Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

С. П. Сосницкий

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Предлагается обобщение теоремы Четаева о неустойчивости консервативных систем на случай неизолированного исследуемого положения равновесия. В условиях отсутствия минимума потенциальной энергии системы в рассматриваемом положении равновесия обсуждается вопрос о лебеговой мере инвариантных множеств, принадлежащих пересечению области отрицательности интеграла энергии и малой окрестности положения равновесия.

Работа Четаева [1] сыграла ключевую роль при получении ряда новых случаев обращения известной теоремы Лагранжа — Дирихле (см. обзоры [2, 3], гл. III). Убедительным свидетельством тому служат, в частности, результаты [4, 5], в которых использована идея Четаева о построении вспомогательного векторного поля, обладающего определенными свойствами по отношению к потенциалу сил исследуемой системы. Вместе с тем, было показано [6], что условие отсутствия критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$ в области $\omega_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in R^n, \ \|\mathbf{q}\| < \varepsilon\}: \ \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$, где $\Pi(\mathbf{q})$ — потенциальная энергия системы, характерная как для теоремы Четаева, так и для большинства работ, посвященных ее развитию, не является необходимым. В ряде случаев [6] при некоторых ограничениях на структуру множества критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$ от него можно отказаться. Как будет показано ниже, эти ограничения можно снять совсем.

Рассмотрим натуральную систему с n степенями свободы, представляя ее в гамильтоновой форме

$$\mathbf{q}^\cdot = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}^\cdot = -\partial H/\partial \mathbf{q} \tag{1}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = {}^1/_2 \mathbf{p}^T A(\mathbf{q})\,\mathbf{p} + \Pi(\mathbf{q}) = h = \text{const} \tag{2}$$

Будем предполагать, что $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C_{\mathbf{q}}^2 (D \subset R^{2n})$, квадратичная форма $\mathbf{p}^T A(0)\,\mathbf{p}$ положительно определена, точка $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$, соответствует положению равновесия системы (I) и $\Pi(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ множество $\omega_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon: \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$ непусто и $0 \in \partial\omega_\varepsilon$. Предположим, что существует такое векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \in C^1$: $s_\varepsilon \to R^n$, что выполняются условия:

1) $\mathbf{f}^T(\mathbf{q})\,\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \omega_\varepsilon$;

2) $\mathbf{x}^T \left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} A(\mathbf{q})\right)\Big|_{\mathbf{q}=0} \mathbf{x} - \dfrac{1}{2} \mathbf{f}^T(0) \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{x}^T A(\mathbf{q})\,x)\|_{\mathbf{q}=0} \geqslant c\|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in R^n$, $0 < c = \text{const}$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство. Поскольку согласно исходному предположению теоремы I $\omega_\varepsilon \neq \varnothing$, то непусто множество

$$\Omega_\varepsilon = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\varepsilon^* = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in R^{2n}, \ \|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\| < \varepsilon\}: \ H = h < 0\}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $V = \mathbf{f}^T\mathbf{p}$. Для ее производной вдоль векторного поля, определяемого системой (1), получаем выражение

$$V^\cdot = \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} A(\mathbf{q})\,\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{p}^T A(\mathbf{q})\,\mathbf{p}) - \mathbf{f}^T(\mathbf{q}) \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \tag{3}$$

Замечая, что $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \in C^1$, $A(\mathbf{q}) \in C^2$, и тем самым правая часть равенства (3) непрерывна, представим последнее в окрестности точки $\mathbf{q} = \mathbf{p} =$

$= 0$ в виде

$$V^{\cdot} = \mathbf{p}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} A(\mathbf{q}) \right) \Big|_{\mathbf{q}=0} \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T(0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{p}^T A(\mathbf{q}) \mathbf{p}) |_{\mathbf{q}=0} - \\ - \mathbf{f}^T(\mathbf{q}) \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + o(\| \mathbf{p} \|^2) \quad (4)$$

На основании соотношения (4), учитывая условия 1, 2 теоремы, всегда можно выбрать столь малое число η $(0 < \eta < \varepsilon)$, чтобы имела место оценка

$$V^{\cdot} \geqslant c_1 \| \mathbf{p} \|^2, \quad \forall (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\eta^* \cap \Omega_\varepsilon, \quad 0 < c_1 < c \quad (5)$$
$$c_1 = \mathrm{const}$$

