

УДК 531.38

© 1991 г.

В. Н. Рубановский

О ВЕТВЛЕНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА

Исследуется ветвление и устойчивость относительных равновесий спутника-гиростата в случае, когда ось ротора не лежит в главных плоскостях центрального трехосного эллипсоида инерции системы. Результаты представлены в виде бифуркационной диаграммы, на которой распределение степени неустойчивости относительных равновесий подчиняется общим закономерностям теории бифуркаций, при этом в качестве бифуркационного параметра принята величина гиростатического момента ротора.

1. Рассмотрим в центральном ньютоновском поле сил движение твердого тела, с которым неизменно связана ось вращения статически и динамически уравновешенного ротора. Будем полагать, что ротор вращается относительно тела с постоянной угловой скоростью Ω , а центр масс S системы движется по кеплеровой невозмущаемой круговой орбите с орбитальной угловой скоростью ω .

Введем две прямоугольные системы осей координат: орбитальную $Sxyz$, ось z которой направлена по радиус-вектору центра масс спутника, ось x — по касательной к орбите в сторону движения центра масс, ось y — по нормали к плоскости орбиты, неизменно связанную с корпусом спутника $Sx_1x_2x_3$, оси которой направлены по главным центральным осям инерции гиростата.

Для измененной потенциальной энергии действующих на спутник гравитационных сил и сил инерции в орбитальной системе координат, отнесенной к ω^2 , имеем выражение [1]

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (3A_j \gamma_j^2 - A_j \beta_j^2 - 2k_j \beta_j)$$

Здесь $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ — главные центральные моменты инерции спутника-гиростата, $k_j = J\Omega\omega^{-1}e_j$ — проекции на оси x_j ($j = 1, 2, 3$) вектора гиростатического момента гиростата, отнесенные к ω , J — осевой момент инерции ротора, e_j — косинусы углов, образуемых осью ротора, с осями x_j , γ_j и β_j — проекции на оси x_j ортов γ и β радиус-вектора центра масс спутника и нормали к плоскости орбиты; при этом

$$\begin{aligned} \pi_\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, & \pi_\beta &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0 & (1.1) \\ \pi_{\gamma\beta} &= \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0 \end{aligned}$$

Уравнения относительного равновесия спутника-гиростата (относительно орбитальной системы координат) можно записать в виде

$$\frac{\partial W^*}{\partial \gamma_1} = 3[(A_1 - \sigma)\gamma_1 + \lambda\beta_1] = 0, \quad \frac{\partial W^*}{\partial \beta_1} = 3\lambda\gamma_1 + (\nu - A_1)\beta_1 - k_1 = 0 \quad (1.2)$$

$$2W_* = 2W + 6\lambda\pi_{\gamma\beta} + \nu\pi_\beta - 3\sigma\pi_\gamma$$

где λ , σ , ν — неопределенные множители Лагранжа. К уравнениям (1.2) следует присоединить уравнения (1.1); в результате будем иметь систему

девяти уравнений относительно такого же числа неизвестных $\lambda, \sigma, \nu, \gamma_j, \beta_j$.

Зафиксируем значения $\lambda \neq 0, \sigma, \nu$ и разрешим уравнения (1.2) относительно γ_j, β_j :

$$\gamma_1 = \lambda k_1 \Phi_1^{-1}, \quad \beta_1 = (\sigma - A_1) k_1 \Phi_1^{-1} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.3)$$

$$\Phi_1 = 3\lambda^2 + (\sigma - A_1)(\nu - A_1) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Подстановка выражений (1.3) в (1.1) приводит к системе трех линейных уравнений относительно величин k_1^2, k_2^2, k_3^2 , из которой при выполнении условия

$$\lambda A \neq 0, \quad A = (A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)$$

