещения точек мембраны обозначим $w(X, Y, t)$.

Пусть μ_s, μ_f, μ_m — соответственно масса тела, внутренней жидкости и мембраны, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 и x_{12}, y_{12}, z_{12} — координаты центров тяжести G_1, G_2, G_{12} внутренней жидкости, мембраны и системы «внутренняя жидкость — мембрана». Наконец, через A, B, C обозначим центральные моменты инерции тела S.

2. Уравнения движения. Будем полагать, что движение внешней жидкости относительно системы координат $O'x'y'z'$ безвихревое. Тогда существует потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, зависящей от координат x, y, z частицы жидкости. В силу условия скольжения жидкости по поверхности тела S потенциал можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3} (v_i\varphi_i + \omega_i\varphi_{3+i})$$

где v_1, v_2, v_3 и ω_1, ω_2, ω_3 — проекции на оси x, y, z векторов поступательной скорости $\mathbf{v}$ (скорость точки O) и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела S, а φ_i ($i = 1, \ldots, 6$) — функции только x, y, z, гармонические в области, занимаемой внешней жидкостью; эти функции являются решениями известных задач Неймана [1].

Кинетическая энергия внешней жидкости конечна и дается формулой

$$T_f' = -\frac{1}{2}\rho \int\limits_{\partial S} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

где $\partial\varphi/\partial n$ — производная от φ по направлению внешней нормали к поверхности ∂S тела S. При помощи T_f' можно вычислить усилия, оказываемые жидкостью на тело S.

В рассматриваемом случае, когда тело S имеет три попарно ортогональные оси симметрии, для кинетической энергии T системы «тело — внешняя жидкость» получаем выражение [1]

$$2T = (\mu_s + \lambda_1) v_1^2 + (\mu_s + \lambda_2) v_2^2 + (\mu_s + \lambda_3) v_3^2 + (A + \lambda_4)\omega_1^2 +$$
$$+ (B + \lambda_5)\omega_2^2 + (C + \lambda_6)\omega_3^2, \quad \lambda_i = -\rho \int\limits_{\partial S} \varphi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, d\sigma \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

Обозначим через $(\mathbf{R}_s, \mathbf{M}_s)$, $(\mathbf{R}_m, \mathbf{M}_m)$, $(\mathbf{R}_f, \mathbf{M}_f)$ главный вектор и главный момент относительно точки O сил давления на тело S воздуха между Σ и σ', сил натяжения мембраны, распределенных по контуру ∂S, и сил давления внутренней жидкости, а через $\mathbf{R}$ — реакцию на штангу в точке Q оси подвеса y', нормальную к y'. Тогда уравнения движения тела S можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{D}{Dt}(\mathrm{grad}_v T) = -\mu_s g\mathbf{k}' + \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_m + \mathbf{R}_f + \mathbf{R} \\ \frac{D}{Dt}(\mathrm{grad}_w T) + \mathbf{v} \times \mathrm{grad}_v T = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_f + \mathbf{r}_Q \times \mathbf{R}\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}_Q$ — радиус-вектор точки Q относительно точки O.

Уравнения движения системы «внутренняя жидкость — мембрана» имеют вид

$$\begin{gathered}(\mu_f + \mu_m)\frac{D^2\mathbf{r}_{12}'}{Dt^2} = -(\mu_s + \mu_m) g\mathbf{k}' - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_m - \mathbf{R}_f \\ \frac{D}{Dt}[\mathbf{K}_0 + \Theta\cdot\boldsymbol{\omega} + (\mu_f + \mu_m)\mathbf{r}_{12}' \times \mathbf{v}] + \mathbf{v} \times (\mu_f + \mu_m)\frac{D\mathbf{r}_{12}'}{Dt} = \\ = -\mathbf{r}_{12}' \times (\mu_f + \mu_m) g\mathbf{k}' - \mathbf{M}_s - \mathbf{M}_m - \mathbf{M}_f\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{r}_{12}'$ — радиус-вектор точки G_{12} относительно точки O', $\mathbf{K}_0$ — кинетический момент относительно точки O системы «внутренняя жидкость — мембрана» в ее движении относительно системы координат $Oxyz$, а Θ_0 — ее тензор инерции относительно точки O.

