Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.01

К. Пайффер

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА — ДИРИХЛЕ

В случае, когда потенциальная энергия механической системы представляет собой аналитическую функцию вида

$$V(\mathbf{q}) = V_m(\mathbf{q}) + V_{m+1}(\mathbf{q}) + \ldots \quad (m \geqslant 2)$$

где V_i — полиномы степени i, было показано [1], что положение равновесия $q = 0$ неустойчиво при нечетных m. При m четных доказана [2] неустойчивость в предположении, что точка $\mathbf{q} = 0$ не является точкой локального минимума функции $V_m(\mathbf{q})$. При подходящих дополнительных предположениях ниже с использованием известной процедуры [2] доказывается неустойчивость в некоторых случаях, когда m четно и функция $V_m(\mathbf{q})$ постоянно положительна.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, описываемую функцией Лагранжа:

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = {}^1/_2 \mathbf{q}^{\cdot T} A(\mathbf{q}) \mathbf{q}^{\cdot} - V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in R^n \tag{1}$$

где A — симметричная положительно-определенная $(n \times n)$-матрица, V — потенциальная энергия. Уравнения движения имеют вид

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \left(\frac{d}{dt}A(\mathbf{q})\right)\mathbf{q}^{\cdot} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left({}^1/_2 \mathbf{q}^{\cdot T} A(\mathbf{q}) \mathbf{q}^{\cdot}\right) = -V'(\mathbf{q}) \tag{2}$$

Теорема Лагранжа — Дирихле гласит, что положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ устойчиво, если $V(0) = 0$ — строгий локальный минимум функции V [3].

Простое обращение этой теоремы неверно, что показано [4] для системы с одной степенью свободы в случае, когда $V(0) = 0$, $V(q) = \exp(-1/q^2)\cos(1/q)$ для $q \neq 0$. Обозначая через B_ε открытый шар радиуса ε, замечаем, что для этого потенциала справедливо следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое связное множество $G: 0 \in G \subseteq \bar{G} \subseteq B_\varepsilon$, такое, что $V(\mathrm{q}) > 0$ на ∂G. Даже это свойство, более слабое, чем положительная определенность функции V, не является необходимым для устойчивости в R^n [5].

Остающееся предположение состоит в том, что равновесие неустойчиво, если функция V аналитична и не имеет минимума в начале координат. В этом направлении было получено много результатов, ссылки на большую часть которых можно найти в работах [6—8].

Не претендуя на перечисление всех результатов, напомним некоторые из них. Пусть

$$V(\mathbf{q}) = V_m(\mathbf{q}) + V_{m+1}(\mathbf{q}) + \ldots \quad (m \geqslant 2)$$

где V_i — однородные полиномы степени i. Если функция $V_m(\mathbf{q})$ отрицательно определена или если $m = 2$ и $V_2(\mathbf{q})$ может принимать отрицательные значения, обращение было получено Ляпуновым [9]. Если $V_2(\mathbf{q}) \geqslant 0$ и только один из коэффициентов Пуанкаре равен нулю, обращение было получено Койтером [10]. Некоторые результаты по обращению основываются на следующей фундаментальной лемме Четаева [11], обеспечивающей неустойчивость в случае, когда

1) $\theta = \{\mathbf{q} : V(\mathbf{q}) < 0\} \neq \varnothing$, $0 \in \partial\theta$

2) $(\mathbf{q} \mid \partial V/\partial \mathbf{q}) < 0$ на $\partial\theta$

В качестве немедленного следствия леммы получена [11] неустойчивость в случае, когда функция $V = V_m(\mathbf{q})$ однородна или существует $k \geqslant 2$, такое, что $V_i(\mathbf{q}) \geqslant 0$ при $i < k$ и $V_i(\mathrm{q}) \leqslant 0$ при $k > i$. Фактически условие 2 не всегда выполнимо, даже если V имеет строгий локальный максимум в точке $\mathbf{q} = 0$. Этот случай был изучен [7] для $V \in C^2$ [6] и для функций $V \in C^1$, таких, что $V(0)$ — нестрогий локальный максимум [12].