находим

$$k_1^2 = \frac{(A_3 - A_2) L_1 \Phi_1^2}{\lambda^2 A}, \quad L_1 = \lambda^2 + (\sigma - A_2)(\sigma - A_3) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) при помощи (1.4) представим в виде

$$\gamma_1^2 = \frac{(A_3 - A_2) L_1}{A}, \quad \beta_1^2 = \frac{(A_3 - A_2)(\sigma - A_1)^2 L_1}{\lambda^2 A} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.5)$$

Для геометрического представления относительных равновесий (1.5), (1.4) рассмотрим в пространстве параметров λ, σ, ν область D , определяемую неравенствами $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 > 0$. Точкам области D отвечают вещественные значения γ_j, β_j, k_j , вычисляемые по формулам (1.5), (1.4). Область D представляет собой цилиндрическое тело, профиль которого образуют три круга $L_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), аналогичные известным в теории упругости кругам Мора. Из (1.5) следует, что ориентация корпуса гиростата в относительном равновесии не зависит от параметра ν . Каждой точке профиля области D соответствуют восемь положений равновесия, для которых значения (1.3) для γ_j, β_j отвечают восьми различным комбинациям знаков величин k_j ($j = 1, 2, 3$). Точкам, симметричным относительно плоскости $\lambda = 0$, отвечают динамически эквивалентные положения равновесия спутника, различающиеся его поворотом на 180° вокруг вектора β .

2. Далее будем считать, что

$$k_j = k e_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad k = J\Omega\omega^{-1}$$

где $-\infty < k < \infty$ — вещественный параметр.

Рассмотрим задачу об относительном равновесии спутника-гиростата в прямой постановке, когда значения A_j, e_j ($j = 1, 2, 3$) предполагаются заданными и требуется найти все относительные равновесия и исследовать их эволюцию, ветвление и устойчивость при изменении параметра k от $-\infty$ до ∞ .

Будем считать, что

$$(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1) e_1 e_2 e_3 \neq 0 \quad (2.1)$$

и направления осей x_j выбраны так, что $e_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$).

Обозначим через Γ кривую в пространстве переменных $k, \lambda, \sigma, \nu, \gamma_j, \beta_j$ ($j = 1, 2, 3$), определяемую уравнениями (1.1), (1.2) при условии (2.1). Поскольку уравнения (1.1), (1.2) не изменяются при замене $k, \lambda, \sigma, \nu, \gamma_j, \beta_j$ соответственно на: 1) $-k, -\lambda, \sigma, \nu, \gamma_j, -\beta_j$; 2) $k, -\lambda, \sigma, \nu, -\gamma_j, \beta_j$; 3) $-k, \lambda, \sigma, \nu, -\gamma_j, -\beta_j$, то кривая Γ состоит из четырех ветвей $\Gamma_1, \Gamma_2,$

Γ_3, Γ_4 , определяемых соответственно уравнениями вида:

$$\Gamma_1: \lambda = \lambda(k), \quad \sigma = \sigma(k), \quad v = v(k), \quad \gamma = \gamma(k), \quad \beta = \beta(k)$$

$$\Gamma_2: \lambda = -\lambda(-k), \quad \sigma = \sigma(-k), \quad v = v(-k), \quad \gamma = \gamma(-k), \quad \beta = -\beta(-k)$$

$$\Gamma_3: \lambda = -\lambda(k), \quad \sigma = \sigma(k), \quad v = v(k), \quad \gamma = -\gamma(k), \quad \beta = \beta(k) \quad (2.2)$$

$$\Gamma_4: \lambda = \lambda(-k), \quad \sigma = \sigma(-k), \quad v = v(-k), \quad \gamma = -\gamma(-k), \quad \beta = -\beta(-k)$$