Предположим, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ устойчиво. Тогда, $\forall (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in s_\delta^* \cap \Omega_\varepsilon$, где число δ достаточно мало, существует положительная полутраектория $\overline{\gamma^+} (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, проходящая через точку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \in s_\delta^* \cap \Omega_\varepsilon$, такая, что $\gamma^+ (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \subset s_\eta^* \cap \Omega_\varepsilon$. Выберем теперь точку $(\mathbf{q}_0^*, \mathbf{p}_0^*) \in s_\delta^* \cap \Omega_\varepsilon$ таким образом, чтобы удовлетворить неравенству

$$V(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) |_{t=0} = \mathbf{f}^T(\mathbf{q}) \mathbf{p} |_{t=0} = \mathbf{f}^T (\mathbf{q}_0^*) \mathbf{p}_0^* = \lambda_1 > 0$$

Последнее эквивалентно положительности в R^n скалярного произведения векторов $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0^*)$ и $\mathbf{p}_0^*$. Поскольку принадлежность точки $(\mathbf{q}_0^*, \mathbf{p}_0^*)$ области $s_\delta^* \cap \Omega_\varepsilon$ допускает существование вектора $\mathbf{p}_0^*$ с любым направлением в R^n (что непосредственно следует из структуры интеграла энергии $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h$), то данное направление всегда можно выбрать таким, чтобы постоянная λ_1 была положительной.

Так как для решения системы (I) $(\mathbf{q}^*(t), \mathbf{p}^*(t))^T$, которое соответствует полутраектории $\gamma^+ (\mathbf{q}_0^*, \mathbf{p}_0^*)$, выполняется оценка (5), то справедливо неравенство

$$V(\overline{\gamma^+}) \geqslant V(\mathbf{q}_0^*, \mathbf{p}_0^*) = \lambda_1 > 0$$

и, стало быть, точка $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, в которой функция V обращается в нуль, не принадлежит множеству $\overline{\gamma^+}$. Отсюда следует, что $\| \mathbf{p}(\overline{\gamma^+}) \|^2 \neq 0$. Учитывая теперь, что множество $\overline{\gamma^+}$ компактно и, таким образом, функция $\| \mathbf{p}(\overline{\gamma^+}) \|^2$ достигает на нем своих экстремальных значений, имеем

$$\| \mathbf{p}(\overline{\gamma^+}) \|^2 \geqslant c_2 > 0, \quad c_2 = \mathrm{const}$$

На основании данной оценки из (5) получаем

$$V^{\cdot}(\mathbf{q}^*(t), \mathbf{p}^*(t)) \geqslant c_1 c_2 = c_3 > 0, \quad c_3 = \mathrm{const} \quad (6)$$

С другой стороны, поскольку $V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C^1(s_\eta^*)$, а $\bar{\gamma}^+ \subset s_\eta^*$, имеем

$$V(\mathbf{q}^*(t), \mathbf{p}^*(t)) \leqslant \lambda_2, \quad 0 < \lambda_2 = \mathrm{const} \quad (7)$$

Сопоставляя неравенства (6), (7), приходим к противоречию, откуда заключаем о неустойчивости исследуемого положения равновесия. Теорема 1 доказана.

Следствие. Пусть при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ $\omega_\varepsilon \neq \neq \varnothing$, $0 \in \partial\omega_\varepsilon$ и существует такое векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \in C^1$: $s_\varepsilon \to R^n$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$, что выполняется условие *1* теоремы I и, кроме того

$$\mathbf{x}^T (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q} A(\mathbf{q})) |_{\mathbf{q}=0} \mathbf{x} \geqslant c \| \mathbf{x} \|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \quad 0 < c = \mathrm{const}$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ системы (I) неустойчиво.

