Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

А. С. Андреев

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЧАСТИЧНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуется задача о частичном притяжении движения, об асимптотической устойчивости невозмущенного движения по части переменных при предложении существования функции Ляпунова, имеющую знакопостоянную производную. Решение основано на определении динамических свойств частичного положительного предельного множества типа непрерывности и инвариантности. Полученные результаты модифицируют и обобщают ряд известных теорем об асимптотической устойчивости по части переменных. Рассматриваются примеры.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$x^{\cdot} = X(t, x); \quad X : R^+ \times \Gamma \to R^m \tag{1.1}$$

$$x \in R^m, \quad x = (y, z), \quad y \in R^s, \quad z \in R^p \ (m = s + p)$$

$$R^+ = [0, +\infty[, \ \Gamma = \{\|y\| \langle H \rangle 0, \ \|z\| < +\infty\},$$

$$\|x\| = \|y\| + \|z\|$$

($\|y\|$ — некоторая норма в R^s, $\|z\|$ — в R^p). Функция X удовлетворяет условиям существования решений в смысле Каратеодори [1] и условиям z — продолжимости решений [2].

Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ — некоторое решение системы (1.1), определенное для всех $t \geqslant t_0$. Частичное положительное предельное множество этого решения $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ есть множество точек $y^* \in \Gamma_y = \{y \in R^s: \|y\| < H\}$, для каждой из которых существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $y(t_n, t_0, x_0) \to y^*$ [3].

Введение дополнительных условий относительно правой части (1.1) позволяет вывести аналитические свойства $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ типа непрерывности и инвариантности.

Свойство непрерывности $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$. Допустим, что функция $Y(t, x)$: $R^+ \times \Gamma \to R^s$ удовлетворяет следующему условию: для каждого множества $\Gamma_1 = \{\|y\| \leqslant H_1 < H, \ \|z\| < +\infty\}$ существует неубывающая функция μ_1: $R^+ \to R^+$, непрерывная в нуле со значением $\mu_1(0) = 0$, и такая, что для любой непрерывной функции u: $[a, b] \to \Gamma_1$ выполнено неравенство

$$\left\| \int_a^b Y(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant \mu_1(|b - a|) \tag{1.2}$$

При этом условии для каждого решения системы (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$ функция $\mu_1(t)$ является оценкой непрерывности y-составляющей этого решения $y(t, t_0, x_0)$ при всех значениях $t \geqslant t_0$, для которых $x(t, t_0, x_0) \in \Gamma_1$. В частности, если решение $x(t, t_0, x_0) \in \Gamma_1$ для всех $t \geqslant t_0$, то $y(t, t_0, x_0)$ — равномернонепрерывная функция по $t \in [t_0, +\infty[$.

Отсюда следует, что если для решения $x = x(t, t_0, x_0)$ множество его y-предельных точек $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0)) \cap \Gamma_y \neq \varnothing$, то для каждой точки $y^* \in \omega_y^+(x(t, t_0, x_0)) \cap \Gamma_y$ имеется непрерывная функция $y = \psi(t)$:

$]\alpha, \beta[\to \Gamma_y$, такая, что $\psi(0) = y^*$ $(0 \in]\alpha, \beta[)$, множество значений $\{y = \psi(t)\colon \alpha < t < \beta\} \subset \omega_y^+(x, (t, t_0, x_0))$.

Свойство инвариантности $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$. Допустим, что функция $Y(t, x) : R^+ \times \Gamma \to R^s$ удовлетворяет следующему условию: для каждого множества $\Gamma_1 = \{\|y\| \leqslant H_1, \|z\| < +\infty\}$ существуют две локально-интегрируемые функции $\lambda_1(t)$ и $\eta_1(t) \in L_1$, такие, что для всех $t \in R^+$; $y, y_1, y_2 \in \Gamma_{1y} = \{y \in R^s : \|y\| \leqslant H_1\}$, $z \in R^p$ выполнены соотношения

$$\|Y(t, y, z)\| \leqslant \lambda_1(t)$$
$$\|Y(t, y_2, z) - Y(t, y_1, z)\| \leqslant \eta_1(t)\|y_2 - y_1\| \qquad (1.3)$$

при этом функция $\lambda_1(t)$ равномернонепрерывна в среднем, функция $\eta_1(t)$ равностепенно ограничена в среднем, т. е.

$$\int\limits_E \lambda_1(\tau)\,d\tau \leqslant \varepsilon, \quad \int\limits_t^{t+1} \eta_1(\tau)\,d\tau \leqslant N_1 \qquad (1.4)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $t \in R^+$, любого множества $E \subset [t, t+1]$ с мерой $m(E) \leqslant \delta_1(\varepsilon) > 0$ и некоторого числа N_1 [4].