Обозначим через Γ^* и Γ^{**} проекции кривой Γ на подпространства переменных λ, σ, v, k и λ, σ, v соответственно, а через Γ_j^* и Γ_j^{**} ($j = 1, \dots, 4$) ветви кривых Γ^* и Γ^{**} , отвечающие ветвям Γ_j кривой Γ . Ветви Γ_j^{**} определяются в параметрической форме первыми тремя уравнениями в (2.2). Назовем изображающими точками точки кривых Γ_j^{**} , координаты которых λ, σ, v при фиксированном значении параметра k определяются первыми тремя зависимостями в (2.2). Из (2.2) заключаем, что ветви Γ_1^{**} и Γ_3^{**} , а также Γ_2^{**} и Γ_4^{**} расположены симметрично относительно плоскости $\lambda = 0$. Ветви Γ_1^{**} и Γ_4^{**} , а также Γ_2^{**} и Γ_3^{**} тождественно совпадают и на этих ветвях изображающие точки движутся в противоположных направлениях при изменении k от $-\infty$ до ∞ . При фиксированном значении k при переходе от ветвей $\Gamma_1^{**}, \Gamma_2^{**}$ к ветвям $\Gamma_4^{**}, \Gamma_3^{**}$ векторы γ и β изменяют свои направления на противоположные. В разд. 4 будет показано, что каждая из кривых Γ_j^{**} состоит из двух ветвей $\Gamma_j^{**(1)}$ и $\Gamma_j^{** (2)}$. Ветви кривой Γ^* расположены симметрично относительно гиперплоскостей $\lambda = 0$ и $k = 0$.

Исследуем поведение кривых $\Gamma, \Gamma^*, \Gamma^{**}$ при $k \rightarrow \pm \infty$. Из (1.2) при $k \rightarrow \pm \infty$ получаем

$$\beta_j = \kappa e_j, \quad \kappa = \lim_{k \rightarrow \pm \infty} \frac{k}{v} = \pm 1, \quad \gamma_j = \frac{\kappa \lambda e_j}{\sigma - A_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Подставляя значения β_j, γ_j из (2.3) в (1.1), получаем для определения λ, σ уравнения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{\sigma - A_j} = 0, \quad \lambda^2 = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{e_j^2}{(\sigma - A_j)^2} \right)^{-1} \quad (2.4)$$

Первое из уравнений (2.4) имеет два корня: $A_1 < \sigma_* < A_2 < \sigma^* < A_3$. Подставляя эти значения σ во второе из уравнений (2.4), получим для них соответствующие значения λ_*, λ^* . Таким образом, кривая Γ имеет четыре асимптоты, определяемые уравнениями (2.3), к которым следует присоединить уравнения $\sigma = \sigma_*, \lambda = \pm \lambda_*$ и $\sigma = \sigma^*, \lambda = \pm \lambda^*$. Кривая Γ^{**} также имеет четыре асимптоты, определяемые уравнениями $\sigma = \sigma_*, \lambda = \pm \lambda_*$ и $\sigma = \sigma^*, \lambda = \pm \lambda^*$.

3. Рассмотрим уравнения $\Phi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), где Φ_i — функции, указанные в (1.3). В пространстве переменных λ, σ, v этими уравнениями определяются три одинаковых конуса, вершины которых лежат на одной прямой в точках O_i с координатами $\lambda = 0, \sigma = A_i, v = A_i$, а их оси параллельны, лежат в плоскости $\lambda = 0$ и образуют с осями v и σ углы, равные 45° . Конусы $\Phi_i = 0$ пересекают цилиндры $L_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) по кривым G_i , которые проектируются на плоскости $\lambda = 0$ в куски гипербол

$$G_1: v = A_1 + \frac{3(\sigma - A_2)(\sigma - A_3)}{\sigma - A_1} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Конусы $\Phi_i = 0$ пересекают цилиндры $L_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) по эллипсам E_i, E_i' , которые располагаются в параллельных плоскостях