Заметим, что упомянутая выше лемма Четаева была усилена в [5], где условие 2 было заменено на

3) $(\mathbf{q} \mid \partial V/\partial \mathbf{q}) + \alpha V(\mathbf{q}) < 0$ на θ, $0 < \alpha < 2$

а также самим Четаевым [11], использовавшим векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ гладкости C^1 на θ в R^n, такое, что $\mathbf{f}(0) = 0$, $A(0)\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(0)$ — положительно определенная матрица, и условие

4) $(\mathbf{f} \mid \partial V/\partial \mathbf{q}) < 0$ на θ

вместо условия 2.

Это условие в дальнейшем применялось очень часто. Оно использовалось в работе [3], где полностью доказано обращение в случае двух степеней свободы, когда матрица $A(0)$ единична, функция $V(\mathbf{q})$ — аналитическая и принимает отрицательные значения любой окрестности нуля. Такой же результат был независимо получен в [14], а условие $A(0) = I$ было устранено в [15]. Для $n = 2$ и аналитической функции V с неизолированным минимумом в $\mathbf{q} = 0$ попытка доказать теорему была сделана в [16].

В случае произвольного n и неаналитического потенциала в [13] доказана неустойчивость при следующих гипотезах:

$A(\mathbf{q}) = I$, где I — $(n \times n)$ — единичная матрица,

$$V(\mathbf{q}) = V_m(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}),\ m \geqslant 2,\ R'(0) = \ldots = R^{(m)}(0) = 0$$

Функция $V_m(q)$ невырождена.

В [17] доказана неустойчивость в случае, когда функция V квазиоднородна или полуквазиоднородна и $A(0) = I$. Первый из этих результатов — это расширение результата [11] для $V = V_m$, другой обобщает вышеприведенный результат [13] в случае, когда функция V аналитическая. В [18] условие $A(0) = I$ устранено при помощи дополнительной гипотезы и результат [13] слегка обобщен.

В [1] неустойчивость была доказана в рамках простых предположений: $m > 2$ и нечетно. Наконец, в [2] доказана неустойчивость для произвольного $m \geqslant 2$ при том лишь условии, что $V_m(\mathbf{q})$ может принимать отрицательные значения, т. е. без требования невырожденности функции V_m. Этот замечательный результат почти закрывает проблему обращения для аналитического потенциала. Остается открытым лишь один вопрос. Что будет, если $V(\mathbf{q}) = V_{2p}(\mathbf{q}) + \ldots$, причем $V_{2p}(\mathbf{q}) \geqslant 0$ и $V(0)$ не есть локальный минимум. В работе [19] неустойчивость была доказана в случае, когда $V = V_2 + V_m + \ldots$, $V_2 \geqslant 0$, V_m принимает строго отрицательные значения на гиперповерхности $\{V_2(\mathbf{q}) = 0\}$. В дальнейшем, при помощи в точности той же процедуры, что и в [2], будут получены некоторые результаты по неустойчивости в случае $V = V_{2p} + \ldots$, $p > 1$.

Пусть в применявшихся выше обозначениях функции $A(\mathbf{q})$ и $V(\mathbf{q})$ аналитические и

$$A(\mathbf{q}) = I + \varphi(\mathbf{q}),\quad \varphi(0) = 0,\quad V(\mathbf{q}) = V_{2m}(\mathbf{q}) + V_{2m+2}(\mathbf{q}) + \ldots,\quad m \geqslant 3$$

где V_k — однородный полином степени k, $D^r V_k$ — его частная производная порядка r. Тогда справедлива

Теорема 1. Если выполнены предположения

1° $V_{2m}(\mathbf{q}) \geqslant 0$ в R^n, $S = \{\mathbf{q}\colon V_{2m}(\mathbf{q}) = 0\}$

2° $\exists \mathbf{e} \in S$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, $V_{2m+2}(\mathbf{e}) = \min\{V_{2m+2}(\mathbf{q})\colon \|\mathbf{q}\| = 1\} < 0$

3° $D^2 V_{2m}(\mathbf{e}) = 0$ при $r = 2, 3, 4$

4° $\varphi(\mathbf{q})/\|\mathbf{q}\|^2 \to 0$ при $\mathbf{q} \to 0$

то положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ уравнений (2) неустойчиво.