Зафиксируем для каждой области Γ_1 числа δ_1 и N_1 из неравенств (1.4). Определим F_Ψ как пространство функций $\Psi\colon R \times \Gamma_y \to R^s$, для каждой из которых в каждой области Γ_{1y} имеются две функции $\lambda_1(t, \Psi)$ и $\eta_1(t, \Psi) \in L_1$, удовлетворяющие неравенствам вида (1.4) с фиксированными числами δ_1 и N_1, а также для всех $t \in R$, $y, y_1, y_2 \in \Gamma_{1y}$ — соотношениям

$$\|\Psi(t, y)\| \leqslant \lambda_1(t, \Psi), \quad \|\Psi(t, y_2) - \Psi(t, y_1)\| \leqslant \eta_1(t, \Psi)\|y_2 - y_1\|$$

Используя известные результаты [4], можно найти, что пространство F_Ψ компактно и метризуемо.

Для некоторого числа $H_0 < H$ обозначим через $M_z(t, t_0) \subset \Gamma_z$ множество, являющееся объединением по $x_0 \in \Gamma_0 = \{\|x\| \leqslant H_0\}$ z-составляющих решений $x = x(t, t_0, x_0)$, т. е.

$$M_z(t, t_0) = \bigcup \{z(t, t_0, x_0)\colon \|x_0\| \leqslant H_0\}$$

Пусть $z = z(t) \in M_z(t, t_0)$ — произвольная непрерывная функция. Положим $Y'(t, y) = Y(t, y, z(t))$. Свойство сдвигов $\{Y_\tau'(t, y) = Y'(t + \tau, y), \tau \in R^+\}$ согласно построению F_Ψ будет предкомпактно в F_Ψ.

Рассмотрим некоторое решение системы (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Gamma_0$, определенное для всех $t \geqslant t_0$. Составляющая $y(t) = y(t, t_0, x_0)$ является решением s первых уравнений системы (1.1), т. е. системы

$$y^\cdot = Y'(t, y), \quad Y'(t, y) = Y(t, y, z(t)), \; z(t) = z(t, t_0, x_0) \qquad (1.5)$$

Можно определить [4], что из предкомпактности семейства $\{Y_\tau'(t, y)\}$ и существования предельных функций Ψ следуют предкомпактность системы (1.5) и существование семейства предельных систем

$$y^\cdot = \Psi(t, y), \quad \Psi \in F_\Psi \qquad (1.6)$$

При этом система (1.5) регулярна в том смысле, что решения системы (1.6) имеют свойство единственности.

Множество $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ решения системы (1.1) совпадает с множеством $\omega^+(y(t))$ соответствующего решения системы (1.5), квазиинвариантным относительно семейства предельных систем (1.6) [4]. Отсюда следует, что множество $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ также квазиинвариантно относительно систем (1.6). А именно, для каждой точки $y_0 \in \omega_y^+ \cap \Gamma_y$ существует решение $y = \psi(t)\colon]\alpha, \beta[\to \Gamma_y, \psi(0) = y_0$ $(0 \in]\alpha, \beta[)$ одной из предельных систем (1.6), такое, что

$$\{y = \psi(t) : \alpha < t < \beta\} \subset \omega_y^+ (x(t, t_0, x_0))$$

Замечание 1. Аналогично (1.6) можно определить семейство предельных систем по отношению к однопараметрическому семейству функций $\{z_\nu(t) \in M_z(t, \nu), \nu \in R^+\}$. Правая часть $\Psi(t, y)$ предельной системы при этом определяется как предельная точка некоторой последовательности $\{Y_\nu'(t, y) : \nu = \nu_n \to +\infty\}$.