и проектируются на плоскость $\lambda = 0$ в отрезки параллельных прямых

$$E_1: v = 3\sigma + A_1 - 3A_2; \quad E_1': v = 3\sigma + A_1 - 3A_3 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Из (1.4) заключаем, что при условии (2.1) и $k \neq 0$ кривая Γ^{**} не может пересекать поверхность конусов $\Phi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), которыми область D разбивается на четырнадцать областей D_j^\pm ($j = 1, \dots, 7$). Области D_j^+ и D_j^- симметричны относительно плоскости $\lambda = 0$, при этом $\lambda > 0$ для D_j^+ и $\lambda < 0$ для D_j^- . Области D_j^\pm определяются следующими неравенствами:

$$D_1^\pm: \Phi_2 < 0, \quad \Phi_3 < 0; \quad D_2^\pm: \Phi_2 > 0, \quad \Phi_3 < 0; \quad D_3^\pm: \Phi_2 < 0, \quad \Phi_3 > 0 \\ D_4^\pm: \Phi_1 > 0, \quad \Phi_2 > 0; \quad D_5^\pm: \Phi_1 > 0, \quad \Phi_2 < 0; \quad D_6^\pm: \Phi_1 < 0, \quad \Phi_2 < 0, \quad D_7^\pm: \Phi_1 < 0, \quad \Phi_2 > 0$$

Области $D_3^\pm, D_4^\pm, D_5^\pm$ ограниченные, а $D_1^\pm, D_2^\pm, D_6^\pm, D_7^\pm$ — неограниченные.

4. Уравнения (1.1), (1.2) при $k = 0$ допускают решения

$$\sigma = A_1, \quad v = A_3, \quad \lambda = 0, \quad k = 0, \quad \gamma_1 = \gamma = \pm 1, \quad \beta_3 = \beta = \pm 1, \\ \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (4.1)$$

$$\sigma = A_2, \quad v = A_3, \quad \lambda = 0, \quad k = 0, \quad \gamma_2 = \gamma = \pm 1, \quad \beta_3 = \beta = \pm 1, \\ \gamma_3 = \gamma_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (4.2)$$

которым отвечают 24 положения равновесия спутника, в которых оси x_1, x_2, x_3 тем или иным образом совпадают с осями x, y, z . Формулы (4.1) дают три группы P_1, P_2, P_3 положений относительного равновесия, при этом для групп P_2 и P_3 значения переменных получаются из (4.1) в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3. В (4.1) $\gamma = \pm 1, \beta = \pm 1$ и допускается любая комбинация знаков, поэтому каждая из групп P_1, P_2, P_3 содержит по четыре положения равновесия. Формулы (4.2) дают еще три аналогичные группы Q_1, Q_2, Q_3 положений равновесия. В области D группам равновесий P_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) отвечают точки P_i°, Q_i° с координатами

$$P_1^\circ: \sigma = A_1, \quad v = A_3, \quad \lambda = 0 \quad (1 \ 2 \ 3); \quad Q_i^\circ: \sigma = A_2, \quad v = A_3, \\ \lambda = 0 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

лежащие на границах областей D_j^\pm ($j = 1, \dots, 7$).

Для малых значений $|k|$ каждому из равновесий (4.1), (4.2) будет отвечать одна из ветвей кривой Γ^{**} . Для этих ветвей введем обозначения $P_i(k, \gamma, \beta), Q_i(k, \gamma, \beta)$ ($i = 1, 2, 3; \gamma = \pm 1, \beta = \pm 1$) и из уравнений (1.1), (1.2) получаем при малых значениях $|k|$ следующие представления в параметрической форме:

$$P_1(k, \gamma, \beta): \sigma = A_1 + \frac{e_1^2 k^2}{16(A_3 - A_1)} + \dots, \quad v = A_3 + \beta e_3 k + \frac{3e_1^2 k^2}{16(A_3 - A_1)} + \dots, \quad (4.3)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \gamma e_1 k - \frac{\gamma \beta e_3 e_1 k^2}{16(A_3 - A_1)} + \dots \quad (\gamma = \pm 1, \beta = \pm 1) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$Q_1(k, \gamma, \beta): \sigma = A_2 + \frac{e_2^2 k^2}{16(A_3 - A_2)} + \dots, \quad v = A_3 + \beta e_3 k + \frac{3e_2^2 k^2}{16(A_3 - A_2)} + \dots, \quad (4.4)$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \gamma e_2 k - \frac{\gamma \beta e_2 e_3 k^2}{16(A_3 - A_2)} + \dots \quad (\gamma = \pm 1, \beta = \pm 1) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