Доказательство следствия, представляющего собой усиление теоремы Четаева [I] за счет нестрогого неравенства в условии *1*, можно осуществить по уже изложенной схеме. Однако в данной ситуации удобнее рассмотреть функцию Четаева $V = -H\mathbf{f}^T\mathbf{p}$, производная которой по векторному полю, определяемому системой (I), при учете вышеизложенного имеет вид

$$V^{\cdot} = -H\left(\mathbf{p}^T\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} A(\mathbf{q})\right)\Big|_{\mathbf{q}=0}\mathbf{p} - \mathbf{f}^T\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + o(\|\mathbf{p}\|^2)\right) \tag{8}$$

В области

$$\Lambda = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\varepsilon^*:\ H = h < 0,\ \mathbf{f}^T\mathbf{p} > 0\}$$

где $V > 0$, при достаточно малом числе $\varepsilon > 0$, учитывая условия следствия, заключаем, что правая часть равенства (8) положительна. В точке $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, где производная $V^{\cdot}$ может обратиться в нуль, функция V также равна нулю. Стало быть, если ограничиться в дальнейшем рассмотрением траекторий системы (I), проходящих через область Λ, и заметить, что

$$V = 0, \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \partial\Lambda \cap s_\varepsilon^*; \quad V > 0, \quad V^{\cdot} > 0, \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda$$

то согласно теореме Четаева о неустойчивости ([3], с. 27) можно сделать вывод о справедливости следствия.

Замечания. 1°. Хотя в работе Четаева [1] и рассматривается область, аналогичная Λ, однако от производной $V^{\cdot}$ фактически требуется положительность в определенной выше области Ω_ε, которая шире области Λ и содержит последнюю в качестве собственного подмножества. Если же ограничиться условиями положительности $V^{\cdot}$ лишь в области Λ, то заключение о неустойчивости, как можно было убедиться выше, имеет место и при нестрогом неравенстве $\mathbf{f}^T \partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0$, чем допускается существование множества критических точек в области ω_ε без каких-либо ограничений на его структуру. Функция V, предложенная в работе Четаева, позволяет это сделать. Таким образом, из доказательства теоремы Четаева извлекается фактически более сильное утверждение, чем то, которое отражено в ее формулировке.

2°. Предположение, что $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C_\mathbf{q}^2\ (D \subset R^{2n})$, гарантирующее единственность решения, не принципиально. Теорема 1 сохраняет силу и при $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C_\mathbf{q}^1$, что непосредственно следует из схемы ее доказательства. Требование $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in C_\mathbf{q}^2$ в этой связи можно расценивать скорее всего как следование принципу детерминированности Ньютона, принятому в классической механике.

3°. Сравнивая формулировки теоремы 1 и следствия, нельзя не отметить, что в теореме 1 не предполагается равенство $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$, т. е. векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ может содержать постоянную составляющую. Возможность такой структуры поля $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, когда $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{0}$, проиллюстрируем на следующем примере.

Пример. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, гамильтониан которой определяется выражением

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = {}^1/_2\,(p_1^2 + p_2^2) + \Pi(q_1, q_2)$$

$$\Pi(q_1, q_2) = q_1^4 + q_2^7 + q_1^2 q_2^6$$

Поскольку потенциальная энергия системы $\Pi(q_1, q_2)$ не имеет минимума в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ — положении равновесия системы (при условии, что $\mathbf{p} = \mathbf{0}$), то непусто множество

$$\omega_\varepsilon = \{(q_1, q_2) \in s_\varepsilon : q_1^4 + q_2^7 + q_1^2 q_2^6 < 0\} \neq \varnothing$$

Согласно определению ω_ε, $q_2 < 0$, $\forall\,(q_1, q_2) \in \omega_\varepsilon$.

Взяв в качестве поля $\mathbf{f}$ вектор $\mathbf{f} = (q_1, -1 + q_2)$, приходим к равенству

$$\mathbf{f}^T \partial\Pi/\partial\mathbf{q} = -7q_2^6 - 6q_1^2 q_2^5 + q_1(4q_1^3 + 2q_1 q_2^6) + q_2(7q_2^6 + 6q_1^2 q_2^5)$$

На основании последнего, учитывая, что $q_1^4 < q_2^7$, $\forall\ (q_1, q_2) \in \omega_\varepsilon$, и тем самым на множестве $\omega_\varepsilon\ |q_1| < |q_2|^{7/4}$, получаем

$$\mathbf{f}^T \partial\Pi/\partial\mathbf{q} = -7q_2^6 + O(|q_2|^7)$$

Стало быть, при достаточно малом числе $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mathbf{f}^T \partial\Pi/\partial\mathbf{q} < -q_2^6, \ \forall\,(q_1, q_2) \in \omega_\varepsilon$$

Замечая, что выполнение условия 2 теоремы 1 в рассматриваемом случае очевидно, делаем вывод о неустойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ данной системы.