Свойства инвариантности $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ и $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$. Предположим, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет следующему условию: для каждого компакта $K \subset \Gamma$ выполняются соотношения

$$\| X(t, x) \| \leqslant \lambda_K(t), \quad \| X(t, x_2) - X(t, x_1) \| \leqslant \eta_K(t) \| x_2 - x_1 \| \tag{1.7}$$

где функции λ_K, $\eta_K \in L_1$ таковы, что имеются два числа $N = N(K)$ и $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$, удовлетворяющие неравенствам вида (1.4). При этом условии семейство сдвигов $\{X_\tau(t, x) = X(t + \tau, x),\ \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором метризуемом компактном функциональном пространстве F_Φ [4] и системе (1.1) может быть поставлено в соответствие семейство предельных систем

$$\dot{x} = \Phi(t, x), \quad \Phi \in F_\Phi \tag{1.8}$$

причем полное положительное предельное множество $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ квазиинвариантно по отношению к (1.8). Тем самым для ограниченных по z решений системы (1.1) множество $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ определяется как проекция $(\omega^+(x(t, t_0, x_0)))_y$. Для неограниченных по z решений необходимо провести дальнейшее построение.

Допустим, что функция $Z : R^+ \times \Gamma \to R^p$ удовлетворяет условию: для каждой непрерывной функции $u = u(t) : R^+ \to \Gamma$ при каждом значении $\gamma \in [0, 1]$:

$$\left\| \int_t^{t+\gamma} Z(\tau, u(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant l(u) \tag{1.9}$$

При этом z-составляющая $(z(t) = z(t, t_0, x_0))$ решения (1.1), определенного для всех $t \geqslant t_0$, имеет ограниченное изменение $\| z(t + \tau) - z(t) \| \leqslant l(T + 1)$ на каждом отрезке $[0, T]$ равномерно по $\tau \in [t_0, +\infty[$. Следовательно, если $\| z_k \| = \| z(t_k, t_0, x_0) \| \to +\infty$ при $t_k \to +\infty$, то для каждого $t \in R^+$ также $\| z(t_k + t, t_0, x_0) \| \to +\infty$ при $t_k \to +\infty$, а последовательность функций $\| z(t_k + t, t_0, x_0) \|$ равномерно ограничена по $t \in [0, T]$.

Предположим также, что функция $Y(t, x)$ удовлетворяет модифицированным условиям (1.3), (1.4): для каждого множества $\Gamma_1 = \{\| y \| \leqslant H_1 < H, \| z \| < +\infty\}$ существуют функция $\lambda_1(t) \in L_1$, равномерно непрерывная в среднем (т. е. удовлетворяющая первому соотношению (1.4)), и постоянная N_1, такие, что для всех $t \in R^+$, $(y, z) \in \Gamma_1$ и $y_1, y_2 \in \Gamma_{1y}$ выполняются соотношения

$$\| Y(t, y, z) \| \leqslant \lambda_1(t),$$
$$\overline{\lim_{\|z\| \to +\infty}} \| Y(t, y_2, z) - Y(t, y_1, z) \| \leqslant N_1 \| y_2 - y_1 \| \tag{1.10}$$

Аналогичные условия будут выполнены и для каждой последовательности функций $Y_k'(t, y) = Y(t_k + t, y, z_k + z_k(t))$, если $t_k \to +\infty$ и $\{z_k : \| z_k \| \to +\infty\}$ — произвольные последовательности, $\{z_k(t)\}$ — произвольная последовательность непрерывных, равномерноограниченных на $[0, T]$ функций. Тем самым эта последовательность $\{Y_k'(t, y)\}$

оказывается, как и в случае (1.3), (1.4), предкомпактной относительно некоторого пространства F_Ψ функций Ψ: $R \times \Gamma_y \to R^S$. И системе (1.1), кроме систем (1.8), может быть поставлено в соответствие семейство предельных систем вида (1.6) $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$.

В силу проведенного построения для множества $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ имеет место следующее свойство типа инвариантности. Если $y(t_k, t_0, x_0) \to y^*$ при $t_k \to +\infty$ и последовательность $\{z_k = z(t_k, t_0, x_0)\}$ ограничена, то существует решение $x = \varphi(t) = (\psi(t), \theta(t))$ предельной системы, такое, что $\psi(0) = y^*$, $y = \psi(t)$ содержится в $\omega^+_y(x(t, t_0, x_0))$ на всем интервале определения $]\alpha, \beta[$ решения $x = \varphi(t)$. Если же $\| z_k \| \to +\infty$, то существует решение $y = \psi(t)$ предельной системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$, такое, что $\psi(0) = y^*$, $\{\psi(t)\colon \alpha < t < \beta\} \subset \omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$, при этом правая часть системы $\Psi(t, y)$ есть предельная точка последовательности $\{Y_k'(t, y) = Y(t_k + t,\ y, z_k + z_k(t)),\ z_k(t) = z(t_k + t, t_0, x_0)\}$.