На кривой Γ^{**} изображающие точки при $k = 0$ занимают положения P_i°, Q_i° ($i = 1, 2, 3$). Формулы (4.3), (4.4) позволяют установить — в какую из областей D_j^\pm ($j = 1, \dots, 7$) попадают изображающие точки при $k > 0$ и $k < 0$ (таблица).

| $P_i(k, \gamma, \beta)$ | $k > 0$ | $k < 0$ | $Q_i(k, \gamma, \beta)$ | $k > 0$ | $k < 0$ |
|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|
| $P_1(k, 1, 1)$ | D_1^+ | D_3^- | $Q_1(k, 1, 1)$ | D_2^+ | D_4^- |
| $P_1(k, 1, -1)$ | D_3^+ | D_1^- | $Q_1(k, 1, -1)$ | D_4^+ | D_2^- |
| $P_1(k, -1, 1)$ | D_1^- | D_3^+ | $Q_1(k, -1, 1)$ | D_2^- | D_4^+ |
| $P_1(k, -1, -1)$ | D_3^- | D_1^+ | $Q_1(k, -1, -1)$ | D_4^- | D_2^+ |
| $P_2(k, 1, 1)$ | D_4^+ | D_7^- | $Q_2(k, 1, 1)$ | D_5^+ | D_6^- |
| $P_2(k, 1, -1)$ | D_7^+ | D_4^- | $Q_2(k, 1, -1)$ | D_6^+ | D_5^- |
| $P_2(k, -1, 1)$ | D_4^- | D_7^+ | $Q_2(k, -1, 1)$ | D_5^- | D_6^+ |
| $P_2(k, -1, -1)$ | D_7^- | D_4^+ | $Q_2(k, -1, -1)$ | D_6^- | D_5^+ |
| $P_3(k, 1, 1)$ | D_4^+ | D_5^- | $Q_3(k, 1, 1)$ | D_3^+ | D_4^- |
| $P_3(k, 1, -1)$ | D_5^+ | D_4^- | $Q_3(k, 1, -1)$ | D_4^+ | D_3^- |
| $P_3(k, -1, 1)$ | D_4^- | D_5^+ | $Q_3(k, -1, 1)$ | D_3^- | D_4^+ |
| $P_3(k, -1, -1)$ | D_5^- | D_4^+ | $Q_3(k, -1, -1)$ | D_4^- | D_3^+ |

Построим теперь из ветвей $P_i(k, \gamma, \beta)$, $Q_i(k, \gamma, \beta)$ ($i = 1, 2, 3$) следующие кривые $\Gamma_l^{**(\kappa)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $\kappa = 1, 2$):