Доказательство. В силу предположения 4° уравнения (2) можно записать так:

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) + \mathbf{v}(\mathbf{q}) = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = V'_{2m}(\mathbf{q}) + V'_{2m+2}(\mathbf{q}) + \sum_{k \geqslant 2m+2} \mathbf{v}_k(\mathbf{q})$$

где функция G аналитична и квадратична по $q^{\cdot}$, $\mathbf{v}_k$ — однородные полиномы степени k. Теперь будем следовать известной процедуре [2]. Пусть F —

пространство формальных рядов вида

$$\mathbf{q}(t)=\sum_{mj\leqslant i} a_{ij}(\ln(t))^j t^{-i/m}, \quad a_{ij}\in R^n, \quad i,j=0,1,\ldots$$

Обозначим $t^\nu F$ пространство рядов $t^\nu \mathbf{q}$, $\mathbf{q}\in F$. Строится формальное решение $\mathbf{q}\in t^{-1/m}F$ уравнений (3), причем коэффициенты a_{ij} определяются по индукции вперед по j и назад по i. Процесс индукции начинается с первого слагаемого

$$\mathbf{q}_1(t)=a_{00}t^{-1/m}$$

Подставляя $\mathbf{q}=\mathbf{q}_1(t)$ в левую часть уравнений (3), получим ряд

$$V'_{2m}(a_{00})\,t^{-2+1/m}+[(1/m)(1/m+1)\,a_{00}+V'_{2m+2}(a_{00})]\,t^{-2-1/m}+\ldots$$

(точки означают члены степени t строго меньше, чем $-2-1/m$. Два первых коэффициента этого ряда обращаются в нуль, если выбрать $a_{00}=a\mathbf{e}$, где a — подходящее действительное число и $\mathbf{e}$ определяется соотношением 2°. Действительно, так как $\mathbf{e}\in S$, $V_{2m}(a\mathbf{e})=0$ — абсолютный минимум V_{2m} и, следовательно, $V'_{2m}(a\mathbf{e})=0$. Второй коэффициент обращается в нуль, если

$$(1/m)(1/m+1)\,a\mathbf{e}+V'_{2m+2}(\mathbf{e})\,a^{2m+1}=0$$

В силу условия 2° существует действительное число $c>0$, такое, что $V'_{2m+2}(\mathbf{e})=-c\mathbf{e}$. Следовательно, этого достаточно, чтобы выбрать

$$a=((m+1)/(cm^2))^{1/2m}$$

Полагая теперь $a_{00}=a\mathbf{e}$ и

$$\mathbf{y}_2=\ddot{\mathbf{q}}_1+\mathbf{G}(\mathbf{q}_1,\dot{\mathbf{q}}_1)+\mathbf{v}(\mathbf{q}_1)$$

получим

$$\mathbf{y}_2\in t^{-2-1/m}F$$

и $\mathbf{y}_2$ не содержит членов степени t, выше чем $-2-2/m$. По индукции предполагаем, что для некоторого целого $N\geqslant 2$ найдем ряд

$$\mathbf{q}_{N-1}=\sum_{mj\leqslant i<N-1} a_{ij}(\ln t)^j t^{-i-1/m}$$

такой, что

$$\mathbf{y}_N=\ddot{\mathbf{q}}_{N-1}+\mathbf{G}(\mathbf{q}_{N-1},\dot{\mathbf{q}}_{N-1})+\mathbf{v}(\mathbf{q}_{N-1})$$

принадлежит пространству $t^{-2-1/m}F$ и не содержит степеней t, выше чем $-2-N/m$. Вопрос состоит в том, чтобы построить ряд, такой, что y_{N+1} принадлежит пространству $t^{-2-1/m}F$ и не содержит степеней t, выше чем $-2-(N+1)/m$. Для этого положим

$$\mathbf{q}_N=\mathbf{q}_{N-1}+\Delta\mathbf{q}, \quad \Delta\mathbf{q}=\sum_{mj\leqslant N-1} a_{N-1,\,j}(\ln t)^j t^{-N/m}$$