Почленно складывая соответственные уравнения (2.1) и (2.2), обозначая символом d/dt дифференцирование по времени в системе координат $Oxyz$ и используя теорему Кориолиса, получим:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{grad}_v T) + \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{grad}_v T + (\mu_f + \mu_m)\left[\frac{d^2\mathbf{r}_{12}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \right.$$
$$\left. + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{12} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt}\right] = -(\mu_s + \mu_f + \mu_m) g\mathbf{k}' + \mathbf{R}' \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{grad}_\omega T + \mathbf{K}_0 + \Theta_0 \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mu_f + \mu_m)\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}] +$$
$$+ \boldsymbol{\omega} \times [\mathrm{grad}_\omega T + \mathbf{K}_0 + \Theta_0 \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mu_f + \mu_m)\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}] +$$
$$+ \mathbf{v} \times \left[\mathrm{grad}_v T + (\mu_f + \mu_m)\left(\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12}\right)\right] =$$
$$= -\mathbf{r}_{12} \times (\mu_f + \mu_m)\mathbf{k}' + \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{R} \quad (2.4)$$

Запишем уравнение поперечных колебаний мембраны

$$\rho'' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T''\Delta w - p' - p_0 - \rho'' g\zeta_3 - \rho''[\dot{v}_3 + \dot{\omega}_1 y_0 - \dot{\omega}_2 x_0 + \omega_1 v_2 -$$
$$- \omega_2 v_1 + \omega_3(\omega_1 x_0 + \omega_2 y_0) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) z_0 + \dot{\omega}_1 Y - \dot{\omega}_2 X +$$
$$+ \omega_3(\omega_1 X + \omega_2 Y) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) w] \quad (2.5)$$

Здесь p' — давление жидкости, T'' — натяжение мембраны, ζ_1, ζ_2, ζ_3 — косинусы углов, образуемых осью z', с осями x, y, z, x_0, y_0, z_0 — координаты точки Ω, а точки означают дифференцирование по времени.

Обозначая через $\mathbf{u}$ скорость частицы жидкости относительно осей координат $Oxyz$, а через $\mathbf{r}$ ее радиус-вектор относительно точки O, имеем уравнения движения жидкости с граничными условиями

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} =$$
$$= -g\mathbf{k}' - \frac{1}{\rho^1}\mathrm{grad}\, p', \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \tau$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \sigma$$
$$u_1 \frac{\partial w}{\partial X} + u_2 \frac{\partial w}{\partial Y} - u_3 + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области τ нормали к поверхности, u_1, u_2, u_3 — проекции на оси x, y, z вектора $\mathbf{u}$; во втором условии отброшены члены выше первого порядка относительно частных производных от функции w.

Предположение о закрепленности края мембраны на стенке полости и постоянство объема жидкости приводят к условиям

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Sigma; \quad \int_{\Sigma_0} w\, d\sigma = 0$$

Присоединим к полученным выше уравнениям кинематические уравнения Пуассона

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' = 0, \qquad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = 0$$

и условие ортогональности реакции $\mathbf{R}$ к оси y':

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{j}' = 0$$

Наконец, дифференцируя соотношение $\mathbf{r}_0' = O'O\mathbf{j}' - (a + L)\mathbf{k}'$, где $\mathbf{r}_0'$ — радиус-вектор точки O относительно O' и обозначая через η_1, η_2, η_3

проекции на оси x, y, z вектора $\mathbf{j}'$, имеем уравнения

$$v_1 = \frac{dO'O}{dt}\eta_1 - (a+L)\omega_2, \quad v_2 = \frac{dO'O}{dt}\eta_2 + (a+L)\omega_1, \quad v_3 = \frac{dO'O}{dt}\eta_3$$

3. Первые интегралы. Замечая, что векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{k}'$ перпендикулярны к оси y', получаем из уравнения (2.3) первый интеграл

$$\left[\operatorname{grad}_v T + (\mu_f + \mu_m)\left(\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12}\right)\right] \cdot \mathbf{j}' = \text{const} \tag{3.1}$$