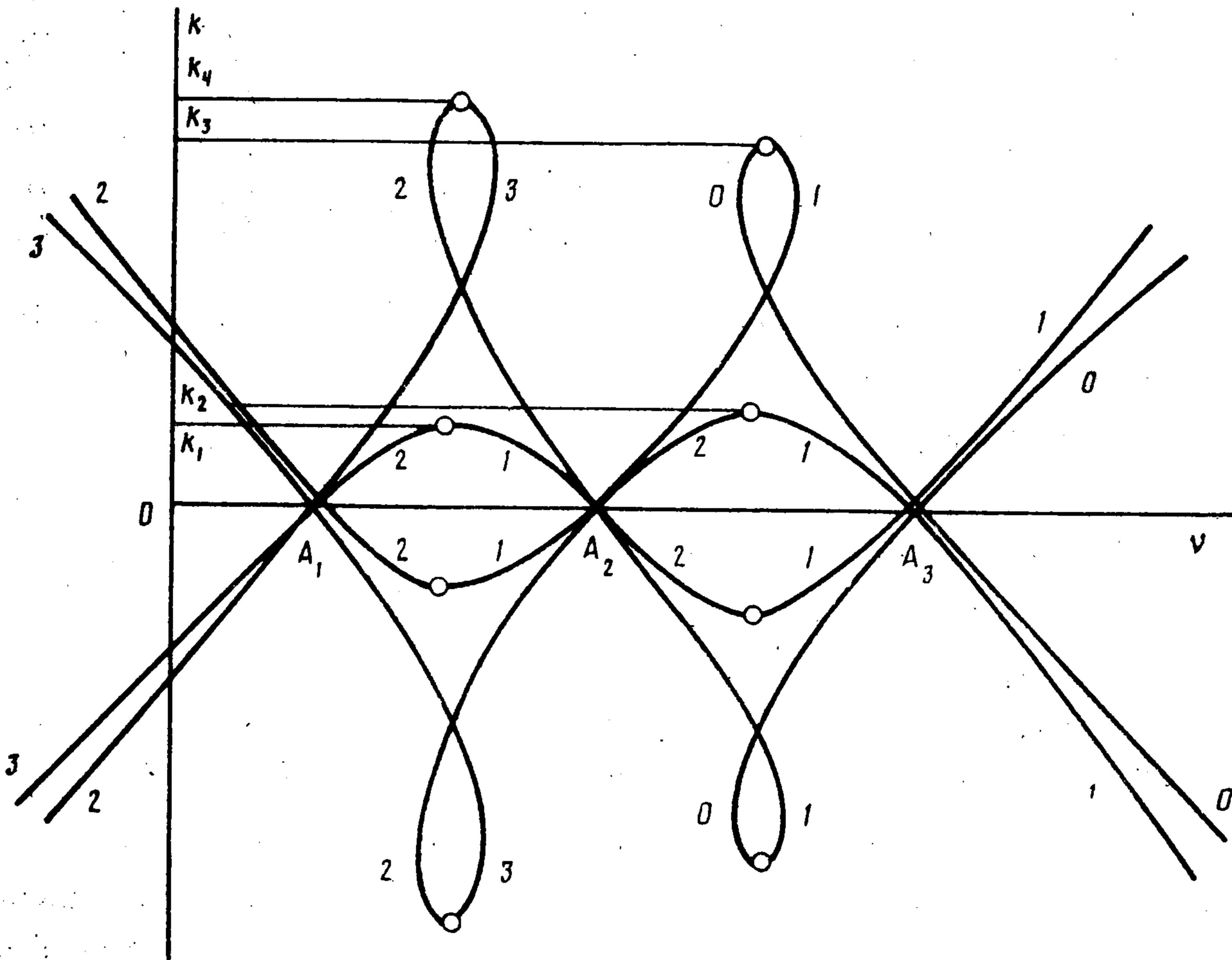
$$\begin{aligned} \Gamma_1^{** (1)}: & P_1(k, 1, 1), & Q_3(k, 1, -1), & P_2(k, 1, 1) \\ \Gamma_2^{** (1)}: & P_1(k, -1, -1), & Q_3(k, -1, 1), & P_2(k, -1, -1) \\ \Gamma_3^{** (1)}: & P_1(k, -1, 1), & Q_3(k, -1, -1), & P_2(k, -1, 1) \\ \Gamma_4^{** (1)}: & P_1(k, 1, -1), & Q_3(k, 1, 1), & P_2(k, 1, -1) \\ \Gamma_1^{** (2)}: & Q_1(k, 1, 1), & P_3(k, 1, -1), & Q_2(k, 1, 1) \\ \Gamma_2^{** (2)}: & Q_1(k, -1, -1), & P_3(k, -1, 1), & Q_2(k, -1, -1) \\ \Gamma_3^{** (2)}: & Q_1(k, -1, 1), & P_3(k, -1, -1), & Q_2(k, -1, 1) \\ \Gamma_4^{** (2)}: & Q_1(k, 1, -1), & P_3(k, 1, 1), & Q_2(k, 1, -1) \end{aligned}$$