Тогда

$$\mathbf{y}_{N+1}=\mathbf{y}_N+\Delta\ddot{\mathbf{q}}+[V'_{2m}(\mathbf{q}_N)-V'_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})]+[V'_{2m+2}(\mathbf{q}_N)-V'_{2m+2}(\mathbf{q}_{N-1})]+$$
$$+[\mathbf{G}(\mathbf{q}_N,\dot{\mathbf{q}}_N)-\mathbf{G}(\mathbf{q}_{N-1},\dot{\mathbf{q}}_{N-1})]+\sum_{k\geqslant 2m+2}[\mathbf{v}_k(\mathbf{q}_N)-\mathbf{v}_k(\mathbf{q}_{N-1})] \qquad (4)$$

Правая часть равенства (4) в точности та же, что и в [2], за исключением выражения в первых скобках. Так как функция $\mathbf{G}$ квадратична по $\dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{v}_k$ — однородные полиномы степени k, то из разложения в ряд Тейлора в точке $(\mathbf{q}_{N-1}, \dot{\mathbf{q}}_{N-1})$ видно, что последние два выражения в скобках в (4) не содержат степеней по t, превосходящих $-2-(N+1)/m$.

Выражение во вторых скобках в (4) может быть записано в виде

$$V''_{2m+2}(\mathbf{q}_{N-1})\,\Delta\mathbf{q}+\ldots=V''_{2m+2}(\mathbf{q}_1)\,\Delta\mathbf{q}+\ldots$$

где точки означают члены со степенью t, строго меньшей $-2-N/m$, и степень $V''_{2m+2}(\mathbf{q})$ равна $-2-N/m$.

Рассмотрим теперь чуть более детально выражение в первых скобках, отсутствующее в [2]. Раскладывая его в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{q}_{N-1}$ и применяя очевидные небрежности в записи, представим его в виде

$$D^2V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})\,\Delta\mathbf{q}+{}^1/_2D^3V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})\,\Delta\mathbf{q}^2+{}^1/_6D^4V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})\,(\Delta\mathbf{q})^3+\ldots, \tag{5}$$

где точки означают степени, не превосходящие $-2+5/m-4N/m$, и следовательно, не превосходящие $-2-(N+1)/m$. Если $N=2$, то выписанные слагаемые в (5) обращаются в нуль в силу свойства 3°. Если $N>2$, то разложим $D^kV_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})$ ($k=2, 3, 4$) в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{q}_1$. Принимая во внимание свойство 3°, получим с теми же небрежностями в записи, что и выше,

$$D^2V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})={}^1/_6D^5V_{2m}(\mathbf{q}_1)\,(\mathbf{q}_{N-1}-\mathbf{q}_1)^3+\ldots$$
$$D^3V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})={}^1/_2D^5V_{2m}(\mathbf{q}_1)\,(\mathbf{q}_{N-1})-\mathbf{q}_1)^2+\ldots$$
$$D^4V_{2m}(\mathbf{q}_{N-1})=D^5V_{2m}(\mathbf{q}_1)\,(\mathbf{q}_{N-1}-\mathbf{q}_1)+\ldots$$

Так как $D^5V_{2m}(\mathbf{q}_1)$ содержит степени по t, максимально равные $-2+5/m$, и так как степени $(\mathbf{q}_{N-1}-\mathbf{q}_1)$ не превосходят $-2/m$, наивысшая степень по t величины D^kV_{2m} равна соответственно $-2-1/m$, $-2+1/m$, $-2+3/m$ для $k=2, 3, 4$. Но $\Delta\mathbf{q}$ имеет степень $-N/m$ и $N>2$. Таким образом, все члены в (5) и, следовательно, все члены выражения в первых скобках в (4) имеют степень по t, не превосходящую $-2-(N+1)/m$.