Имеет место также интеграл энергии для системы «внешняя жидкость — тело — внутренняя жидкость — мембрана», который, обозначая через T_f и T_m кинетические энергии внутренней жидкости и мембраны, запишем в виде

$$T + T_f + T_m = -\mu_s g \mathbf{r}_0' \cdot \mathbf{k}' - (\mu_f + \mu_m) r_{12}' k' - \frac{T''}{2}\int\limits_{\Sigma_0} (w_X{}^2 + w_Y{}^2)\, d\sigma + \text{const} \tag{3.2}$$

4. Частное решение и преобразование первых интегралов. Найдем условия существования равномерного поступательного движения в направлении оси y' с заданной скоростью v, в котором оси x, y, z параллельны осям x', y', z', штанга PQ направлена по восходящей вертикали, жидкость и мембрана покоятся относительно тела, при этом мембрана находится в недеформированном состоянии Σ_0. В таком движении имеем

$$\eta_1 = 0, \ \eta_2 = 1, \ \eta_3 = 0, \ \zeta_1 = \zeta_2 = 0, \ \zeta_3 = 1 \tag{4.1}$$

$$v_1 = 0, \ v_2 = v, \ v_3 = 0, \ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \ u \equiv 0, \ w \equiv 0$$

Внося эти значения в уравнения движения, приходим к заключению, что $\mathbf{R} = (\mu_s + \mu_f + \mu_m) g\mathbf{k}'$, вектор $\mathbf{r}_{12}$ параллелен оси z, $p' = p_0 + \rho' g + \rho' g (z - z_0)$.

Таким образом, для существования искомого движения необходимо, чтобы центр тяжести G_{12} системы «внутренняя жидкость — мембрана», когда последняя находится в недеформированном состоянии Σ_0, лежал на оси z. Это условие выполняется, если для полости и площадки Σ_0 плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии.

Для исследования устойчивости указанного движения преобразуем первые интегралы, вводя в них скорости по отношению к осям, движущимся равномерно и поступательно со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{j}'$.

Обозначим через u_1, u_2, u_3 проекции на оси x, y, z скорости по отношению к системе координат $O'x'y'z'$ частицы жидкости или мембраны и положим

$$v_1 = \bar{v}_1 + v\eta_1, \ v_2 = \bar{v}_2 + v\eta_2, \ v_3 = \bar{v}_3 + v\eta_3,$$

$$u_1 = \bar{u}_1 + v\eta_1, \ u_2 = \bar{u}_2 + v\eta_2, \ u_3 = \bar{u}_3 + v\eta_3,$$

где v_i, u_i ($i = 1, 2, 3$) — значения соответствующих переменных в возмущенном движении. Выражая кинетические энергии системы «внешняя жидкость — тело», внутренней жидкости и мембраны, представим первые интегралы в виде

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \int\limits_\tau F_1 \rho' \, d\tau + \int\limits_\Sigma F_1 \rho'' \, d\sigma = \text{const} \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{2}[\Phi_3 + (A + \lambda_4)\omega_1{}^2 + (B + \lambda_5)\omega_2{}^2 + (C + \lambda_6)\omega_3{}^2 + 2v\Phi_1 + v^2\Phi_2] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\tau F_2 \rho' \, d\tau + v\int\limits_\tau F_1 \rho'' \, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma F_2 \rho'' \, d\sigma + v\int\limits_\Sigma F_1 \rho'' \, d\sigma -$$

$$-(\mu_s+\mu_f+\mu_m)\,g\,(a+L)\,\zeta_3+\int_\tau F_3\rho'\,d\tau+\int_\Sigma F_3\rho''\,d\sigma+$$

$$+\frac{T''}{2}\int_{\Sigma_0}(w_X{}^2+w_Y{}^2)\,d\sigma=\mathrm{const}$$

$$\Phi_1=\sum_{i=1}^3(\mu_s+\lambda_i)\,\bar v_i\eta_i,\quad \Phi_2=\sum_{i=1}^3\lambda_i\eta_i{}^2,\quad \Phi_3=\sum_{i=1}^3(\mu_s+\lambda_i)\,\bar v_i{}^2 \qquad (4.3)$$

$$F_1=\sum_{i=1}^3\bar u_i\eta_i,\quad F_2=\sum_{i=1}^3\bar u_i{}^2,\quad F_3=x\zeta_1+y\zeta_2+z\zeta_3$$