Применяя теорему Пуанкаре о возвращении ([7], с. 469), оценим лебегову меру траекторий системы (I), оставляющих область $\Omega_\eta = \Omega_\varepsilon \cap s_\eta^*$, в которой в соответствии со схемой доказательства теоремы 1 выполняется оценка (5).

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 область $\Omega_\eta = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\eta^*: H < 0\}$ содержит инвариантное множество M, то

$$\operatorname{mes}(M) = 0$$

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{mes}(M) = \mu > 0$. Тогда, поскольку фазовый объем системы (I) является инвариантом, а множество M ограничено, почти все траектории $\gamma \subset M$ согласно теореме Пуанкаре обладают свойством возвращаемости. Стало быть, существует такая последовательность $\{t_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \| \mathbf{q}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \oplus \mathbf{p}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \| =$$
$$= \| \mathbf{q}_0 \oplus \mathbf{p}_0 \|, \quad \forall (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in M \setminus \varkappa, \quad t_0 = 0 \tag{9}$$

где

$$\operatorname{mes}(M \setminus \varkappa) = \operatorname{mes}(M)$$

Учитывая, что лебегова мера множества

$$\Omega_0 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\eta^*: H < 0,\ \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$$

равна нулю, имеем также

$$\operatorname{mes}[M^* = (M \setminus \varkappa) \setminus \Omega_0] = \operatorname{mes}(M) \tag{10}$$

Проинтегрируем неравенство (5) на траекториях $\gamma \subset (M \setminus \varkappa)$. В результате получаем

$$V(\mathbf{q}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)) - V(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \geqslant c_1 \int_0^{t_m} \| \mathbf{p}(\tau) \|^2 d\tau \tag{11}$$

Полагая в (II) $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in M^*$, устремим m к бесконечности. Тогда, учитывая (9), приходим к соотношениям

$$\lim_{m\to\infty} V(\mathbf{q}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(t_m, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)) - V(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{t_m} \| \mathbf{p}(\tau) \|^2 d\tau > a > 0, \quad a = \text{const}$$

Сопоставляя которые, заключаем, что при достаточно большом числе m неравенство (II) противоречиво, если только $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in M^*$. Стало быть, учитывая условие (10), можно сделать вывод, что исходное предположение о положительности лебеговой меры множества M неверно. Теорема 2 доказана.

Следствие. Почти все траектории системы (I), проходящие через область Ω_η, пересекают сферу $\overline{s_\eta^*} \setminus s_\eta^*$.

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что ограничения на структуру множества критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$, приведенные в [6], формируются, исходя из возможности доказать существование движения системы (I), на котором производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ удовлетворяет оценке: $V^{\boldsymbol{\cdot}} \geqslant k > 0$, $k = \text{const}$. Как показано выше, выполнение неравенства $\mathbf{f}^T\ \partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0$ (вместе с остальными условиями теоремы 1 или ее следствия) достаточно, чтобы обеспечить существование движения с заданным свойством, если только выбор начальных условий подчинить требованию: $V(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) > 0$.

Последнее, как можно было убедиться, не влечет каких-либо ограничений на структуру множества критических точек функции $\Pi(q)$.

Автор благодарит В. В. Румянцева и А. В. Карапетяна за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 89—93.
2. *Карапетян А. В.*, *Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
3. *Rouche N.*, *Habets P.*, *Laloy M.* Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N. Y.; Heidelberg; Berlin: Springer — Verlag, 1977. 396 p. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Паламодов В. П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11. № 4. С. 42—55.
5. *Козлов В. В.* О неустойчивости равновесия в потенциальном поле // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 3. С. 215—216.
6. *Peiffer K.*, *Carlier P.* A remark on the inversion of Lagrange — Dirichlet's theorem // Semin. math. Inst. math. pure et appl. Univ. cathol. Louvain. 1988—1989. № 2 — 1. P. 59—73.
7. *Немыцкий В. В.*, *Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.

Киев

Поступила в редакцию
16.V.1990