По предположению индукции $\mathbf{y}_N$ не содержит степени по t, выше чем $-2-N/m$. Обозначая через $\mathbf{z}$ сумму членов, содержащих $t^{-2-N/m}$ в $\mathbf{y}_N$, исключим все члены степени $-2-N/m$ в $\mathbf{y}_{N+1}$, решая уравнение

$$\Delta\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+V''_{2m+2}(\mathbf{q}_1)\,\Delta\mathbf{q}=-\mathbf{z}=\sum_{mj\leqslant N-1}\mathbf{z}_j(\ln t)\,t^{-2-N/m} \tag{6}$$

Это уравнение то же, что и в [2], и все выводы, сделанные в [2], верны также и для (6). Ради полноты завершим построение формального решения повторением аргументов из [2]. Наивысшая степень логарифма в правой части равенства (6) равна целой части $(N-1)/m$, т. е. $M=[(N-1)/m]$. Собирая члены этой степени, получим

$$(N/m)\,(N/m+1)\,a_{N-1,M}+V''_{2m+2}(a\mathbf{e})\,a_{N-1,m}=\mathbf{z}_m \tag{7}$$

Это уравнение имеет единственное решение $a_{N-1,m}$, если $(-N/m)\cdot(N/m+1)$ не является собственным значением $V''_{2m+2}(a\mathbf{e})$. Тензор $V''_{2m+2}(a\mathbf{e})$ симметричен и все его собственные значения действительны.

Вектор $\mathbf{e}$ — собственный вектор с собственным значением, равным $-((m+1)/m)\,(2m+1)/m$. В самом деле, по теореме Эйлера

$$V''_{2m+2}(a\mathbf{e})\,\mathbf{e}=\frac{2m+1}{a}\,V'_{2m+2}(a\mathbf{e})=-\frac{2m+1}{m}\,\frac{m+1}{m}\,\mathbf{e}$$

Пространство, ортогональное $\mathbf{e}$, является касательным к единичной сфере в $\mathbf{e}$. Так как $V_{2m+2}(\mathbf{e})$ — минимум на единичной сфере, все собственные значения, соответствующие этому пространству, неотрицательны. Таким образом, уравнение (7) имеет единственное решение при $N\neq m+1$.

Если $N\neq m+1$, подставим $\Delta\mathrm{q}$ в соотношение (6) с $a_{N-1,m}$, полученным из уравнения (7), другие коэффициенты $a_{N-1,j}$ при этом будут неопределенны. Тогда члены, содержащие $(\ln t)^M$, обратятся в нуль в уравнении

(6). Чтобы исключить члены, содержащие $(\ln t)^{M-1}$, решим уравнение

$$(N/m)(N/m+1)\,a_{N-1,M-1}+V''_{2m+2}(a\mathbf{e})\,a_{N-1,M-1}=\overset{*}{\mathbf{z}}_{M-1}$$

где $\overset{*}{z}_{M-1}$ — известная величина, зависящая от z_{M-1} и $a_{N-1,M}$. Повторением той же процедуры уравнение (6) решается за $(M+1)$ шаг.

Рассмотрим теперь исключительный случай $N=m+1$, $M=1$, когда

$$\mathbf{q}_m=\sum_{i<m}a_{i0}t^{-(i+1)/m},\quad \Delta\mathbf{q}=(a_{m0}+a_{m1}\ln t)\,t^{-(1+1/m)}$$

И в $\mathbf{y}_{m+1}$, и в правой части уравнения (6) отсутствуют члены, содержащие логарифмы. Это уравнение, таким образом, может быть записано в виде

$$\Delta\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+V''_{2m+2}(\mathbf{q}_1)\,\Delta\mathbf{q}=(\lambda\mathbf{e}+\mathbf{f})\,t^{-3-1/m}\tag{8}$$

где λ — действительное число, $\mathbf{f}$ — вектор, ортогональный $\mathbf{e}$. Расщепим уравнение (8) на уравнения для компонент $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Так как все собственные значения $V''(a\mathbf{e})$, соответствующие ортогональному к $\mathbf{e}$ пространству, неотрицательны, уравнение

$$(1+1/m)(2+1/m)\,a_{m0}t^{-3-1/m}+V''_{2m+2}(\mathbf{q}_1)\,a_{m0}t^{-1-1/m}=\mathbf{f}t^{-3-1/m}$$

имеет единственное решение a_{m0}, ортогональное вектору $\mathbf{e}$. Оставшееся уравнение

$$-(3+2/m)\,a_{m1}+[(1+1/m)(2+1/m)+V''_{2m+2}(a\mathbf{e})]\ln t a_{m1}=\lambda\mathbf{e}$$

справедливо при $a_{m1}=-\lambda\mathbf{e}/(3+2/m)$. Этим завершается построение формального решения.