Для пояснения этих формул укажем, например, устройство и расположение кривой $\Gamma_1^{** (1)}$ в области D . Для части $P_1(k, 1, 1)$ этой кривой изображающая точка при $k = 0$ занимает положение P_1° , а при $k > 0$ попадает в область D_1^+ и при $k \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к асимптоте $\sigma = \sigma_*$, $\lambda = \lambda_*$. При $k < 0$ изображающая точка кривой $P_1(k, 1, 1)$ попадает в область D_3^- и при некотором значении $k = -k_3 < 0$ кривая $P_1(k, 1, 1)$ соединяется с кривой $Q_3(k, 1, -1)$, на которой изображающая точка при $k = 0$ занимает положение Q_3° , а при $k < 0$ попадает в область D_3^- и при $k = -k_3$ кривая $Q_3(k, 1, -1)$ соединяется с кривой $P_1(k, 1, 1)$. При $k > 0$ изображающая точка кривой $Q_3(k, 1, -1)$ попадает в область D_4^+ и при некотором значении $k = k_4 > 0$ кривая $Q_3(k, 1, -1)$ соединяется с кривой $P_2(k, 1, 1)$, на которой изображающая точка при $k = 0$ занимает положение P_2° , а при $k > 0$ попадает в область D_4^+ и при $k = k_4$ кривая $P_2(k, 1, 1)$ соединяется с кривой $Q_3(k, 1, -1)$. При $k < 0$ изображающая точка кривой $P_2(k, 1, 1)$ попадает в область D_7^- и при $k \rightarrow -\infty$ асимптотически приближается к асимптоте $\sigma = \sigma_*$, $\lambda = -\lambda_*$. Аналогично устроены и остальные кривые $\Gamma_l^{**(\kappa)}$.

Кривые $\Gamma_1^{**(\kappa)}$ и $\Gamma_3^{**(\kappa)}$, а также $\Gamma_2^{**(\kappa)}$ и $\Gamma_4^{**(\kappa)}$ симметрично расположены относительно плоскости $\lambda = 0$. Кривые $\Gamma_1^{**(\kappa)}$ и $\Gamma_4^{**(\kappa)}$, а также $\Gamma_2^{**(\kappa)}$ и $\Gamma_3^{**(\kappa)}$ совпадают, однако на них изображающие точки движутся в противоположных направлениях при изменении k от $-\infty$ до ∞ . В области D кривые $\Gamma_l^{** (1)}$ ($l = 1, \dots, 4$) расположены в той ее части, для которой $\sigma < A_2$, а кривые $\Gamma_l^{** (2)}$ — в части, для которой $\sigma > A_2$.

В пространстве переменных λ, σ, ν, k ветвям $\Gamma_l^{**(\kappa)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $\kappa = 1, 2$) кривой Γ^{**} отвечают ветви $\Gamma_l^{*(\kappa)}$ кривой Γ^* , проекция которой на плоскость переменных k, ν представлена на фигуре. Кривые следует рассматривать как сдвоенные (состоящие из двух «берегов»). Разным

берегам этих кривых отвечают относительные равновесия, в которых вектор γ имеет противоположные направления. Отсюда заключаем, что существуют восемь бифуркационных значений $k = \pm k_j$ ($j = 1, \dots, 4$) параметра k , при переходе через которые число относительных равновесий изменяется на четыре, при этом максимальное число равно двадцати четырем (при $|k| < k_1$), а минимальное — восьми (при $|k| > k_4$). Цифры 0, 1, 2, 3 на ветвях кривых указывают степень неустойчивости соответствующих равновесий, при этом изменение степени неустойчивости происходит только в точках бифуркации, которым отвечают вершины «горбов» и основания «впадин».