Замечание 2. Дополнительные ограничения относительно $Z(t, x)$ позволяют учесть .-свойства системы (1.1) при $\| z \| \to +\infty$. Такая постановка рассмотрена в [5].

2. Предположим, что для системы (1.1) существует непрерывная функция $V(t, x)$: $R^+ \times \Gamma \to R$, удовлетворяющая локально условию Липшица по x и имеющая тем самым производную $V^{\cdot +}(t, x)$ [6]. Допустим, что для производной выполняется неравенство $V^{\cdot +}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$, где W: $R^+ \times \Gamma \to R^+$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори аналогично $X(t, x)$.

Исследуем предельное поведение решений системы (1.1) относительно y в зависимости от условий, накладываемых на ее правую часть $X(t, x)$. Для этого введем следующие определения.

Пусть $t_n \to +\infty$ — определенная последовательность, а $t \in R$ и $c \in R$ — некоторые значения. Множество $P_\infty(t, c) \subset \Gamma_y$ — есть множество точек $y \in \Gamma_y$, для каждой из которых существуют последовательности точек $y_n \to y$ и $\{z_n \in R^p\}$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} V(t_n + t, y_n, z_n) = c$$

Предположим, что функция $W(t, x)$ удовлетворяет условиям вида (1.3)

$$| W(t, x) | \leqslant \lambda_1(t), \quad | W(t, y_2, z) - W(t, y_1, z) | \leqslant \eta_1(t) \| y_2 - y_1 \| \qquad (2.1)$$

где функция $\lambda_1(t) \in L_1$ равномернонепрерывна в среднем, $\eta_1(t) \in L_1$ равностепенноограничена в среднем, т. е. выполнены соотношения типа (1.4).

Как и ранее для случая $Y(t, x)$, можно найти, что существует некоторое компактное метризуемое пространство F_Ω функций Ω: $R \times \Gamma_y \to R^+$, в котором семейство сдвигов $\{W_\tau'(t, y) = W'(t + \tau, y), W'(t, y) = W(t, y, z(t))\}$ для любой непрерывной функции $z(t) \in M_z(t, t_0)$ предкомпактно. И для любой последовательности $t_n \to +\infty$ найдутся подпоследовательность $t_{nj} \to +\infty$ и функция $\Omega \in F_\Omega$, такие, что для произвольной последовательности непрерывных функций $v_j(t)$: $[a, b] \to \Gamma_y$, сходящейся равномерно к $v^*(t)$: $[a, b] \to \Gamma_y$, имеет место равенство

$$\int_a^b \Omega(\tau, v^*(\tau))\, d\tau = \lim_{j\to\infty} \int_a^b W(t_{nj} + \tau, v_j(\tau), z(t_{nj} + \tau))\, d\tau$$

Функция Ω — предельная к W относительно $z(t) \in M_z(t, t_0)$.

Будем считать, что множество значений $\{y = \psi(t)\colon \alpha < t < \beta\}$ содержится в $\{\Omega(t, y) = 0\}$, если для любых $t_1, t_2 \in]\alpha, \beta[$ выполняется равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \Omega(\tau, \psi(\tau))\, d\tau = 0$$

Теорема 1. Предположим, что

1) функция $Y(t, x)$ удовлетворяет условию (1.2);

2) существует функция $V = V(t, x)$, ограниченная снизу на каждом множестве $R^+ \times \Gamma_1$, имеющая производную в силу системы (1.1) $V^{\cdot+}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$, при этом для функции W выполняются соотношения (2.1);

3) решение системы (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$ ограничено по y, $\| y(t, t_0, x_0) \| \leqslant H_1 < H$ для всех $t \geqslant t_0$.

Тогда множество $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ этого решения есть объединение подмножеств непрерывных значений $\{y = \psi(t)\colon -\infty < t < +\infty\} \subset \{P_\infty(t, c)\colon c = c_0 = \mathrm{const}\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$, где $\Omega(t, y)$ — функция, предельная к W относительно $z = z(t, t_0, x_0)$. определяемая той же последовательностью $t \to +\infty$, что и значения $y = \psi(t)$.