5. **Задача устойчивости.** Умножая интеграл (4.2) на v и вычитая его из (4.3), получим первый интеграл

$$E+W=\mathrm{const} \qquad (5.1)$$

$$2E=\Phi_3+(A+\lambda_4)\,\omega_1{}^2+(B+\lambda_5)\,\omega_2{}^2+(C+\lambda_6)\,\omega_3{}^2+\int_\tau F_2\rho'\,d\tau+\int_\Sigma F_2\rho''\,d\sigma$$

$$2W=v^2\,[(\lambda_2-\lambda_1)\,\eta_1{}^2+(\lambda_2-\lambda_3)\,\eta_3{}^2]-2\,(\mu_s+\mu_f+\mu_m)\,g\,(a+L)\,\zeta_3+$$

$$+2g\int_\tau F_3\rho'\,d\tau+2g\int_\Sigma F_3\rho''\,d\sigma+T''\int_{\Sigma_0}(w_X{}^2+w_Y{}^2)\,d\sigma_0$$

который будет использован при изучении устойчивости движения (4.1).

Выражение E представляет собой определенно положительный функционал, зависящий только от скоростей, а W — функционал, зависящий только от положения тела S и конфигурации жидкости и мембраны. Это дает возможность использовать теорему В. В. Румянцева об устойчивости [2].

Обозначим через W_0 значение W в невозмущенном движении и исследуем разность $W-W_0$. Рассмотрим сначала разность

$$\int_\tau(x\zeta_1+y\zeta_2+z\zeta_3)\,\rho'\,d\tau-\int_{\tau_0}z\rho'\,d\tau,$$

где τ_0 — область, занимаемая жидкостью в невозмущенном движении. Запишем ее в виде

$$\int_{\tau-\tau_0}[x\zeta_1+y\zeta_2+(z_0+Z)\,\zeta_3]\,\rho'\,d\tau+\int_{\tau_0}[x\zeta_1+y\zeta_2+z\,(\zeta_3-1)]\,\rho'\,d\tau$$

Первый интеграл вычисляется путем последовательного интегрирования. Замечая, что $\zeta_3=1-{}^1/_2\,(\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2)+\ldots$ и обозначая через Ξ вектор с проекциями ζ_1, ζ_2, $-{}^1/_2\,(\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2)$ на оси x, y, z, получим для рассматриваемой разности выражение

$$\int_{\Sigma_0}\left[(x\zeta_1+y\zeta_2)\,w+\frac{w^2}{2}\right]\rho''\,d\sigma_0+\mu_f\mathbf{r}_{10}\cdot\Xi+\ldots$$

Рассмотрим теперь разность

$$\int_\Sigma(x\zeta_1+y\zeta_2+z\zeta_3)\,\rho''\,d\sigma-\int_{\Sigma_0}z\rho''\,d\sigma_0,$$

которую представим в виде

$$\frac{1}{2}\,z_0\int_{\Sigma_0}(w_X{}^2+w_Y{}^2)\,\rho''\,d\sigma_0+\mu_m\mathbf{r}_{20}\cdot\Xi+\ldots$$

Поскольку $\mu_f\mathbf{r}_{10}+\mu_m\mathbf{r}_{20}=(\mu_f+\mu_m)\,(\mathbf{r}_{12})_0$, а из условия $\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k}'=0$ следует, что в первом приближении $\zeta_2=-\eta_3$, то получаем, используя переменные η_1, η_3, ζ_1,

$$2(W-W_0)=v^2(\lambda_2-\lambda_1)\eta_1^2+H\eta_3^2+H'\zeta_1^2+2\rho' g\zeta_1\int_{\Sigma_0} xw\,d\sigma_0-$$

$$-2\rho' g\eta_3\int_{\Sigma_0} yw\,d\sigma_0+\rho' g\int_{\Sigma_0} w^2\,d\sigma_0+(T''+\rho' g z_0)\int_{\Sigma}(w_X^2+w_Y^2)\,d\sigma+\ldots$$

$$H=v^2(\lambda_2-\lambda_3)+g\,[(\mu_s+\mu_f+\mu_m)(a+L)-(\mu_f+\mu_m)(z_{12})_0]$$

$$H'=H-v^2(\lambda_2-\lambda_3)$$

где многоточием обозначены члены выше второго порядка малости относительно η_1, η_3, ζ_1, w, w_X, w_Y.