1, 2, 3 на ветвях кривых указывают степень неустойчивости соответствующих равновесий, при этом изменение степени неустойчивости происходит только в точках бифуркации, которым отвечают вершины «горбов» и основания «впадин».

5. Достаточные условия устойчивости относительных равновесий спутника-гиростата (1.5), (1.4) [1], выраженные через параметры λ , σ , v , можно представить в виде [2]:

$$a > 0, \quad 2av + b > 0, \quad \Delta = av^2 + bv + c > 0 \quad (5.1)$$

$$a = \lambda^{-2}H, \quad b = 3H' - 2\sigma\lambda^{-2}H - \lambda^{-4}H^2$$

$$c = \frac{9}{2}\lambda^2H'' + 6H - 3\sigma H' + (\sigma^2 - 3H')\lambda^{-2}H + \sigma\lambda^{-4}H^2$$

$$H = (\sigma - A_1)(\sigma - A_2)(\sigma - A_3), \quad H' = dH/d\sigma$$

Рассмотрим в пространстве параметров λ , σ , v две поверхности

$$v = v^\pm(\lambda, \sigma), \quad v^\pm = (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

определяемые уравнением $\Delta = 0$. Функции $v = v^\pm$ принимают вещественные значения для всех допустимых значений $\lambda \neq 0$. Поверхность $v = v^+$ пересекает цилиндры $L_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) по кривым G_i . Поверхность $v = v^-$ пересекает цилиндры $L_i = 0$ по эллипсам E_i'' , которые располагаются в параллельных плоскостях и проектируются на плоскость $\lambda = 0$ в отрезки параллельных прямых

$$E_1'' : v = 7\sigma - 3(A_2 + A_3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Поверхность $v = v^+$ имеет разрыв при $\sigma = A_2$. При $\sigma \rightarrow A_2$ она асимптотически стремится к плоскости $\sigma = A_2$.

Условия (5.1) эквивалентны условиям [2].

$$a > 0, \nu > \nu_2, \nu_1 = \min(\nu^+, \nu^-), \nu_2 = \max(\nu^+, \nu^-) \quad (5.2)$$

Из (5.2) заключаем, что равновесия, для которых $\nu > \nu_2, \nu_1 < \nu < \nu_2, \nu < \nu_1$, имеют степень неустойчивости χ , соответственно равную 0, 1, 2, если $a > 0$, и 1, 2, 3, если $a < 0$.

Выше было показано, что в области D кривые $\Gamma_l^{**^{(1)}} (l = 1, \dots, 4)$ расположены в той ее части, для которой $\sigma \leq A_2$, а кривые $\Gamma_l^{**^{(2)}}$ — в части, для которой $\sigma \geq A_2$. Поэтому для первых кривых $a > 0$, а для вторых $a < 0$. Следовательно, на кривых $\Gamma_l^{**^{(1)}}$ степень неустойчивости равновесий $\chi = 0, 1, 2$ а на кривых $\Gamma_l^{**^{(2)}}$ имеем $\chi = 1, 2, 3$.

Результаты анализа условий устойчивости (5.2) равновесий (1.5), (1.4) представлены на фигуре, где цифры 0, 1, 2, 3 на ветвях кривых указывают степень неустойчивости соответствующих равновесий, при этом изменение степени неустойчивости происходит только в точках бифуркации, которым отвечают вершины «горбов» и основания «впадин» кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов С. Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 737—744.
2. Рубановский В. Н. Об относительных равновесиях спутника-гиростата, их ветвлении и устойчивости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 909—914.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1991