Доказательство. Из условий *2* и *3* теоремы следует, что существует значение $c = c_0 = \mathrm{const}$, такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, y(t, t_0, x_0),\ z(t, t_0, x_0)) = c_0 \tag{2.2}$$

Положим, что $z(t) = z(t, t_0, x_0)$. Пусть $y^* \in \omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$, а именно $y(t_k, t_0, x_0) \to y^*$ при $t_k \to +\infty$. В силу условия *1* теоремы существует подпоследовательность $k_j \to \infty$ и непрерывная функция $y = \psi(t)\colon R \to \Gamma_y$, такие, что $\psi(0) = y^*$, последовательность $y_{kj}(t) = y(t_{kj} + t, t_0, x_0)$ сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ к $y = \psi(t)$. При этом $\{y = \psi(t)\colon t \in R\} \subset \omega_y^+$, а из соотношения (2.2) имеем

$$\lim_{j \to \infty} V(t_{kj} + t,\ y_{kj}(t),\ z(t_{kj} + t)) = c_0$$

Отсюда следует, что $\psi(t) \in \{P_\infty(t, c)\colon c = c_0 = \mathrm{const}\}$ для всех $t \in R$. Из условия $V^{\cdot+}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$ можно найти соотношение

$$V(t_{kj} + t) - V(t_{kj}) \leqslant -\int_0^t W'_{kj}(\tau, y_{kj}(\tau))\, d\tau \leqslant 0$$

$$W_{kj}'(t, y_{kj}(t)) = W(t_{kj} + t,\ y_{kj}(t),\ z(t_{kj} + t))$$

Следовательно, выбрав подпоследовательность $k_{ji} \to \infty$, для которой $\{W'_{kji}(t, y)\}$ сходится к некоторой предельной функции $\Omega(t, y)$, переходя к пределу при $k_{ji} \to \infty$, найдем, что

$$\{y = \psi(t)\colon t \in R\} \subset \{\Omega(t, y) = 0\}$$

Таким образом, для каждой точки $y^* \in \omega_y^+$ существует непрерывная функция $\psi(t)\colon R \to \Gamma_y$, такая, что $\psi(0) = y^*$, $\{\psi(t)\colon t \in R\} \subset \omega_y^+$, $\psi(t) \in \{P_\infty(t, c)\colon c = c_0 = \mathrm{const}\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$ для всех $t \in R$. Тем самым теорема доказана.

Свойство квазиинвариантности положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ или $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ позволяет качественно видоизменить полученный результат.

Пусть функции $Y(t, x)$ и $W(t, x)$ удовлетворяют соответственно условиям (1.3) и (2.1). Предельные к Y и W функции Ψ и Ω образуют предельную пару (Ψ, Ω), если они определяются относительно $z(t) \in M_z(t, t_0)$ для одной и той же последовательности $t_k \to +\infty$. Для этой же последовательности определим множество $P_\infty(t, c)$.

Обозначим через $N(c)$ максимально инвариантное по отношению к системе $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$ подмножество множества $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const}\} \cap \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$, через $N_*(c)$ — объединение $N(c)$ по предельным парам (Ψ, Ω) относительно функции $z(t) \in M_z(t, t_0)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 предположим также, что функция $Y(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.3).

Тогда существует значение $c = c_0 = \text{const}$, такое, что $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0)) \subset \subset N_*(c_0)$, т. е. $y(t, t_0, x_0) \to N_*(c_0)$ при $t \to +\infty$.

Допустим, что функции $X(t, x)$ и $Y(t, x)$ удовлетворяют соответственно условиям (1.7) и (1.10), а функция $W(t, x)$ как условиям (2.1), так и вида (1.10). Примем следующее обозначение из [7]. Если (Φ, Λ) — пара, предельная к (X, W), определяемая совместно с множеством $V_\infty^{-1}(t, c)$ некоторой последовательностью $t_n \to +\infty$, то $E(c)$ — максимально инвариантное относительно системы $x^{\cdot} = \Phi(t, x)$ подмножество множества $\{V_\infty^{-1}(t, c)\colon\ c = \text{const}\} \cap \{\Lambda(t, x) = 0\}$, $E^*(c)$ — объединение $E(c)$ по всем предельным парам (Φ, Λ), $(E^*)_y$ — проекция E^* на гиперплоскость $z = 0$.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 предположим также, что функции $X(t, x)$, $Y(t, x)$, $W(t, x)$ удовлетворяют условиям (1.7) и (1.10).

Тогда существует значение $c = c_0 = \text{const}$, такое, что $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0)) \subset (E^*)_y \cup N_*$, т. е. $y(t, t_0, x_0) \to (E^*(c_0))_y \cup N_*(c_0)$ при $t \to +\infty$.