В [2] детально показано, что формальное решение сходится к решению уравнения (3). Единственное отличие рассматриваемого здесь случая от изученного в [2] состоит в том, что слагаемое $V_{2m}(\mathbf{q})$ добавлено к потенциалу. Большинство вычислений в [2] не затрагивается введением этого дополнительного слагаемого и может быть повторено здесь без всяких изменений. Поэтому опустим их.

Лишь одно рассуждение из [2] требует определенного внимания при дополнении V_{2m} к потенциалу. Из формулы

$$\begin{aligned}t^2(V''_{2m+2}(\mathbf{q}_1)-\mathbf{v}'(\mathbf{q}_{2m}))&=V''_{2m+2}(a_{00})-V''_{2m+2}(t^{1/m}\mathbf{q}_{2m})-\\&-t^{-1/m}\mathbf{v}'_{2m+2}(t^{1/m}\mathbf{q}_{2m})+\ldots\end{aligned}\tag{9}$$

где точки означают степени t, меньшие, чем $-1/m$, норма оператора в (9) оценивается величиной $O(t^{-1/m}+t^{-1}\ln t)$ для больших t.

Покажем, что добавление V_{2m} к потенциалу не меняет этой оценки. Ясно, что

$$t^2V''_{2m}(\mathbf{q}_{2m})=t^{2/m}V_{2m}(t^{1/m}\mathbf{q}_{2m})$$

и

$$\begin{aligned}t^{1/m}q_{2m}&=a_{00}+a_{10}t^{-1/m}+\ldots+a_{2m-1,0}t^{-2+1/m}+\\&+a_{m,1}t^{-1}\ln t+\ldots+a_{2m-1,1}t^{-2+1/m}\ln t\end{aligned}$$

В силу предположения 3° разложение в ряд Тейлора функции V_{2m} в точке a_{00} начинается со слагаемых степени 3 по $t^{-1/m}$ и $t^{-1}\ln t$. Таким образом, для больших t

$$t^2V''_{2m}(\mathbf{q}_{2m})=O(t^{-1/m}+t^{-1}\ln t)$$

и получаем ту же оценку для нормы оператора в (9), что и в [2].

Таким образом, построенное выше решение сходится и неустойчивость начала координат следует из существования асимптотического решения.

Замечание 1. Теорема 1 представляет собой обобщение результатов работы [2] в случае $\mathbf{q} \in R^n$. В самом деле, если $V_{2m} \equiv 0$, то предположения 1° и 3° выполнены автоматически, 4° не нужно и 2° следует из введенных ранее [2] предположений.

Замечание 2. Область применений теоремы 1, конечно, ограничена тем, что для ненулевой функции V_{2n} предположение 3° требует $m \geqslant 3$. Более того, метод, применяемый в теореме 1, не работает, если минимум V_{2m+2} на единичной сфере находится вне области $V_{2m}(q) > 0$. Это становится ясным, если рассмотреть положительно определенный потенциал

$$V = x^8 - 4x^4y^6 + 5y^{12}$$

и потенциал

$$V = x^8 - 4x^4y^6 + y^{12}$$

доставляющий неустойчивое положение равновесия (см. [1]).

Указанный метод не может быть применен в случае, когда $V'_{2m}(\mathbf{e})\,\mathbf{e} = 2mV_{2m}(\mathbf{e}) \neq \neq 0$ и условие $V'_{2m}(\mathbf{e}) = 0$, появляющееся в доказательстве, не выполнено. Заметим, что условие $V'_{2m}(\mathbf{e}) = 0$ здесь эквивалентно условию $V_{2m}(\mathbf{e}) = 0$ или $\mathbf{e} \in S$.