Учитывая неравенства

$$\Big(\int_{\Sigma_0} yw\,d\sigma_0\Big)^2\leqslant I_{x_0}\int_{\Sigma_0} w^2\,d\sigma_0 \qquad \Big(\int_{\Sigma_0} xw\,d\sigma_0\Big)^2\leqslant I_{y_0}\int_{\Sigma_0} w^2\,d\sigma_0.$$

где I_{x_0} и I_{y_0} — моменты инерции относительно осей x и y проекции площадки Σ_0 на плоскость $z=0$, и неравенство

$$\int_{\Sigma_0}(w_X^2+w_Y^2)\,d\sigma_0\geq \nu_0\int_{\Sigma_0} w^2\,d\sigma_0$$

где ν_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\Delta w+\nu w=0 \text{ на } \Sigma_0;\quad w=0 \text{ на } \partial\Sigma_0$$

видно, что квадратичная часть $^1/_2\delta^2 W$ разности $W-W_0$ удовлетворяет неравенству

$$\delta^2 W\geq v^2(\lambda_2-\lambda_1)\eta_1^2+H\Big(\eta_3-\frac{\rho' g}{H}\int_{\Sigma_0} yw\,d\sigma_0\Big)^2+H'\Big(\zeta_1+\frac{\rho' g}{H'}\int_{\Sigma_0} xw\,d\sigma_0\Big)^2+$$

$$+\Big[(T''+\rho'' g z_0)\nu_0+\rho' g\Big(1-\frac{\rho' g I_{x_0}}{H}-\frac{\rho' g I_{y_0}}{H'}\Big)\Big]\int_{\Sigma_0} w^2\,d\sigma_0$$

Координата (z_{12}), конечно, меньше, чем $a+L$, а постоянная H' положительна. С другой стороны, коэффициент при последнем члене положителен, если натяжение T'' достаточно велико. Поэтому в силу теоремы В. В. Румянцева условия: T'' достаточно велико, $\lambda_2>\lambda_1$ и

$$v^2(\lambda_2-\lambda_3)+g\,[(\mu_s+\mu_f+\mu_m)(a+L)-(\mu_f+\mu_m)(z_{12})_0]>0$$

являются достаточными для устойчивости невозмущенного движения (4.1) по отношению к параметрам, определяющих положение и скорости тела S, к норме $\|w\|_{L^2(\Sigma_0)}$, кинетической энергии жидкости и мембраны в их движении относительно тела S.

Отметим, что аналогичные плоские задачи рассмотрены в [3—6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А. Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 946—953.
3. *Capodanno P.* Existence et stabilité des mouvements de translation horizontale rectiligne et uniforme d'un solide cylindrique pesant plongé dans un fluide parfait incompressible en mouvement plan irrotationel et possédant une savité partiellement remplie de liquede pesant // J. Méc. 1977. V. 16. No. 1. P. 149—163.
4. *Capodanno P.* Petites oscillations d'un liquide dans un vase fermé par une membrane élastique // ZAMP. 1988. V. 39. No. 6. P. 826—851.
5. *Capodanno P.* Stability of a particular motion of a profile suspended by an elastic rod // Arch. of Mech. 1988. V. 40. No. 2—3. P. 171—181.
6. *Capodanno P.* Sur les petites oseillations planes d'un liquide dans un recipient fixe fermé par un convercle élastique // J. Méc. Théoriq. et Appl. 1988. V. 7. No. 1. P. 21—33.

Франция

Поступила в редакцию
3.XII.1990