Замечание 3. Множество $N^*(c_0)$ в выводе теоремы 3 содержит y-предельные точки решения $x = x(t, t_0, x_0)$, которые определяются последовательностями $\{y(t_k, t_0, x_0) \to y,\ \|z(t_k, t_0, x_0)\| \to +\infty\}$, множество $E^*(c_0)$ — y-предельные точки $x = x(t, t_0, x_0)$, для которых $\|z(t_k, t_0, x_0)\| \leqslant l$ при всех $t_k \to +\infty$.

3. Допустим, что $X(t, 0) \equiv 0$, тогда система (1.1) имеет нулевое решение $x = 0$. Из предыдущих результатов в зависимости от предложений относительно X имеют место достаточные условия асимптотической устойчивости решения $x = 0$ относительно переменных y, сформулированные в виде приводимых ниже теорем

Теорема 4. Предположим, что

1) существует функция $V = V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$, определенно-положительная по y, $V(t, x) \geqslant h(\|y\|) \geqslant 0$ [9], имеющая производную в силу системы (1.1) $V^{\cdot +}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$;

2) каждая функция $\Omega(t, y)$, предельная к $W(t, y, z(t))$ относительно произвольной функции $z = z(t) \in M_z(t, t_0)$ такова, что множество

$$\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} \geqslant 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\} = \{y = 0\}$$

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Условия приведенной теоремы относительно $V^{\cdot}$ слабее соответствующего условиям теорем В. В. Румянцева [8, 9] и теоремы типа Марачкова [10, 11].

Пример. 1. Рассмотрим линейную систему

$$y^{\cdot} = -\sin^2 ty + z_1 - z_2 e^t,\quad z_1^{\cdot} = z_2 e^t,\quad z_2^{\cdot} = ye^{-t} \tag{3.1}$$

Для функции $2V = y^2 + (z_1 - z_2 e^t)^2$ ее производная $V^{\cdot} = -\sin^2 ty^2 \leqslant 0$. Так как вдоль решения системы $(z_1 - z_2 e^t)^2 \leqslant 2V \leqslant 2V_0$, то правая часть первого уравнения (3.1) удовлетворяет условию (1.2) вдоль каждого решения системы. Функция, предельная к $W(t, y) = \sin^2 ty^2$,— есть $\Omega(t, y) = y^2 \sin^2(t + \alpha)$, $\alpha = \text{const}$, $0 \leqslant \alpha < < \pi$. Согласно теореме 3, решение $y = z_1 = z_2 = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво. Такой результат для подобной системы был получен [9, 12] оценкой второй производной функции V.

Теорема 5. Пусть при условии 1 теоремы 4 также выполнено следующее условие: относительно каждой функции $z(t) \in M_z(t, t_0)$ существует хотя бы одна предельная к $W(t, y, z(t))$ функция $\Omega(t, y)$, такая, что множество $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} > 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\} = \varnothing$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0.

Теорема 6. В дополнение к условию 1 теоремы 4 допустим, что $V(t, x) \leqslant h_2(\|x\|)$, а также, что каждая предельная относительно произвольного семейства функций $\{z_n(t) \in M_z(t, \nu_n), \nu_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty\}$ функция $\Omega(t, y)$ такова, что множество $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} > 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\} = \varnothing$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Условия теорем [4—6] слабее соответствующих условий ряда имевшихся ранее теорем [2, 8—10, 13].

Допустим, что функция $Y(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.3), (1.4), так что имеет место свойство квазиинвариантности $\omega_y^+(x(t, t_0, x_0))$ относительно систем (1.6).

Теорема 7. Предположим, что

1) существует функция $V = V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$, $V(t, x) \geqslant h(\|y\|) \geqslant 0$, $V^{\cdot+}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$;

2) для каждой предельной относительно произвольной функции $z(t) \in M_s(t, t_0)$ пары (Ψ, Ω) максимально инвариантное относительно системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$ подмножество множества $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} \geqslant 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$ состоит не более, чем из точки $y = 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Теорема 8. Пусть при условии 1 теоремы 7 также выполнено следующее условие: относительно каждой функции $z(t) \in M_z(t, t_0)$ существует хотя бы одна предельная пара (Ψ, Ω), такая, что множество $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} > 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$ не содержит решений системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0.