Теорема 1 может быть применена, если $m \geqslant 3$ и если переменные, появляющиеся в V_{2m+2}, отличаются от переменных, появляющихся в V_{2m}, например, если

$$V(x, y, z, u) = x^6 + y^8 + z^8 - u^8 + \sum_{k>8} V_k(x, y, z, u)$$

Дополнение 1. Вспоминая процедуру доказательства теоремы 1, можно распространить эту теорему на случай $V(\mathbf{q}) = V_{2k}(\mathbf{q}) + \ldots + V_{2m+1}(\mathbf{q}) + V_{2m+2}(\mathbf{q}) + \ldots$ заменяя предположения 1° — 4° на следующие:

5° Функция $V_{2m+2}(\mathbf{q})$ имеет строго отрицательный локальный минимум на единичной сфере

6° $D^jV_i(\mathbf{e}) = 0,\ 2k \leqslant i \leqslant 2m + 1,\ 1 \leqslant j \leqslant 4 + 2m - i,$

7° $\varphi(\mathbf{q}) / |\mathbf{q}|^{2m-2k+2} \to 0$ при $\mathbf{q} \to 0$.

Заметим, что из условия $D^1V_i(\mathbf{e}) = 0$ следует, что $\mathbf{e}$ принадлежит множествам $V_i(\mathbf{q}) = 0$ $(i = 2k, \ldots, 2m + 1)$. Эти условия не эквивалентны условиям теоремы 1, где $k = m$. Заметим также, что функции V_{2m}, $V_{2k} + V_{2k+1}, \ldots, V_{2k} + \ldots + V_{2m+1}$ необязательно постоянно положительные.

Дополнение 2. После небольшой модификации, аналогичной указанной выше, теорему 1 можно также применять к случаю

$$V(\mathbf{q}) = V_{2k}(\mathbf{q}) + \ldots + V_{2m}(\mathbf{q}) + V_{2m+1}(\mathbf{q}) + \ldots$$

когда отрицательная часть потенциала определяется слагаемым нечетной степени $(2m + 1)$. Для этого заменим предположения 1° — 4° на следующие:

8° Функция $V_{2m+1}(\mathbf{q})$ имеет строго отрицательный локальный минимум на единичной сфере

9° $D^jV_i(\mathbf{e}) = 0,\ 2k \leqslant i \leqslant 2m,\ 1 \leqslant j \leqslant 3 + 2m - i$

10° $\varphi(\mathbf{q}) / |\mathbf{q}|^{2m-2k+1} \to 0$, при $\mathbf{q} \to 0$

Доказательство очень похоже на приведенное выше и здесь не будет воспроизводиться в деталях. Первое приближение решения уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{q}_1(t) = a_0 t^{-\mu},\quad a_0 \in R^n,\quad \mu = 2/(2m - 1)$$

$$a_0 = a\mathbf{e},\ a^{2m-1}c = 2(2m + 1)(2m - 1)^{-2},\ V'_{2m+1}(\mathbf{e}) = -c\mathbf{e}$$

Рассмотрим пространство формальных рядов

$$F = \{\mathbf{q}(t) = \sum a_i t^{-i\mu},\quad a_i \in R^n,\quad i = 0, 1, \ldots\}$$

и предположим, что для $N \geqslant 2$ найдено $(N - 1)$-е приближение

$$\mathbf{q}_{N-1}(t) = t^{-\mu}(a_0 + a_1 t^{-\mu} + \ldots + a_{N-2} t^{-(N-2)\mu})$$

принадлежащее $t^{-\mu}F$ такое, что

$$\mathbf{y}_N = \ddot{\mathbf{q}}_{N-1} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{N-1}, \dot{\mathbf{q}}_{N-1}) + \mathbf{v}(\mathbf{q}_{N-1})$$

принадлежит $t^{-2-\mu}F$ и не содержит степеней по t, выше чем $-2 - N\mu$. Тогда выберем

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{q}_{N-1} + \Delta\mathbf{q},\quad \Delta\mathbf{q} = a_{N-1}t^{-N\mu}$$

такое, что $\mathbf{y}_{N+1}$ принадлежит $t^{-2-\mu}F$ и не содержит степеней по t, выше чем $-2 - (N + 1)\mu$

В завершение доказательства достаточно решить уравнение

$$N\mu\,(N\mu + 1)\,a_{N-1} + V''_{2m+1}(ae)\,a_{N-1} = \mathbf{z} \tag{10}$$

где $\mathbf{z}$ — слагаемое степени $-2 - N\mu$ в $\mathbf{y}_N$. Оператор $V''_{2m+1}(ae)$ имеет ровно одно отрицательное собственное значение, соответствующее собственному вектору $\mathbf{e}$, оно равно $(-4m)(2m+1)(2m-1)^{-2}$. Можно проверить, что для любого положительного целого N число $(-N\mu)(N\mu+1)$ не является собственным значением $V''_{2m+1}(ae)$. Следовательно, уравнение (10) имеет единственное решение для любого положительного целого N, и формальное решение может быть построено в $t^{-\mu}F$.

Для того чтобы показать, что это формальное решение сходится, повторим аргументы из [2], заменяя величины m и $p = m/2 - 1$, появляющиеся в [2], на $2m+1$ и $m - {}^1/_2 = 1/\mu$ соответственно и опуская всюду логарифмы. Предположение 9° обеспечивает сохранение оценок в [2] при добавлении $(V_{2k} + \ldots + V_{2m})$ к потенциалу. Этим завершается доказательство.

Сравнивая рассуждения с теоремой 1, заметим, что формальное решение в дополнении 2 не содержит логарифмических членов. Это упрощение основывается на том факте, что в уравнении (10) нет критических значений N, в то время как уравнение (7) теоремы 1 в противоположность (10) имеет критическое значение $N = m + 1$, порождающее логарифмические члены.

Наконец, заметим, что если $V_{2k} = \ldots = V_{2m} \not\equiv 0$, то предположение 10° может быть опущено и 9° автоматически выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573—577.
2. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285—290.
3. *Legeune-Dirichlet G.* Über die Instabilitat des Gleichgewichts // J. Reine und Angew. Math. 1846. Bd. 32. P. 85—88.
4. *Wintner A.* The analytic foundations of celestial mechanics. Princeton: Univ. Press, 1941.
5. *Laloy M.* On equilibrium instability for conservative and partially dissipative mechanical systems. Sem. Math. Appl. Meca: Rapport № 82. Louvain: Univ. Cath. de Louvain, 1975.
6. *Salvadori L.* Sulla stabilita dell equilibrio nella meccanica dei sistemi olonomi // Boll. Un. Mat. Ital. 1968. V. 4. P. 333—344.
7. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitatatssatze von Lagrange — Dirichlet und Routh // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1971. V. 42, P. 281—315.
8. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. N. Y.; Heidelberg; Berlin: Springer, 1977.
9. *Lyapunov A. M.* Sur i'instabilite de l'equilibre dans certains cas ou la fonction des forces n'est pas un maximum // Journ. de Math. Ser. V. 3-Fasc. 1897. V. 1. P. 81—84.
10. *Koiter W. T.* On the instability of equilibrium in the absence of minimum of the potential energy // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wet. Ser. B. 1965. V. 68. P. 107—113.
11. *Четаев Н. Г.* О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 89—93.
12. *Taliaferro S. D.* An inversion of Lagrange — Dirichlet's theorem // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1980. V. 73. P. 183—190.
13. *Паламодов В. П.* Устойчивость равновесия в потенциальном поле // Функц. анализ и его приложения. 1977. Т. 11. Вып. 4. С. 42—55.
14. *Taliaferro S. D.* Stability for two dimensional analytic potentials // J. Diff. eq. 1980. V. 35. P. 248—255.
15. *Козлов В. В.* Неустойчивость равновесия в потенциальном поле // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 1. С. 209—210.
16. *Laloy M., Peiffer K.* On the instability of equilibrium when potential has a non-strict local minimum // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1982. V. 78. P. 213—222.
17. *Козлов В. В.* О неустойчивости равновесия в потенциальном поле // Успехи мат. наук. 1981. № 3. С. 215—216.
18. *Carlier P., Peiffer K.* A remark on the inversion Lagrange-Dirichlet's theorem // Semin. math: Rapport 138. Louvain: N. S. Univ. Cath., 1988. P. 1—15.
19. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа—Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.

Бельгия

Поступила в редакцию
8.XII.1989