Теорема 9. В дополнении к условию 1 теоремы 7 допустим, что $V(t, x) \leqslant h_2(\|x\|)$, а также, что выполнено следующее условие — каждая предельная относительно произвольного семейства функций $\{z_k(t) \in M_z(t, \nu_k), \nu_k \to +\infty \text{ при } k \to \infty\}$ пара (Ψ, Ω) такова, что множество $\{P_\infty(t, c)\colon c = \text{const} > 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$ не содержит решений системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= -y_1 + p(t)\, y_2 - y_1 y_2^2 \sin^2 t\,(1 + \sin^2(z_1 + z_2)) \\ y_2^{\cdot} &= p(t)\, y_1 - y_2 + y_1^2 y_2 \sin^2 t\,(1 + \sin^2(z_1 + z_2)) \\ z_1^{\cdot} &= f_1(t, y, z), \quad z_2^{\cdot} = f_2(t, y, z) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где непрерывная функция $p(t)$ такова, что $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$, а также $f_1(t, 0, 0) = f_2(t, 0, 0) = 0$.

Уравнения, предельные к первым двум уравнениям, имеют вид

$$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= -y_1 + p^*(t)\, y_2 - y_1 y_2^2 \sin^2(t + \alpha)\,(1 + q^*(t)) \\ y_2^{\cdot} &= p^*(t)\, y_1 - y_2 - y_1^2 y_2 \sin^2(t + \alpha)\,(1 + q^*(t)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $p^*(t)$ и $q^*(t)$ — функции, предельные к $p(t)$ и $\sin^2(z_1(t) + z_2(t))$, а значит, $q^*(t) \geqslant 0$.

Производная функции $V = (y_1^2 + y_2^2)/2$ в силу системы (3.2) $V^{\cdot} \leqslant -(y_1 - y_2)^2 \leqslant 0$. Можно показать, что множество $\{y_1^2 + y_2^2 > 0\} \cap \{y_1 = y_2\}$ не содержит решений предельной системы (3.3). Согласно теореме 9, нулевое решение системы (3.2) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Аналогичным образом, исходя из теоремы 3, можно вывести результаты об асимптотической y-устойчивости, равномерной по x_0 асимптотической y-устойчивости, а также об y-неустойчивости, когда правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям (1.7), (1.9), (1.10). Не приводя их, отметим, что аналогичные результаты при ином подходе и в иной форме получены в [14, 15].

При условиях (1.7), (1.9), (1.10) имеет место также следующая теорема.

Теорема 10. Предположим, что

1) существует функция $V = V(t, x)$, такая, что
$h_1(\| y \|) \leqslant V(t, x) \leqslant h_2(\| x \|)$, $V^{\cdot +}(t, x) \leqslant -W(t, x) \leqslant 0$

2) для любой предельной к (X, W) пары (Φ, Λ) множество $\{V_\infty^{-1}(t, c)$: $c = \mathrm{const} > 0\} \cap \{\Lambda(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$;

3) для любой предельной к (Y, W) относительно произвольной последовательности непрерывных функций $\{z_k(t)\}$ пары (Ψ, Ω) множество $\{P_\infty(t, c)$: $c = \mathrm{const} > 0\} \cap \{\Omega(t, y) = 0\}$ не содержит решений системы $y^{\cdot} = \Psi(t, y)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически y-устойчиво.

Заметим также, что аналогичным образом могут быть получены результаты о частичной неустойчивости.

Пример 3. Пусть неоднородный шар безотрывно катается и вертится на шероховатой горизонтальной плоскости Oxy, совершающей вертикальные колебания по закону $z = z(t)$ относительно неподвижной оси $O_2z \parallel Oz$, ось Oz направлена вертикально вверх. Рассмотрим случай, когда центр масс шара не совпадает с центром O_1 шара, но центральный эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения и ось симметрии проходит через геометрический центр шара. Конфигурация тела определяется декартовыми координатами x, y точки соприкосновения шара с плоскостью, углами Резаля θ и ψ и углом поворота φ относительно оси динамической симметрии $O_1\zeta$, параллельной плоскости Oxz [16].

Принимая обозначения [16], рассмотрим задачу об устойчивости двух семейств положений равновесия шара, при которых

$$\theta = 0, \ \psi = 0; \ \theta = \pi, \ \psi = 0$$

и соответственно центр масс шара находится на одной вертикали ниже и выше точки O_1.

Взяв в качестве функции Ляпунова $V = T/(g + z_1^{\cdot\cdot}) - ml \cos\psi \cos\theta$, где T — кинетическая энергия тела, и, применив теорему 9, можно найти, что под действием вязкого трения при условиях

$$g + z_1^{\cdot\cdot}(t) \geqslant \varepsilon = \mathrm{const} > 0, \ 2h_1 (g + z_1^{\cdot\cdot}) + z_1^{(3)}(t)\, C \geqslant \varepsilon$$

$$2h (g + z_1^{\cdot\cdot}(t)) + z_1^{(3)} (mR^2 + 2mlR + A + ml^2) \geqslant \varepsilon$$

первое семейство положений равновесия равномерно асимптотически устойчиво по $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, θ, ψ, второе неустойчиво.

Пример 4. Прикладной интерес представляет задача об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе и влиянии параметров на эту устойчивость [17, 18].

Используя постановку и формулы из [18], рассмотрим случай системы, когда под действием некоторых сил внешняя рамка вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, тяжелый несимметричный ротор имеет переменную угловую скорость $d\varphi/dt = \omega(t)$, а ось внутренней рамки горизонтальна. Среди движений системы выделяется такое, в котором ось ротора направлена по вертикали, соответственно угол поворота внутренней рамки $\vartheta = 0$.

В качестве функции Ляпунова примем

$$V = {}^1/_2\,(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\,\vartheta^{\cdot 2}/k\,(t,\ \varphi,\ \vartheta) + \sin^2({}^1/_2\vartheta),\ k\,(t,\ \varphi,\ \vartheta) =$$
$$= C\Omega\omega\,(t) + Mga_* + (C' - B_2 - B\cos^2\varphi - A\sin^2\varphi)\,\Omega^2\cos^2({}^1/_2\vartheta) -$$
$$-(A - B)\,\Omega\omega\,(t)\sin\varphi\cos^2({}^1/_2\vartheta)\ (\inf\,(k\,(t,\ \varphi,\ 0),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) \geqslant k_0 > 0)$$

После некоторых вычислений можно найти, что $V^{\cdot} \leqslant -k_0\vartheta^{\cdot 2} \leqslant 0$, если

$$\inf\,(k\,(t,\varphi,0)\,(2h - (A - B)\,\omega\sin^2\varphi) + (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial k}{\partial t}(t,\varphi,0) + \frac{\partial k}{\partial \varphi}(t,\varphi,0)\,\omega\right),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \geqslant k_0 > 0$$

Составив предельные уравнения, на основании теоремы 9 можно заключить, что при этих условиях выделенное движение объекта равномерно асимптотически устойчиво по $\vartheta^{\cdot}$ и ϑ. Анализ условий указывает на существенное влияние несимметричности ротора на устойчивость, при больших ω коэффициент вязкого трения h должен быть достаточно большим.

Отметим, что при значении $\omega = -Mga_*/C\Omega$ система имеет также движение, при котором ось ротора горизонтальна, $\vartheta = \pi/2$. Следуя предыдущему анализу, можно найти следующие достаточные условия асимптотической устойчивости этого движения по $\vartheta^{\cdot}$ и ϑ:

$$k_0 = (B + B_2 - C')\,\Omega^2 - (A - B)\,Mga_*/C > 0$$
$$(2h - (A - B)\,Mga_*/(C\Omega))\,k_0 - A\,(A - B)\,(\,|\,\Omega\,|\,\omega^2 + \Omega^2\,|\,\omega\,|\,) > 0$$

где для определенности полагается $A > B$.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постоянное внимание и полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных урав нений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных / ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
3. *Hatvani L.* A generalization of the Barbashin — Krasovskij theorems to the partial stability in nonautonomous systems // Coll. Mat. Soc. Janos Bolyai 30. Qualitative Theory of Different. Equations. Szeged (Hungary) 1979. P. 381—409.
4. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Different. Equat. 1977. V. 23. № 2. P. 216—223.
5. *Андреев А. С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 253—259.
6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
7. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225—232.
8. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 5. С. 9—16.
9. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
10. *Pieffer K., Rouche N.* Liapunov's second method applied to partial stability // J. Mechanique. 1969. V. 8. № 2. P. 323—334.
11. *Hatvani L.* On the asymptotic stability by nondecreseent Liapunov function // Nonlinear Analysis. TMA. 1984. V. 7. № 1. P. 67—77.
12. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости относительно части переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. 1972. № 1. С. 73—80.
13. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивосси и неустойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 147—152.
14. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. II (The method of limiting equations) // Acta Sci. Math. 1983. T. 46. f. 1—4. P. 143—156.
15. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability by the method of limiting equation // Ann. Math. Pure Appl. 1985. V. 99. P. 65—82.
16. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
17. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 499—503.
18. *Рубановский В. Н., Самсонов В. А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 303 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию
12.IV.1991